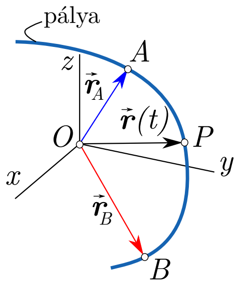
① Kinematika **jelölések**

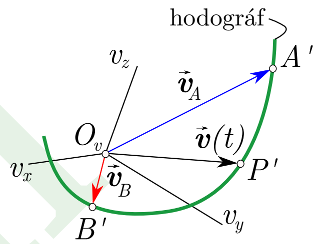


- hely: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ [m] – idő függvénye, ha $t = t_B$: $\qquad \vec{r}_B = \vec{r}(t_B)$
- (*közepes*) sebesség

$$\vec{v}_K = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_B - t_A} \quad [\frac{\text{m}}{\text{s}}]$$

- (*pillanatnyi*) sebesség

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t)$$



hodográf: pillanatnyi sebességek ábrázolása a sebesség-koordináták síkján

- gyorsulás

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad \to \quad \vec{a} = a_t\vec{t} + a_n\vec{n}$$

$$\text{ahol} \quad a_t = \dot{v} \;\; (\textit{pályagyorsulás}) \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \geq 0 \;\; (\textit{normális gyorsulás})$$

melyben ρ a *görbületi sugár*. Egyenes pálya esetén $\rho = \infty$, azaz $a_n \equiv 0$.

② Az egyenes vonalon mozgó anyagi pont/tömegpont helyzetét az alábbi mozgásegyenlet fejezi ki: (BJ 11.1)

$$x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40 \qquad ([t] = \text{s}, \;\; [x] = \text{m})$$

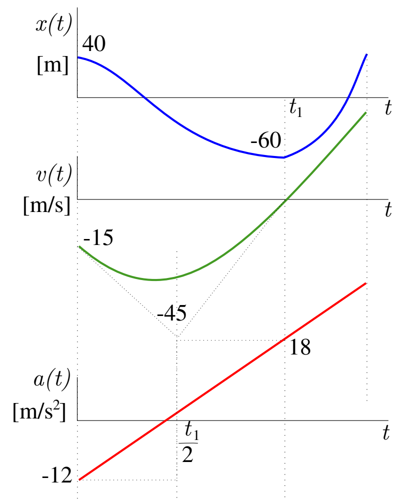
(a) Keresse meg azt a t_1 időpontot, amikor az anyagi pont sebessége zérus!

(b) Határozza meg a t_1-ig megtett Δx utat és a tömegpont x_1 helyzetét!

(c) Számítsa ki a t_1 időpontnál a tömegpont a_1 gyorsulását!

(d) Adja meg azt a Δx_{23} utat, amit a tömegpont a $t_2 = 4$ [s] és $t_3 = 6$ [s] között megtett!

Megoldás: $t_1 = 5$ [s]; $x_1 = -60$ [m]; $\Delta x = 100$ [m]; $a_1 = 18\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$; $\Delta x_{23} = 8 + 10 = 18$ [m] .



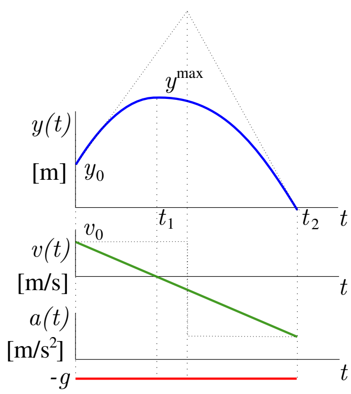
---

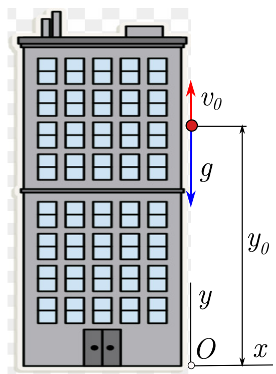
③ Az y_0 magasságban lévő ablakból v_0 kezdősebességgel függőlegesen felfelé kidobtak egy labdát. A g gyorsulás lefelé mutat. (BJ 11.2)

$$y_0 = 20\,[\text{m}]; \quad v_0 = 10\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]; \quad g = 9,81\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$$

(a) Írja fel a labda $v = v(t)$ sebességét a t időkoordináta függvényében, amíg az nem éri el a földfelszínt!

(b) Adja meg az $y = y(t)$ magasság függvényt, amíg a labda nem éri el a földfelszínt!





(c) Mekkora a legmagasabb pont ($y^{\max}$), amit a labda elért?

(d) Határozza meg a földetérést jelző t_2 időt, illetve adja meg ebben a t_2 időpillanatban a labda v_2 sebességét!

Megoldás: $v(t) = 10 - 9,81t$; $y(t) = 20 + 10t - \frac{9,81}{2}t^2$; $y^{\max} = 25,0936\,[\mathrm{m}]$; $t_2 = 3,28\,[\mathrm{s}]$; $v_2 = 22,19\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}] \downarrow$

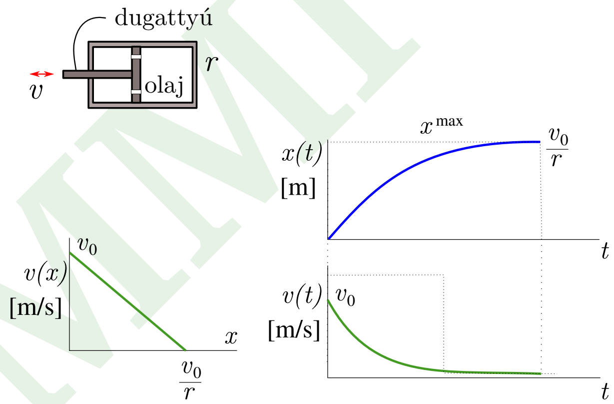
---

4 Egy fékező mechanizmus látható az ábrán, ahol a dugattyú mozog egy olajjal töltött hengerben. Amikor a dugattyú v_0 sebességgel elindul, akkor az olaj áramlása lassítani fogja a dugattyú mozgását, mely arány állandó $a = -rv$ sebességgel arányos lassulást jelent, ahol r a dugattyúhoz rendelt csillapítási tényező! (BJ 11.3)

(a) Fejezze ki a $v = v(t)$ függvényt!

(b) Írja fel az $x = x(t)$ mozgástörvényt!

(c) Határozza meg a $v = v(x)$ függvényt!



Megoldás: $v = v_0e^{-rt}$; $x = (1 - e^{-rt})\frac{v_0}{r}$; $v = v_0 - rx$.

---

5 Ismert a $[0,\, t_1]$ időszakaszban a tömegpont mozgástörvénye. (MPt.I. 2.4)

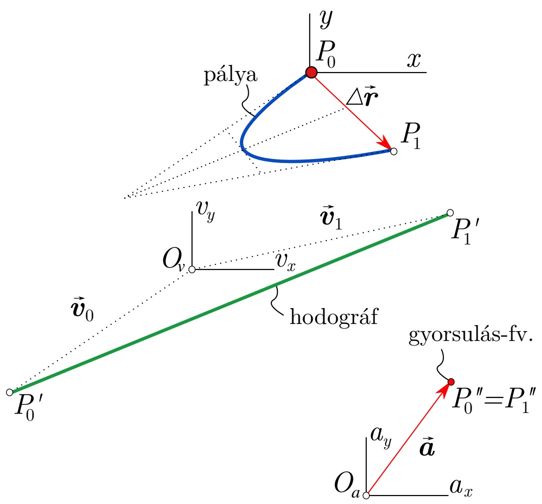
$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{b}}t + \vec{\boldsymbol{c}}t^2$$

ahol

$\vec{\boldsymbol{b}} = (-3\vec{\boldsymbol{e}}_x - 4\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{c}} = (2\vec{\boldsymbol{e}}_x + 1,5\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $t_1 = 2\,[\mathrm{s}]$

(a) Számítsa ki az adott időszakaszban a $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ elmozdulásvektort!

(b) Rajzolja meg a tömegpont pályáját, hodográfját és gyorsulás függvényét!



Megoldás:
$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = (2\vec{\boldsymbol{e}}_x - 2\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{m}]$; $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{b}} + 2\vec{\boldsymbol{c}}t$ (egyenes); $\vec{\boldsymbol{a}} = 2\vec{\boldsymbol{c}}$ (pont).

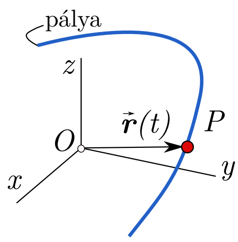
---

6 Ismeretes a $[0,\, t_1]$ időszakaszban a tömegpont térbeli mozgástörvénye. (MPt.I. 2.7.)

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{c}}_1 \cos bt + \vec{\boldsymbol{c}}_2 \sin bt$$

ahol

$b = 5\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}]$; $t_1 = \frac{\pi}{2}\,[\mathrm{s}]$; $\vec{\boldsymbol{c}}_1 = (3\vec{\boldsymbol{e}}_x + 4\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{m}]$; $\vec{\boldsymbol{c}}_2 = (\vec{\boldsymbol{e}}_y + 2\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\mathrm{m}]$



(a) Számítsa ki a $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ elmozdulásvektort és a $\vec{\boldsymbol{v}}_K$ közepes sebességet a fenti időszakaszra!

(b) Határozza meg az $\vec{\boldsymbol{a}}(t)$ gyorsulást!

(c) Írja fel a vetületi mozgások egyenleteit!

Megoldás: $\Delta\vec{r} = (-3\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z)\,[\mathrm{m}]$; $\vec{v}_K = (-\frac{6}{\pi}\vec{e}_x - \frac{6}{\pi}\vec{e}_y + \frac{4}{\pi}\vec{e}_z)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{a}(t) = -b^2\vec{c}_1\cos bt - b^2\vec{c}_2\sin bt$;
$x(t) = 3\cos bt$; $y(t) = 4\cos bt + \sin bt$; $z(t) = 2\sin bt$.

---

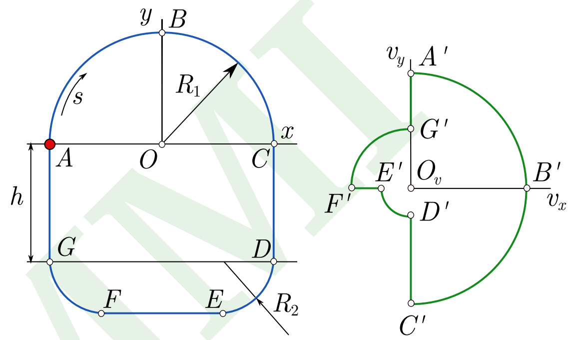
7. Egy tömegpont a vázolt pályán az A pontból indulva úgy mozog, hogy a köríves szakaszokat állandó pályasebességgel, az egyenes szakaszokat állandó gyorsulással futja be. (MPt. I. 2.23)

$$v_A = 15\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];\quad v_D = 5\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];\quad v_F = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];$$

$$R_1 = 10\,[\mathrm{m}];\quad R_2 = 5\,[\mathrm{m}];\quad h = 10\,[\mathrm{m}]$$

(a) Rajzolja meg a mozgás hodográfját!

Megoldás: $\vec{v}_A = 15\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{v}_B = 15\vec{e}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$;
$\vec{v}_C = -15\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{v}_D = -5\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{v}_F = -10\vec{e}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$.



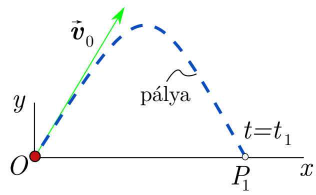
---

8. Vízszintes talajról az O pontból $\vec{v}_0$ kezdősebességgel egy labdát hajítottunk el. A tömegpont állandó $\vec{g}$ gyorsulással mozog, és t_1 idő múlva ér vissza a talajra. (MPt. I. 2.32)

$$\vec{v}_0 = (6\vec{e}_x + 8\vec{e}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];\quad \vec{g} = -10\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$$

(a) Határozza meg az elhajítás pillanatában a pálya ρ_0 görbületi sugarát!

(b) Határozza meg a mozgás pályáját, hodográfját és a hajítás idejét!



Megoldás: $\rho_0 = 16,\dot{6}\,[\mathrm{m}]$; pálya: *parabola* ($\vec{r}_0 = \vec{0}$ és $\vec{r}_1 = 9,6\vec{e}_x\,[\mathrm{m}]$ között); hodográf: *egyenes* ($\vec{v}_0$ és $\vec{v}_1 = (6\vec{e}_x - 8\vec{e}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$ között); $t_1 = 1,6\,[\mathrm{s}]$.

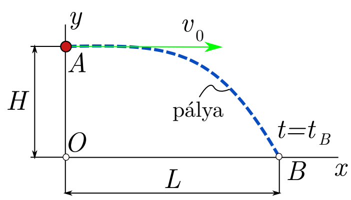
---

9. Vízszintes v_0 kezdősebességgel az A pontból elhajított acélgolyó t_B idő múlva ér a B pontba. (MPt. I. 2.33)

$$v_0 = 80\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];\quad t_B = 6\,[\mathrm{s}]$$

(a) Rajzolja meg a hodográfot, majd annak segítségével számítsa ki a kiindulási helyzet H magasságát, és a hajítás L távolságát!

(b) Határozza meg a B pontban a pálya ρ_B görbületi sugarát!



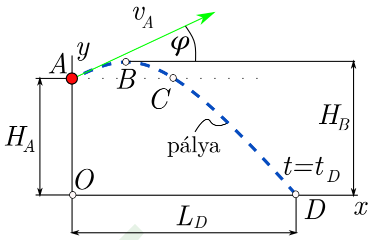
Megoldás: hodográf: *egyenes* ($\vec{v}_A = 80\vec{e}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$ és $\vec{v}_B = (80\vec{e}_x - 60\vec{e}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$ között); $H = 180\,[\mathrm{m}]$; $L = 480\,[\mathrm{m}]$; $\rho_B = 1250\,[\mathrm{m}]$.

---

(10) A vízszintes talaj fölött H_A magásságban lévő A pontból egy tömegpontnak tekinthető labdát hajítunk a víszintessel φ szöget bezáró v_A sebességgel felfelé.

(MPt. I. 2.36)

$$H_A = 100\,[\mathrm{m}];\quad \varphi = 30°;\quad v_A = 80\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$$



(a) Adja meg, hogy a labda mikor ér a pálya B tetőpontjába, és számítsa ki, hogy milyen H_B magasságba emelkedik!

(b) Határozza meg, hogy mekkora a pálya ρ_C görbületi sugara a kiindulási magasságban lévő C pontban!

(c) Számítsa ki, hogy a tömegpont mikor ér a pálya C, illetve a földreérkezés D pontjába!

(d) Adja meg a hajítás vízszintes L_D vetületi távolságát!

Megoldás: $t_B = 4\,[\mathrm{s}]$; $H_B = 180\,[\mathrm{m}]$; $\rho_C = 739\,[\mathrm{m}]$; $t_C = 8\,[\mathrm{s}]$; $t_D = 10\,[\mathrm{s}]$; $L_D = 692,82\,[\mathrm{m}]$.

---

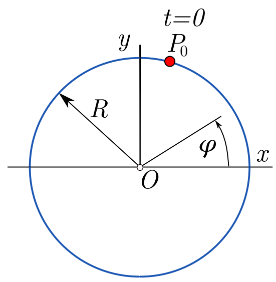
(11) Az R sugarú körön a $[0;\, t_B]$ időintervallumban a tömegpontnak tekinthető fémgolyó a $\varphi = \varphi(t)$ törvény szerint mozog.

(MPt. I. 2.43)

$$R = 5\,[\mathrm{m}];\quad t_B = 2,5\,[\mathrm{s}];\quad \varphi = c_0 + c_1 t^2$$

ahol

$$c_0 = 1,5\,[\mathrm{rad}];\quad c_1 = 4\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}]$$



(a) Határozza meg az adott időintervallumra vonatkozó v_K közepes sebesség abszolút értékét!

(b) Számítsa ki a t_B időpillanatban a v_B pályasebességet, az a_{tB} pályagyorsulást és az a_{nB} normális irányú gyorsulást!

Megoldás: $v_K = 0,27\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $v_B = 100\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $a_{tB} = 40\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $a_{nB} = 2000\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$.

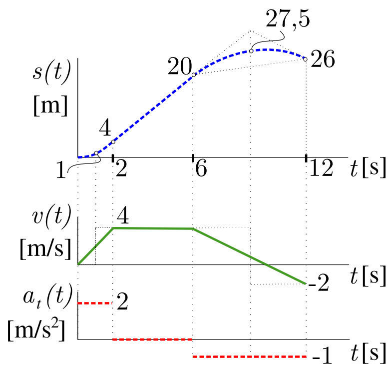
---

(12) Egy tömegpont az adott $v(t)$ diagram szerint mozog a pályáján.

(MPt. I. 2.56)

(a) Vázolja fel az $s(t)$ és az $a_t(t)$ diagramokat (foronómiai görbéket)!

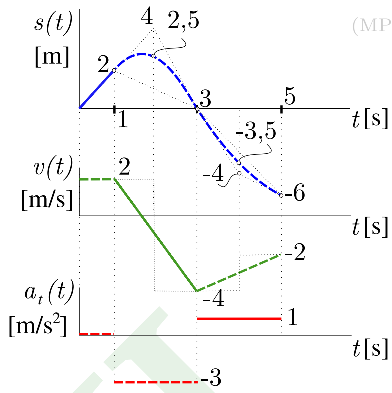
(b) Számítással határozza meg a jellemző metszékeket, ha $s_0 = 0$!



---

(13) Egy tömegpont úgy mozog a pályáján, hogy

(MPt. I. 2.54)



- a $[0;\, t_1]$ időszakaszban az $s(t)$ függvény,
- a $[t_1;\, t_2]$ időszakaszban a $v(t)$ függvény,
- míg a $[t_2; t_3]$ időszakaszban az $a_t(t)$ függvény ismert.

$$t_1 = 1\,[\mathrm{s}]; \quad t_2 = 3\,[\mathrm{s}]; \quad t_3 = 5\,[\mathrm{s}]$$

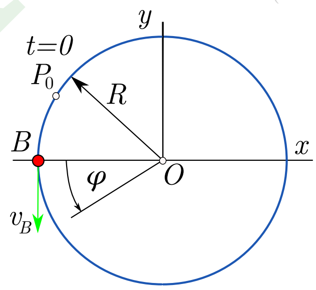
(a) Rajzolja meg a foronómiai görbék hiányzó szakaszait!

(b) Számítással tüntesse fel a jellemző metszékeket!

---

(14) Ismeretes az R sugarú körön egyenletesen gyorsuló körmozgást végző tömegpont B pontbeli $\vec{\boldsymbol{v}}_B$ sebessége és $\vec{\boldsymbol{a}}_B$ gyorsulásának abszolút értéke.

(MPt. I. 2.46)



$$\vec{\boldsymbol{v}}_B = -4\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]; \quad |\vec{\boldsymbol{a}}_B| = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad R = 2[\mathrm{m}]$$

(a) Határozza meg az $\vec{\boldsymbol{a}}_B$ gyorsulásvektort!

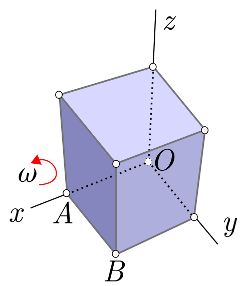
(b) A foronómiai görbék segítségével számítsuk ki, hogy mikor és honnan indult a tömegpont!

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{a}}_B = (8\vec{\boldsymbol{e}}_x - 6\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $t_1 = 0,\dot{6}\,[\mathrm{s}]$; $s_1 = 1,\dot{3}\,[\mathrm{m}]$ ($\varphi = 38,197°$).

---

(15) A merev test pillanatnyi szögsebessége $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, és A pontjának sebessége $\vec{\boldsymbol{v}}_A$.

(MPt. I. 2.78)



$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = 4\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}]; \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_A = 2\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]; \qquad \vec{\boldsymbol{r}}_{AB} = 3\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\mathrm{m}]$$

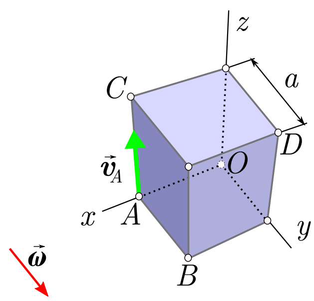
(a) Határozza meg a B pont pillanatnyi $\vec{\boldsymbol{v}}_B$ sebességét!

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{v}}_B = 14\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$.

---

(16) Az a élhosszúságú kocka sebességállapota $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ szögsebességével és A pontjának $\vec{\boldsymbol{v}}_A$ sebességével adott.

(MPt. I. 2.79)



$$a = 0,5\,[\mathrm{m}]; \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_A = 3\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]; \qquad \vec{\boldsymbol{\omega}} = 2\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}]$$

(a) Számítsa ki a B, C és D pontok sebességét!

(b) Határozza meg a szögsebesség-vektorrendszer centrális egyenesét! (a pillanatnyi forgástengelyt)

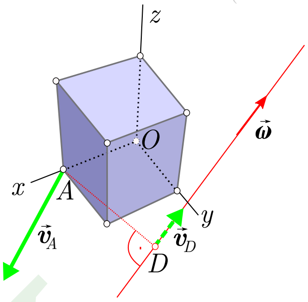
(c) Milyen elemi mozgást végez a test?

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{v}}_B = 3\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{v}}_C = (\vec{\boldsymbol{e}}_x + 3\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{v}}_D = (\vec{\boldsymbol{e}}_x + 4\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $2\vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{r}} + 4\vec{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{0}}$; elemi forgó mozgás (II.a).

---

(17) Ismeretes a merev test $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ szög sebessége és A pontjának $\vec{\boldsymbol{v}}_A$ sebessége. (MPt. I. 2.81)

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = (\vec{\boldsymbol{e}}_x + 2\vec{\boldsymbol{e}}_y + 2\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}];\quad \vec{\boldsymbol{v}}_A = (18\vec{\boldsymbol{e}}_x + 9\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];\quad \vec{\boldsymbol{r}}_A = 4\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\mathrm{m}]$$



(a) Adja meg a szögsebesség-vektorrendszer centrális egyenesének A ponthoz legközelebbi D pontját ($\vec{\boldsymbol{r}}_D$)!

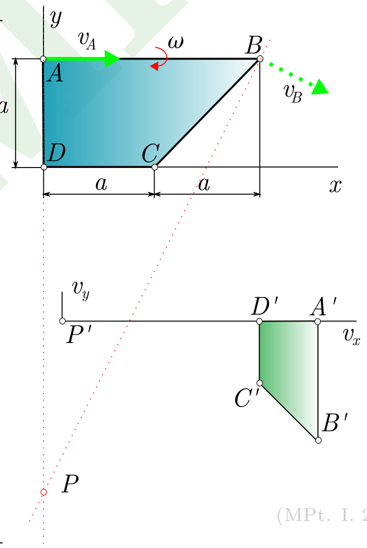
(b) Határozza meg az $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ szögsebesség-vektorrendszer centrális egyenesének egyenletét!

(c) Milyen elemi mozgást végez a test?

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{r}}_D = (2\vec{\boldsymbol{e}}_x + 4\vec{\boldsymbol{e}}_y - 3\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\mathrm{m}]$; $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_D$; elemi csavarmozgás (II.b).

---

(18) A síkmozgást végző merev test sebességállapota



$\vec{\boldsymbol{\omega}}$ szögsebességével és A pontjának sebességével adott.

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = -\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}];\quad \vec{\boldsymbol{v}}_A = 4\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];\quad a = 1\,[\mathrm{m}]$$

(a) Határozza meg számítással a B pont $\vec{\boldsymbol{v}}_B$ sebességét!

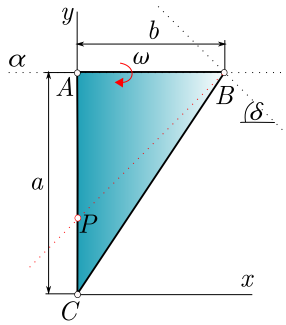
(b) Szerkesztéssel adja meg a sebességpólus helyét!

(c) Számítással / szerkesztéssel határozza meg a C és D pontok $\vec{\boldsymbol{v}}_C$ és $\vec{\boldsymbol{v}}_D$ sebességét!

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{v}}_B = (4\vec{\boldsymbol{e}}_x - 2\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{r}}_P = -3\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\mathrm{m}]$; $\vec{\boldsymbol{v}}_C = (3\vec{\boldsymbol{e}}_x - \vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{v}}_D = 3\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$. (MPt. I. 2.88)

---

(19) Ismeretes a síkmozgást végző merev test $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ szögsebessége, valamint az A pont sebességének α és a B pont sebességének β hatásvonala, mely utóbbi a vízszintessel δ szöget zár be. (MPt. I. 2.90)



$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = -3\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}];\quad a = 3\,[\mathrm{m}];\quad b = 2\,[\mathrm{m}];\quad \delta = 45^\circ$$

(a) Határozza meg a P sebességpólus $\vec{\boldsymbol{r}}_P$ helyvektorát!

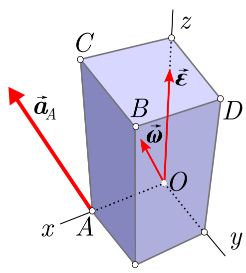
(b) Számítsa ki az A és a B pont $\vec{\boldsymbol{v}}_A$ és $\vec{\boldsymbol{v}}_B$ sebességét!

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{r}}_P = \vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\mathrm{m}]$; $\vec{\boldsymbol{v}}_A = 6\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{v}}_B = (6\vec{\boldsymbol{e}}_x - 6\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$.

---

(20) Adott a vizsgált időpillanatban a merev test $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ szögsebessége, $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ szöggyorsulása, valamint A pontjának $\vec{\boldsymbol{a}}_A$ gyorsulása. (MPt. I. 2.96)

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = (\vec{\boldsymbol{e}}_x - 2\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}];\quad \vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = 4\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}];\quad \vec{\boldsymbol{a}}_A = (3\vec{\boldsymbol{e}}_x + 5\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$$



(a) Számítsa ki a B pont $\vec{\boldsymbol{a}}_B$ gyorsulását, ha $\vec{\boldsymbol{r}}_{AB} = (\vec{\boldsymbol{e}}_y + 2\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\mathrm{m}]$!

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{a}}_B = (-3\vec{\boldsymbol{e}}_x - \vec{\boldsymbol{e}}_y - 5\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$.

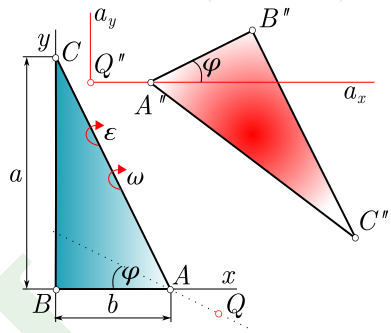
21 A merev test síkmozgást végez.

(MPt. I. 2.102)

Szögsebessége $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, szöggyorsulása $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ és A pontjának gyorsulása $\vec{\boldsymbol{a}}_A$.

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = -4\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}];\quad \vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = -8\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}];\quad \vec{\boldsymbol{a}}_A = 10\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}];$$

$$a = 2\,[\text{m}];\quad b = 1\,[\text{m}]$$



(a) Számítsuk ki a B pont $\vec{\boldsymbol{a}}_B$ gyorsulását!

(b) Szerkesszük meg az $\vec{\boldsymbol{a}}_B$ ismeretében a C pont $\vec{\boldsymbol{a}}_C$ gyorsulását!

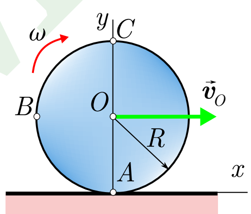
Megoldás: $\vec{\boldsymbol{a}}_B = (26\vec{\boldsymbol{e}}_x + 8\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{a}}_C = (42\vec{\boldsymbol{e}}_x - 24\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$.

---

22 Az R sugarú korong vízszintes talajon gördül. O pontjának $\vec{\boldsymbol{v}}_O$ sebessége állandó.

(MPt. I. 2.105)

$$R = 4\,[\text{m}];\quad \vec{\boldsymbol{v}}_O = 20\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$$



(a) Keresse meg a pillanatnyi P sebességpólust!

(b) Határozza meg az A, B és C pontok pillanatnyi $\vec{\boldsymbol{v}}_A$, $\vec{\boldsymbol{v}}_B$ és $\vec{\boldsymbol{v}}_C$ sebességét!

(c) Keresse meg a pillanatnyi Q gyorsuláspólust!

(d) Számítsa ki az A, B és C pontok pillanatnyi $\vec{\boldsymbol{a}}_A$, $\vec{\boldsymbol{a}}_B$ és $\vec{\boldsymbol{a}}_C$ gyorsulását!

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{r}}_P = \vec{\boldsymbol{0}}$; $\vec{\boldsymbol{v}}_A = \vec{\boldsymbol{0}}$; $\vec{\boldsymbol{v}}_B = (20\vec{\boldsymbol{e}}_x + 20\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{v}}_C = 40\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{r}}_Q = 4\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\text{m}]$; $\vec{\boldsymbol{a}}_A = 100\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{a}}_B = 100\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{a}}_C = -100\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$.

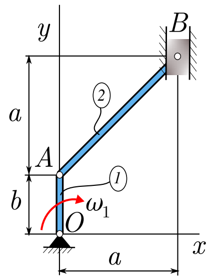
---

23 Az ábrán látható forgattyús mechanizmus 1 jelű forgattyújának $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1$ szögsebessége állandó.

(MPt. I. 2.106)

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 = -2\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}];\quad a = 3\,[\text{m}];\quad b = 1,5\,[\text{m}]$$

Határozza meg a vázolt helyzetben a 2 jelű rúd pillanatnyi



(a) P_2 sebességpólusát, $\vec{\boldsymbol{\omega}}_2$ szögsebességét, és B pontjának $\vec{\boldsymbol{v}}_B$ sebességét!

(b) $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ szöggyorsulását és B pontjának $\vec{\boldsymbol{a}}_B$ gyorsulását!

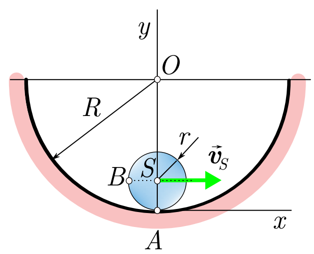
Megoldás: $\vec{\boldsymbol{r}}_{P_2} = 4,5\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\text{m}]$; $\vec{\boldsymbol{v}}_B = 3\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\omega}}_2 = \vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$;
$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = -\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{a}}_B = -12\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$.

---

24 Álló R sugarú henger belső felületén r sugarú hengert gördítünk le. Az r sugarú henger S súlypontjának a vázolt időpillanatban a sebessége $\vec{\boldsymbol{v}}_S$, a tangenciális gyorsulása a_{St}.

(D.P. 2.17)

$$R = 5\,[\text{m}];\quad r = 1\,[\text{m}];\quad \vec{\boldsymbol{v}}_S = 4\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}];\quad a_{St} = 0$$



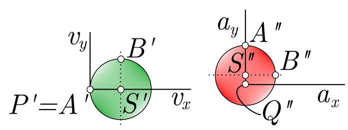
(a) Számítsa ki az r sugarú henger $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ szögsebességét és $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ szöggyorsulását!

(b) Határozza meg az r sugarú henger S súlypontjának és A pontjának pillanatnyi $\vec{\boldsymbol{a}}_S$ és $\vec{\boldsymbol{a}}_A$ gyorsulását!

(c) Szerkessze meg az r sugarú henger sebességábráját!

(d) Rajzolja fel az r sugarú henger gyorsulásábráját!

(e) Adja meg a Q gyorsuláspólus $\vec{\boldsymbol{r}}_Q$ helyvektorát!

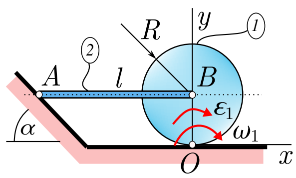


Megoldás: $\vec{\boldsymbol{\omega}} = -4\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = \vec{\boldsymbol{0}}$; $\vec{\boldsymbol{a}}_S = 4\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{a}}_A = 20\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{r}}_{SQ} = 0,25\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\text{m}]$.

25 Az l hosszúságú AB rúd A jelű vége az α lejtőn mozog, B jelű vége csuklóval kapcsolódik az R sugarú korong súlypontjához. A korong pillanatnyi szögsebessége $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1$, szöggyorsulása $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$. A vizsgált időpillanatban a rúd vízszintes helyzetben van.

(D.P. 4.7)

$R = 0,4\,[\mathrm{m}]$; $l = 1,2\,[\mathrm{m}]$; $\alpha = 45°$; $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 = -6\,\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = -2\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}]$



(a) Adja meg az AB rúd P_2 pillanatnyi sebességpólusát!

(b) Határozza meg az AB rúd $\vec{\boldsymbol{\omega}}_2$ szögsebességét, valamint az A és B pont pillanatnyi $\vec{\boldsymbol{v}}_A$ és $\vec{\boldsymbol{v}}_B$ sebességét!

(c) Számítsa ki az AB rúd $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ szöggyorsulását, valamint az A és a B pont $\vec{\boldsymbol{a}}_A$ és $\vec{\boldsymbol{a}}_B$ gyorsulását!

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{r}}_{P_2} = 1,6\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\mathrm{m}]$; $\vec{\boldsymbol{\omega}}_2 = 2\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{v}}_A = (2,4\vec{\boldsymbol{e}}_x - 2,4\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{v}}_B = 2,4\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = 4,6\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{a}}_A = (5,6\vec{\boldsymbol{e}}_x - 5,6\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{a}}_B = 0,8\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$.

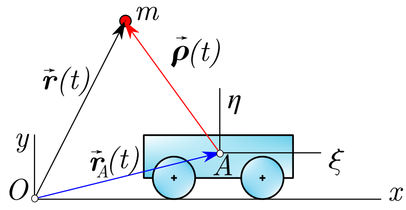
---

26 Ismeretes a mozgó jármű A pontjának $\vec{\boldsymbol{r}}_A(t) = \vec{\boldsymbol{r}}_{A0} + \vec{\boldsymbol{b}}_A t + \vec{\boldsymbol{c}}_A t^2$ mozgástörvénye, valamint az m tömegpont $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{b}}t + \vec{\boldsymbol{c}}t^2$ mozgástövénye az xyz KR-ben.

(MPt. I. 2.110)

ahol

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{A0} = (3\vec{\boldsymbol{e}}_x + \vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{m}]; \quad \vec{\boldsymbol{r}}_0 = (3\vec{\boldsymbol{e}}_x + 4\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{m}];$$
$$\vec{\boldsymbol{b}}_A = 4\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]; \quad \vec{\boldsymbol{b}} = (\vec{\boldsymbol{e}}_x + 2\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];$$
$$\vec{\boldsymbol{c}}_A = 3,75\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad \vec{\boldsymbol{c}} = -5\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$$



(a) Határozza meg a járműhöz kötött $\xi\eta\zeta$ KR-ben a tömegpont $\vec{\boldsymbol{\rho}}(t)$ mozgástövényét, valamint $t = 0$ időpontban a tömegpont $\vec{\boldsymbol{\beta}}_0$ sebességét, és $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_0$ gyorsulását!

(b) Adja meg a járműhöz kötött $\xi\eta\zeta$ KR-ben a tömegpont pályát!

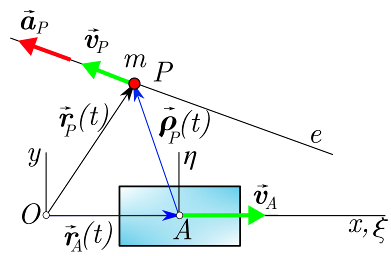
Megoldás: $\vec{\boldsymbol{\rho}}(t) = \vec{\boldsymbol{\rho}}_0 + \vec{\boldsymbol{\beta}}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_0 t^2$, ahol $\vec{\boldsymbol{\rho}}_0 = 3\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\mathrm{m}]$, $\vec{\boldsymbol{\beta}}_0 = (-3\vec{\boldsymbol{e}}_x + 2\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$, $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_0 = (-7,5\vec{\boldsymbol{e}}_x - 10\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$.

---

27 A P pont az $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \vec{\boldsymbol{r}}_P + \vec{\boldsymbol{v}}_P t + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}_P t^2$ mozgástörvény szerint mozog az e egyenes pályán. Az x tengely mentén állandó $\vec{\boldsymbol{v}}_A$ sebességgel mozog egy jármű, amelyhez a $\xi\eta\zeta$ KR-t kötjük.

(MPt. I. 2.114)

$$\vec{\boldsymbol{r}}_P = (6\vec{\boldsymbol{e}}_x + 5\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{m}]; \quad \vec{\boldsymbol{v}}_P = (-2\vec{\boldsymbol{e}}_x + 1,5\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];$$
$$\vec{\boldsymbol{a}}_P = (-4\vec{\boldsymbol{e}}_x + 3\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad \vec{\boldsymbol{v}}_A = 6\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$$



(a) Írja fel a $t = 0$ időpontban a tömegpont mozgástörvényét a $\xi\eta\zeta$ KR-ben!

(b) Adja meg a P pont kocsihoz képesti $\vec{\boldsymbol{\beta}}_P$ sebességét és $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_P$ gyorsulását!

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{\rho}}(t) = \vec{\boldsymbol{\rho}}_P + \vec{\boldsymbol{\beta}}_P t + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\alpha}}_P t^2$, ahol $\vec{\boldsymbol{\rho}} = \vec{\boldsymbol{r}}_P - \vec{\boldsymbol{r}}_{A0}$, $\vec{\boldsymbol{\beta}}_P = (-8\vec{\boldsymbol{e}}_x + 1,5\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$, $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_P = (-4\vec{\boldsymbol{e}}_x + 3\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$.

---

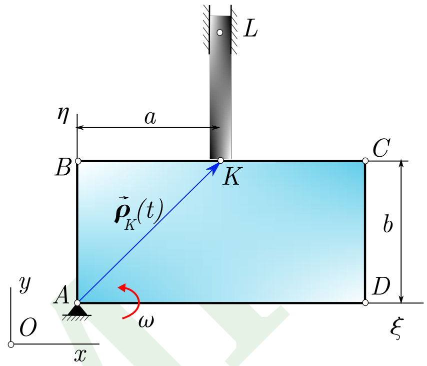
(28) A hasáb alakú merev test a hozzákötött $\xi\eta\zeta$ KR-rel az A ponton átmenő z tengellyel párhuzamos tengely körül állandó $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ szögsebességgel forog, miközben az y tengellyel párhuzamosan vezetett KL rudat emeli, melynek K pontja a hasáb BC egyenesén csúszik.

(MPt. I. 2.119)

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = 2\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}];\quad a = 0,4\,[\text{m}];\quad b = 0,4\,[\text{m}]$$

(a) Számítsa ki a vázolt helyzetben a rúd K pontjának $\vec{\boldsymbol{v}}_K$ sebességét és $\vec{\boldsymbol{a}}_K$ gyorsulását az xyz KR-ben!

(b) Határozza meg a vázolt helyzetben a rúd K pontjának $\vec{\boldsymbol{\beta}}_K$ sebességét és $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_K$ gyorsulását a $\xi\eta\zeta$ KR-ben!



Megoldás:

$\vec{\boldsymbol{v}}_K = 0,8\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{a}}_K = 1,6\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{\beta}}_K = 0,8\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_K = 1,6\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$.

---

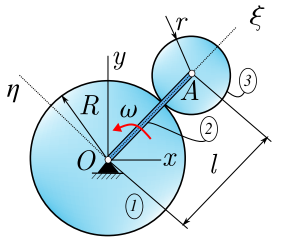
(29) Az r sugarú körhengert az ábrán látható l hosszúságú kar segítségével legördítjük az R sugarú álló körhengeren. A $\xi\eta\zeta$ KR-t az OA karhoz kötjük, amely állandó ω szögsebességgel forog az álló xyz KR-ben.

(MPt. I. 2.125)

$$\omega = 10\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}];\quad r = 0,3\,[\text{m}];\quad R = 0,6\,[\text{m}]$$

(a) Számítsa ki az r sugarú körhenger szögsebességét a $\xi\eta\zeta$ és az xyz KR-ben is!

(b) Mekkora az r sugarú körhenger szöggyorsulása az xyz KR-ben?



Megoldás: $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{13} = 30\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{23} = 20\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{13} = \vec{\boldsymbol{0}}$.

---

(30) Az R sugarú korong a hozzákötött $\xi\eta\zeta$ KR-rel együtt a ζ tengely körül állandó $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{12}$ szögsebességgel forog. Közben az r sugarú henger a $\xi\eta\zeta$ KR-hez képest a b jelű tengely körül $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{23}$ pillanatnyi szögsebességgel és $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{23}$ szöggyorsulással forog.

(MPt. I. 2.128)

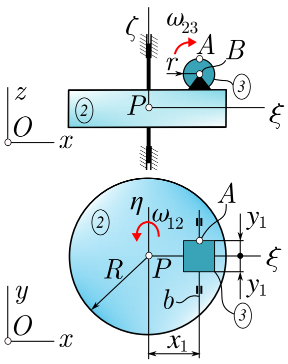
$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{12} = 5\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}];\quad \vec{\boldsymbol{\omega}}_{23} = 2\vec{\boldsymbol{e}}_\eta\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}];\quad \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{23} = 3\vec{\boldsymbol{e}}_\eta\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}];$$

$$r = 0,1\,[\text{m}];\quad R = 0,5\,[\text{m}];\quad x_1 = 0,3\,[\text{m}];\quad y_1 = 0,1\,[\text{m}]$$

(a) Mekkora az r sugarú henger $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{13}$ szögsebessége és $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{13}$ szöggyorsulása a vizsgált időpillanatban az xyz KR-ben?

(b) Számítsa ki az r sugarú korongon lévő A pont pillanatnyi $\vec{\boldsymbol{\beta}}_A$ sebességét és $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_A$ gyorsulását a $\xi\eta\zeta$ KR-ben!

(c) Határozza meg a $\vec{\boldsymbol{v}}_A$ sebességet és az $\vec{\boldsymbol{a}}_A$ gyorsulást az xyz KR-ben!



Megoldás:

$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{13} = (2\vec{\boldsymbol{e}}_y + 5\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{13} = (-10\vec{\boldsymbol{e}}_x + 3\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{\beta}}_A = 0,2\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_A = (0,3\vec{\boldsymbol{e}}_x - 0,4\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$;

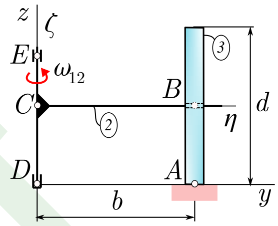
$\vec{\boldsymbol{v}}_A = (-0,3\vec{\boldsymbol{e}}_x + 1,5\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{a}}_A = (-7,2\vec{\boldsymbol{e}}_x - 0,5\vec{\boldsymbol{e}}_y - 0,4\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$.

---

31 A DE tengely körül forgó BC rúd szögsebessége az álló xyz KR-ben $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{12}$ = áll. A BC rúdon csapágyazott r sugarú vékony tárcsa az A pontban gördül a talajon. A $\xi\eta\zeta$ KR-t a BC rúdhoz kötjük. Az ábrán vázolt helyzet a $t = 0$ időpillanatot szemlélteti.

(MPt. I. 2.133)

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{12} = 10\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]; \quad b = 2\,[\text{m}]; \quad d = 2\,[\text{m}]$$



(a) Számítsa ki a vázolt helyzetben a tárcsa szögsebességét a $\xi\eta\zeta$ és az xyz KR-ben!

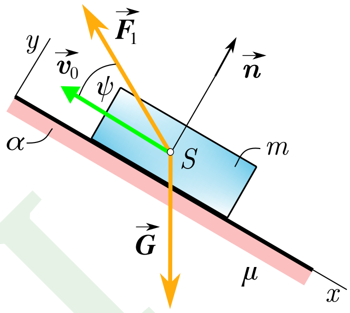
(b) Határozza meg a $\xi\eta\zeta$ és az xyz KR-ben a $t = 0$ időpillanatban a tárcsa szöggyorsulását!

Megoldás:

$\vec{\boldsymbol{\omega}}_{13} = (-20\vec{\boldsymbol{e}}_y + 10\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{23} = -20\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}}]$; $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{13} = 200\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{23} = \vec{\boldsymbol{0}}$.

32 Lejtős kényszerpályán $\vec{G}$ súlyú anyagi pont kezdősebessége $\vec{v}_0$. Az anyagi pontra ható $\vec{F}_1$ erő ψ szöget zár be a kényszerpályával. A súrlódás elhanyagolható. (MPt. I. 4.19)

$$\operatorname{tg}\psi = 0,4; \quad \vec{G} = (60\vec{e}_x - 80\vec{e}_y)\,[\mathrm{N}]; \quad \mu = 0; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$$



(a) Mekkora $\vec{F}_1$ erő esetén mozoghat állandó $\vec{v} = \vec{v}_0$ sebességgel a tömegpont?

(b) Számítsa ki a tömegpont $\vec{a}$ gyorsulását és az $\vec{F}_t$ kényszererőt ha $\vec{F}_1 = (-85\vec{e}_x + 34\vec{e}_y)\,[\mathrm{N}]$?

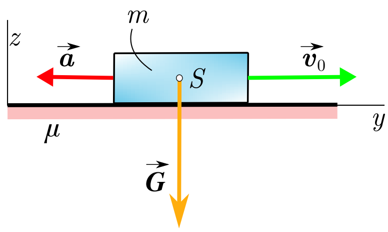
(c) Határozza meg, hogy mekkora $\vec{F}_1^{\max}$ erő esetén mozoghat még a tömegpont az α jelű kényszerpályán!

Megoldás: $\vec{F}_1 = (-60\vec{e}_x + 24\vec{e}_y)\,[\mathrm{N}]$; $\vec{a} = -2,5\vec{e}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{F}_t = 46\vec{e}_y\,[\mathrm{N}]$; $\vec{F}_1^{\max} = (-200\vec{e}_x + 80\vec{e}_y)\,[\mathrm{N}]$.

---

33 A vízszintes érdes kényszerpályán $\vec{v}_0$ kezdősebességgel elindított tömegpontnak tekinthető $\vec{G}$ súlyú m tömegű test a súrlódás következtében állandó $\vec{a}$ lassulással mozog ($\vec{a}\cdot\vec{v}_0 < 0$). (MPt. I. 4.20)

$$\vec{G} = -800\vec{e}_z\,[\mathrm{N}]; \quad m = 80\,[\mathrm{kg}]; \quad \vec{v}_0 = 10\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]; \quad \vec{a} = -0,4\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$$



(a) Mekkora a μ súrlódási tényező?

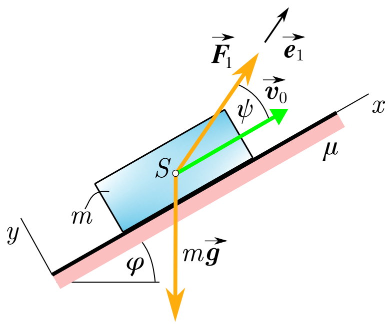
(b) Számítsuk ki az $\vec{F}_\alpha$ kényszererőt!

Megoldás: $\mu = 0,04$; $\vec{F}_\alpha = (-32\vec{e}_y + 800\vec{e}_z)\,[\mathrm{N}]$.

---

34 A vízszintessel φ szöget bezáró érdes lejtőn pillanatnyilag $\vec{v}_0$ sebességgel mozog az m tömegű anyagi pont. Az $\vec{F}_1$ erő ψ szöget zár be a $\vec{v}_0$ sebességvektorral, a mozgásbeli súrlódási tényező μ. (MPt. I. 4.25)

$$\vec{F}_1 = F_1\vec{e}_1; \quad \varphi = \psi = 30°; \quad \vec{v}_0 = 8\vec{e}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]; \quad m = 10\,[\mathrm{kg}]; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$$



(a) Határozza meg, hogy a tömegpont $\vec{a}$ gyorsulása hogyan függ F_1 értékétől!

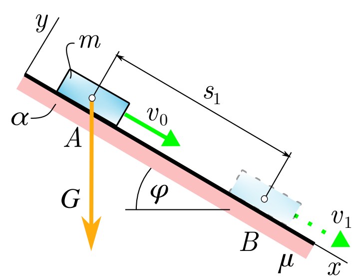
(b) Mekkora $F_1^{\max}$ erő esetén marad a tömegpont a lejtős pályán?

Megoldás: $a = -g(\sin\varphi + \mu\cos\varphi) + \frac{F_1}{m}(\cos\psi + \mu\sin\psi)$; $F_1^{\max} = 173\,[\mathrm{N}]$.

---

35 A vízszintessel φ szöget bezáró, tökéletesen simának tekintett lejtőn kezdősebesség nélkül csúszik le a $\vec{G}$ súlyú anyagi pont. (MPt. I. 4.30)

$$\varphi = 30°; \quad G = 600\,[\mathrm{N}]; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad s_1 = 40\,[\mathrm{m}]$$



(a) Mekkora a tömegpont E_1 kinetikai energiája és v_1 sebessége s_1 út megtétele után?

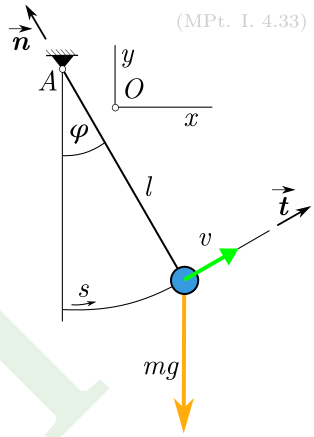
(b) Mennyi idő alatt teszi meg a tömegpont a kijelölt s_1 utat?

Megoldás: $E_1 = 12\,[\mathrm{kJ}]$; $v_1 = 20\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $t_1 = 4\,[\mathrm{s}]$.

---

36 Az A pontban felfüggesztett, l hosszúságú elhanyagolható tömegű nyújthatatlan fonál végére rögzített $m\vec{g}$ súlyú tömegpont pillanatnyi sebessége $\vec{v}$.

(MPt. I. 4.33)



$$\vec{v} = v\vec{t}; \quad l = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad \varphi = 30°;$$
$$m = 0,2\,[\mathrm{kg}]; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad v = 2\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$$

(a) Határozzuk meg számítással a tömegpont pillanatnyi a_n normális- és a_t pályagyorsulását!

(b) Számítsa ki az F_A fonálerőt!

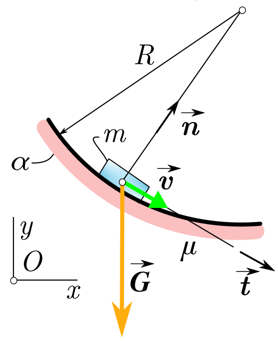
Megoldás: $a_n = 8\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}](\nwarrow)$; $a_t = 5\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}](\swarrow)$; $F_A = 3,\dot{3}\,[\mathrm{N}]$.

---

37 Az R sugarú körív alakú érdes kényszerpályán G súlyú tömegpont mozog, pillanatnyi sebessége $\vec{v}$.

(MPt. I. 4.34)

$$R = 2\,[\mathrm{m}]; \quad G = 60\,[\mathrm{N}]; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad \vec{v} = 2\vec{t}\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]; \quad \mu = 0,2;$$
$$\vec{t} = (0,8\vec{e}_x - 0,6\vec{e}_y)\,[-]; \quad \vec{n} = (0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y)\,[-]$$



(a) Számítsa ki a tömegpont $\vec{a}$ gyorsulását, valamint az $\vec{F}_\alpha = N_\alpha\vec{n} + S_\alpha\vec{t}$ kényszererőt!

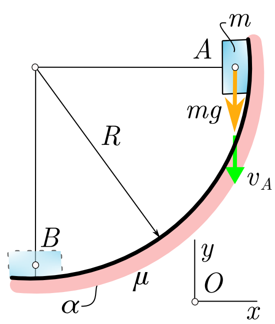
Megoldás: $\vec{a} = (2\vec{n} + 4\vec{t})\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{F}_\alpha = (60\vec{n} - 12\vec{t})\,[\mathrm{N}]$.

---

38 Az $m\vec{g}$ súlyú tömegpont R sugarú köríves sima kényszerpályán mozog. A tömegpont A pontbeli $\vec{v}_A$ sebessége ismert.

(MPt. I. 4.37)

$$m = 4\,[\mathrm{kg}]; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad R = 0,8\,[\mathrm{m}]; \quad v_A = 3\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$$



(a) Mekkora a tömegpont v_B sebessége a pálya legalacsonyabb B pontjában?

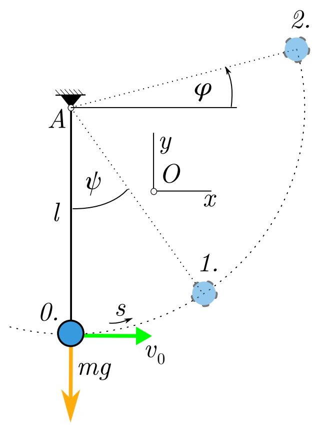
(b) Számítsa ki az A illetve a B pontra ható F_A illetve F_B kényszererőt!

Megoldás: $v_B = 5\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $F_A = 45\,[\mathrm{N}]$; $F_B = 165\,[\mathrm{N}]$.

---

39 Az elhanyagolható tömegű, tökéletesen hajlékonynak és nyújthatatlannak tekinthető fonál végére helyezett mg súlyú tömegpontot a pálya alsó helyzetéből v_0 kezdősebességgel indítjuk el.

(MPt. I. 4.38)



$$m = 3\,[\mathrm{kg}]; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad l = 1,4\,[\mathrm{m}]; \quad v_0 = 7\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$$

(a) Határozza meg, hogy az F_A kényszererő (fonálerő) hogyan függ a ψ-től!

(b) Mekkora lesz az F_A fonálerő, ha $\psi = 60°$?

(c) Milyen φ szöget zár be a fonál a vízszintessel, amikor a fonál kezd meglazulni?

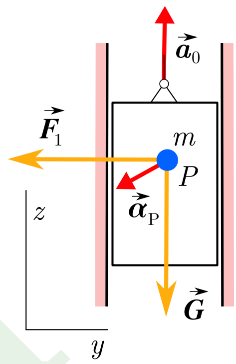
Megoldás: $F_A = m(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g\cos\psi)$; $F_A = 90\,[\mathrm{N}]$; $\varphi = 30$ $(F_A \equiv 0)$.

---

(40) A Földhöz képest függőleges $\vec{a}_0 = a_z\vec{e}_z$ gyorsulással mozgó felvonóban elhelyezkedő m tömegű P anyagi pontra $G = mg$ súlyerőn kívül még az $\vec{F}_1 = -F_1\vec{e}_y$ erő is hat. (MPt. I. 4.105)

A tömegpontnak a felvonóhoz viszonyított $\vec{\alpha}_P$ gyorsulása ismert.

$$m = 2\,[\mathrm{kg}]; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad \vec{\alpha}_\mathrm{P} = (-3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$$



(a) Adja meg a P anyagi pontra működő szállító gyorsulást!

(b) Mekkora a felvonó $\vec{a}_0$ gyorsulása?

(c) Határozza meg a tömegpontra ható $\vec{F}_1$ erőt!

Megoldás: $\vec{a}_{PSZ} = \vec{a}_0$; $\vec{a}_0 = -8\vec{e}_z\ [\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{F}_1 = -6\vec{e}_y$ [N].

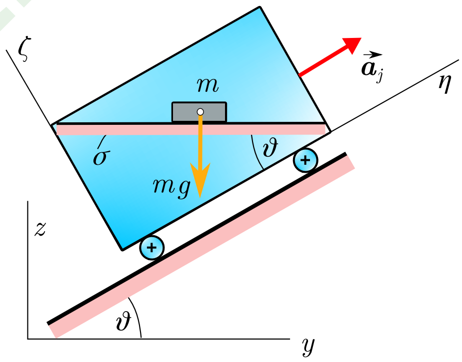
---

(41) A vízszintessel ϑ szöget bezáró lejtőn állandó $\vec{a}_j$ gyorsulással haladó mozgást végző járműben ugyancsak ϑ szöggel jellemezhető σ jelű kényszerpálya van kialakítva. Ezen μ a mozgásbeli és μ_0 a nyugvásbeli súrlódási tényező. (MPt. I. 4.106)

A $t = 0$ időpillanatban mind a járműnek a sebessége, mind a járműben kialakított kényszerpályára helyezett mg súlyú tömegpontnak a járműhöz viszonyított sebessége zérus.

$$\sin\vartheta = \frac{5}{13}; \quad \cos\vartheta = \frac{12}{13}; \quad m = 10\,[\mathrm{kg}];$$

$$g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad \vec{a}_j = (1,2\vec{e}_y + 0,5\vec{e}_z)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$$



(a) Ha $\mu = \mu_0 = 0$, számítsa ki az $\vec{\alpha}$ gyorsulást és az $\vec{F}_\sigma$ kényszererőt!

(b) Mekkora μ_0^{min} nyugvásbeli súrlódási tényező mellett maradhat a tömegpont a kényszerpályán relatív nyugalomban?

(c) Mekkora a tömegpont járműhöz viszonyított $\vec{\alpha}$ gyorsulása és a reá ható $\vec{F}_\sigma$ kényszererő, ha $\mu = 0,1$ és $\mu_0 = 0,11$?

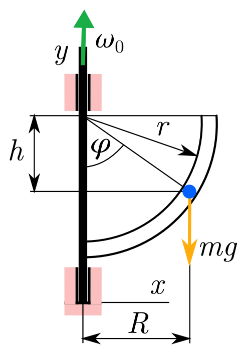
Megoldás: $\alpha = 1,2\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{F}_\sigma = 105\vec{e}_z$ [N]; $\mu_0^{\mathrm{min}} = 0,1143$; $\vec{\alpha}^{(c)} = -0,15\vec{e}_y\ [\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{F}_\sigma^{(c)} = (10,5\vec{e}_y + 105\vec{e}_z)$ [N].

---

(42) Az y tengely körül állandó ω_0 szögsebességgel forgó r sugarú körív középvonalú, sima csőben elhelyezkedő mg súlyú tömegpont a csőhöz képest pillanatnyi nyugalomban van. A tömegpont kezdeti helyzetét a y tengelytől mért R sugárral jellemezhetjük. (MPt. I. 4.109)

$$\omega_0 = 5\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}]; \quad r = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad G = 60\,[\mathrm{N}];$$

$$m = 6\,[\mathrm{kg}]; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad \mu_0 = 0$$



(a) Határozzuk meg, hogy mekkora $R = R_0$ sugár esetén maradhat a tömegpont a csőhöz képest tartós nyugalomban!

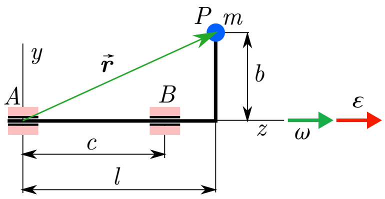
(b) Mekkora a csőhöz képest a tömegpont pillanatnyi $\vec{\alpha}$ gyorsulása, ha $R = 0,4\,[\mathrm{m}]$?

Megoldás: $R = 0,3\,[\mathrm{m}]$ (vagy $R \equiv 0$); $\vec{\alpha} = -2\vec{e}_t\ [\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$.

---

43 Az m tömegű anyagi pont elhanyagolható tömegű, forgó rúdhoz van rögzítve. A rúd pillanatnyi szögsebessége $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$, szöggyorsulása $\vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{e}_z$.

(MPt. I. 3.9)



(a) Határozza meg az $\vec{I}$ impulzust és annak a koordinátatengelyekre számított Π_x, Π_y és Π_z impulzus nyomatékait!

(b) Határozza meg a $\vec{K}$ kinetikai vektort és annak a koordinátatengelyekre számított kinetikai nyomatékait!

Megoldás: $\vec{I} = -mb\omega\vec{e}_x$; $\Pi_x = 0$; $\Pi_y = -mlb\omega$; $\Pi_z = mb^2\omega$; $\vec{K} = -mb\varepsilon\vec{e}_x - mb\omega^2\vec{e}_y$; $D_x = mlb\omega^2$; $D_y = -mlb\varepsilon$; $D_z = mb^2\varepsilon$.

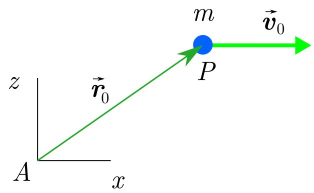
---

44 Az m tömegű anyagi pont $\vec{a} = -g\vec{e}_z$ gyorsulással mozog.

(MPt. I. 3.4)

A $t = 0$ időpontban helyvektora $\vec{r}_0$, sebessége $\vec{v}_0$.

$$m = 15\,[\mathrm{kg}]; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad \vec{v}_0 = 5\vec{e}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]; \quad \vec{r}_0 = (6\vec{e}_x + 4\vec{e}_z)\,[\mathrm{m}]$$



(a) Írja fel a tömegpont $\vec{I}$ impulzusát és az xyz KR A kezdőpontjára vonatkozó $\vec{\Pi}_A$ perdületét az idő függvényében!

(b) Számítsa ki a $t_1 = 2\,[\mathrm{s}]$ időpontban az $\vec{I}_1$ impulzust és a $\vec{\Pi}_{A1}$ perdület értékét!

Megoldás: $\vec{I}(t) = (75\vec{e}_x - 150t\vec{e}_z)$; $\vec{\Pi}_A(t) = (300 + 900t + 375t^2)\vec{e}_y$; $\vec{I}_1 = (75\vec{e}_x - 300\vec{e}_z)\,[\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\Pi}_{A1} = (3600\vec{e}_y)\,[\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}]$.

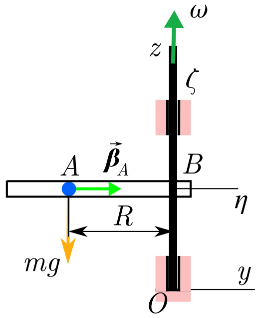
---

45 A tökéletesen simának feltételezett cső a B pontján átmenő, függőleges z tengely körül (a Földhöz képest) állandó ω szögsebességgel forog, s közben a csőben $G = mg$ súlyú tömegpont mozog. A vázolt helyzetben a tömegpont csőhöz viszonyított sebessége $\vec{\beta}_A$.

(MPt. I. 4.111)

Az xyz KR a Földhöz, a $\xi\eta\zeta$ KR a forgó csőhöz kötött.

$$\vec{\omega} = 8\vec{e}_z\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}]; \quad \vec{\beta}_A = 5\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]; \quad R = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad G = 50\,[\mathrm{N}]$$



(a) Határozza meg a vázolt helyzetben a csőről a tömegpontra ható $\vec{F}_A$ kényszererőt, és az $\vec{\alpha}_A$ gyorsulást!

(b) Mekkora a B pontban a tömegpont csőhöz viszonyított $\vec{\beta}_B$ sebessége?

(c) Számítsa ki azt a legkisebb $\vec{\beta}_A^{\min}$ sebességet, mellyel a tömegpontot indítva az már elmegy a B jelű pontig!

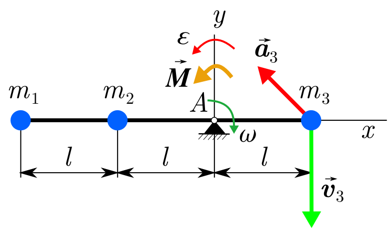
Megoldás: $\vec{F}_A = (-400\vec{e}_x + 50\vec{e}_z)\,[\mathrm{N}]$; $\vec{\alpha}_A = -32\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{\beta}_B = 3\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\beta}_A^{\min} = 4\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$.

---

(46) Adott az ábrán vázolt tömegpontrendszer. (MPt. I. 3.15)

$$m_1 = 16\,[\mathrm{kg}];\quad m_2 = 4\,[\mathrm{kg}];\quad m_3 = 8\,[\mathrm{kg}];\quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}];$$

$$\vec{v}_3 = -3\vec{e}_y\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];\quad \vec{a}_3 = (-6\vec{e}_x + 6\vec{e}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}];\quad l = 1,5\,[\mathrm{m}]$$



(a) Számítsa ki a tömegpontrendszer impulzusát és A pontra számított perdületét!

(b) Számítsuk ki az $\vec{F}_A$ támasztóerőt és az $\vec{M}$ hajtó nyomatékot!

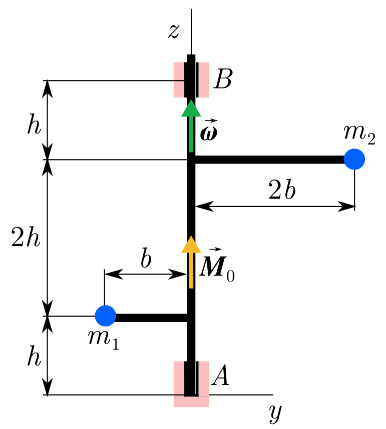
Megoldás: $\vec{I} = 84\vec{e}_y\,[\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $\vec{\Pi}_A = -342\vec{e}_z\,[\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}]$; $\vec{F}_A = (168\vec{e}_x + 112\vec{e}_y)\,[\mathrm{N}]$; $\vec{M} = 264\vec{e}_z\,[\mathrm{Nm}]$.

---

(47) Az m_1 és m_2 tömegpontokból és elhanyagolható tömegű rudakból álló merev rendszer a z tengely körül forog. A vázolt helyzetben a tömegpontok az yz síkban helyezkednek el, és $\vec{\omega}$ a rendszer pillanatnyi szögsebessége. A tengely felső végére ismert $\vec{M}_0$ nyomatékú erőpár hat. Az ellenállásoktól eltekintünk. (MPt. I. 4.83)

$$h = b = 0,1\,[\mathrm{m}];\quad m_1 = m_2 = 5\,[\mathrm{kg}];\quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}];$$

$$\vec{M}_0 = 0,75\,\vec{e}_z\,[\mathrm{Nm}];\quad \vec{\omega} = 2\vec{e}_z\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}]$$



(a) Számítsa ki a vázolt helyzetben a rendszer szöggyorsulását!

(b) Határozza meg a vázolt helyzetben az m_1 és m_2 tömegek gyorsulását!

(c) Mekkora a vázolt helyzetben a csapágyakat terhelő $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerő?

Megoldás: $\varepsilon = 3\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{a}_1 = (0,3\vec{e}_x + 0,4\vec{e}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{a}_2 = (-0,6\vec{e}_x - 0,8\vec{e}_y)\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$;
$\vec{F}_A = (0,375\vec{e}_x + 13\vec{e}_y + 100\vec{e}_z)\,[\mathrm{N}]$; $\vec{F}_B = (-1,875\vec{e}_x - 15\vec{e}_y)\,[\mathrm{N}]$.

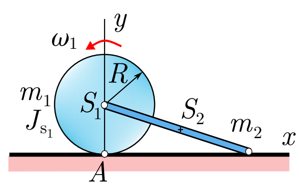
---

(48) Adott az ábrán vázolt, egymással kényszerkapcsolatban álló, merev testekből felépített összetett szerkezet. Az 1 jelű henger tisztán gördülve halad, míg a 2 jelű testet vontatja magával. (MPt. I. 3.52)

Adottak az ábrán jelzett mennyiségek.

$$m_1 = 2\,[\mathrm{kg}];\quad \omega_1 = 5\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}];\quad J_{s1} = 1,4\,[\mathrm{kgm}^2];$$

$$m_2 = 0,5\,[\mathrm{kg}];\quad R = 0,8\,[\mathrm{m}]$$



(a) Számítsa ki a két test kinetikai (mozgási) energiáját!

Megoldás: $E_1 = \frac{1}{2}J_a\omega_1^2 = 33,5\,[\mathrm{J}]$; $E_2 = \frac{1}{2}m_2R^2\omega_1^2 = 4\,[\mathrm{J}]$.

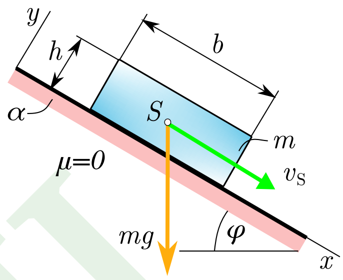
---

49 Az m tömegű hasábalakú merev test az α jelű sima lejtőn az mg súlyerő hatására haladó mozgást végez lefelé. A lejtő a vízszintessel φ szöget zár be.

(MPt. I. 4.51)

$$m = 200\,[\mathrm{kg}];\quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}];\quad b = 1,6\,[\mathrm{m}];$$

$$h = 1\,[\mathrm{m}];\quad \cos\varphi = 0,8;\quad \sin\varphi = 0,6$$



(a) Számítsa ki a test súlypontjának $\vec{\boldsymbol{a}}_S$ gyosulását!

(b) Határozza meg a támasztó ER $\vec{\boldsymbol{F}}_\alpha$ eredőjét, és centrális egyenesének döféspontját az x tengelyen!

(c) Döntse el, hogy a lejtő φ hajlásszögének növelésével bekövetkezhet-e a test felbillenése! Ha igen akkor mekkora φ_b szögnél?

Megoldás: $\vec{\boldsymbol{a}}_S = 6\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{F}}_\alpha = 1\,600\vec{\boldsymbol{e}}_y\,[\mathrm{N}]$; $x_{SD} = 0$; nem.

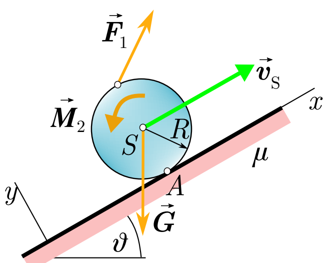
---

50 Az R sugarú, homogén merev korong ϑ hajlásszögű lejtőn gördül úgy, hogy súlypontjának sebessége a pillanatnyi helyzetben $\vec{\boldsymbol{v}}_S$.

(MPt. I. 3.61)

$$\vec{\boldsymbol{v}}_S = 2\vec{\boldsymbol{e}}_x\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}];\quad R = 0,5\,[\mathrm{m}];\quad \vartheta = 30°;\quad G = 100\,[\mathrm{N}];$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_1 = (60\vec{\boldsymbol{e}}_x + 20\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{N}];\quad \vec{\boldsymbol{M}}_2 = 20\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\mathrm{Nm}]$$



(a) Keresse meg a korong $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ szöggyorsulását és az $\vec{\boldsymbol{F}}_A$ támasztóerőt!

(b) Számítsa ki a vázolt helyzetben a testre ható $\vec{\boldsymbol{G}}$ súlyerő, $\vec{\boldsymbol{F}}_1$ erő és az $\vec{\boldsymbol{M}}_2$ erőpár P_G, P_{F_1} és P_{M_2} teljesítményét!

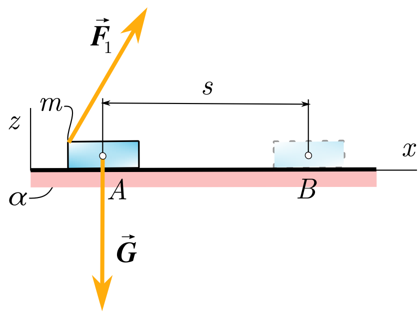
Megoldás: $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = -4\vec{\boldsymbol{e}}_z\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{F}}_A = (10\vec{\boldsymbol{e}}_x + 66,\dot{6}\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{N}]$; $P_G = -100\,[\mathrm{W}]$; $P_{F_1} = 240\,[\mathrm{W}]$; $P_{M_2} = -80\,[\mathrm{W}]$.

---

51 Számítsa ki a vázolt kényszerpályán haladó mozgást végző merev testre ható $\vec{\boldsymbol{G}}$ súlyerő W_G és az $\vec{\boldsymbol{F}}_1$ állandó erő W_{F_1} munkáját s út megtétele után!

(MPt. I. 3.60)

$$G = 120\,[\mathrm{N}];\quad \vec{\boldsymbol{F}}_1 = (6\vec{\boldsymbol{e}}_x + 8\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\mathrm{N}];\quad s = 3\,[\mathrm{m}]$$

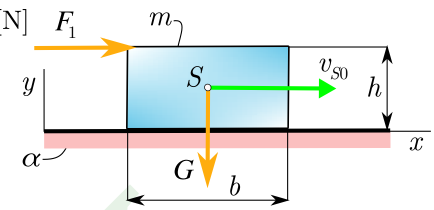


Megoldás: $W_G = 0$; $W_{F_1} = 18\,[\mathrm{J}]$.

---

52 Az α jelű, vízszintes, sima ($\mu = 0$) kényszerpályán a $t_0 = 0$ időpontban v_{S0} sebességgel haladó mozgást végző hasábra a G súlyerő és az xy síkban fekvő vízszintes F_1 erő hat. (MPt. I. 4.52)

$$v_{S0} = 3\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}];\quad b = 2\,[\text{m}];\quad h = 0,8\,[\text{m}];\quad G = 800\,[\text{N}];\quad F_1 = 200\,[\text{N}]$$



(a) Határozza meg a hasáb súlypontjának $\vec{a}_S$ gyorsulását, és $\vec{v}_S$ sebességét, mint az idő függvényét!

(b) Számítsa ki a támasztó ER $\vec{F}_\alpha$ eredőjét és centrális egyenesének az α síkkal való A döféspontját!

(c) Határozza meg annak a legnagyobb $F_1^{\max}$ erőnek az értékét, amellyel még nem következik be a test felbillenése!

(d) Ha $\mu = 0,2$, akkor miként változik az előző három pontra adott válasz?

Megoldás: $\vec{a}_S = 2,5\vec{e}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}] = \text{áll.}$; $\vec{v}_S = \vec{v}_{S0} + \vec{a}_{S0}t$; $\vec{F}_\alpha = 800\vec{e}_y\,[\text{N}]$; $x_{SA} = 0,1\,[\text{m}]$; $F_1^{\max} = 2\,000\,[\text{N}]$;
$\vec{a}_S^\mu = 0,5\vec{e}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}] = \text{áll.}$; $\vec{v}_S^\mu = \vec{v}_{S0} + \vec{a}_{S0}^\mu t$; $\vec{F}_\alpha^\mu = (-160\vec{e}_x + 800\vec{e}_y)\,[\text{N}]$; $x_{SA}^\mu = 0,18\,[\text{m}]$; $F_1^{\max\,\mu} = 1\,840\,[\text{N}]$.

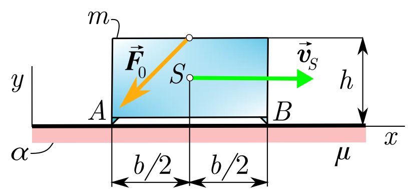
---

53 Hasábalakú m tömegű merev test alsó részének olyan a kialakítása, hogy az α jelű vízszintes síkkal csak két z tengellyel párhuzamos alkotó mentén érintkezik. (MPt. I. 4.53)

A z tengelyre merőleges súlyponti sík a test szimmetriasíkja, melyben F_0 erő (a *súlyerőt* is magába foglalja) valamint az A és B pont is benne van. A test haladó mozgást végez, súlypontjának pillanatnyi $\vec{v}_S$ sebessége ismert.

$$m = 800\,[\text{kg}];\quad b = 2\,[\text{m}];\quad h = 1\,[\text{m}];$$

$$\vec{F}_0 = (-4\vec{e}_x - 8\vec{e}_y)\,[\text{kN}];\quad \vec{v}_S = 2,5\vec{e}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$$



(a) Számítsa ki a súlypont $\vec{a}_S$ gyorsulását, valamint az $\vec{F}_A$ és $\vec{F}_B$ támasztóerőket, ha $\mu = 0$!

(b) Miként változnak az előző kérdés válaszai, ha $\mu = 0,5$?

Megoldás:

$\vec{a}_S = -5\vec{e}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$; $\vec{F}_A = 5\,000\vec{e}_y\,[\text{N}]$; $\vec{F}_B = 3\,000\vec{e}_y\,[\text{N}]$;
$\vec{a}_S^\mu = -10\vec{e}_x\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$; $\vec{F}_A^\mu = (-2\,000\vec{e}_x + 4\,000\vec{e}_y)\,[\text{N}]$; $\vec{F}_B^\mu = (-2\,000\vec{e}_x + 4\,000\vec{e}_y)\,[\text{N}]$.

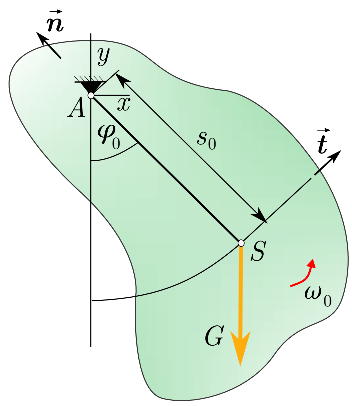
---

54 A G súlyú merev test (fizikai inga) S súlypontja $s_0 = \overline{AS}$ távolságra van az A ponton átmenő forgástengelytől. A φ_0 szöggel jellemzett helyzetben ω_0 a test szögsebessége. (MPt. I. 4.66)

A forgástengellyel párhuzamos s súlyponti tengely tehetlenségi főtengely, amelyre J_s a test tehetetlenségi nyomatéka.

$$G = 100\,[\text{N}];\quad g = 10\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}];\quad s_0 = 0,2\,[\text{m}];$$

$$\varphi_0 = 60^\circ;\quad \omega_0 = 4\,[\frac{\text{r}}{\text{s}}];\quad J_s = 0,15\,[\text{kgm}^2]$$



(a) Határozza meg a merev test súlypontjának $\vec{a}_S$ gyorsulását és az $\vec{F}_A$ támasztóerőt!

Megoldás: $\vec{a}_S = (-6,3\vec{t} + 3,2\vec{n})\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$; $\vec{F}_A = (23,6\vec{t} + 82\vec{n})\,[\text{N}]$.

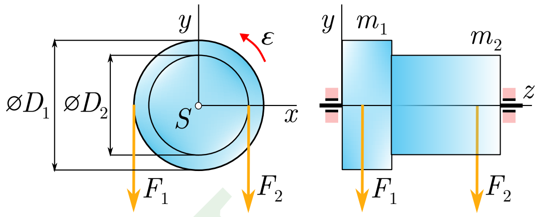
---

55 A z tengely körül forgó két összeerősített hengerből álló rendszerre ható $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ erő ismert, $\vec{\boldsymbol{F}}_1$ nagysága ismeretlen.

(MPt. I. 4.67)

$D_1 = 0,4\,[\mathrm{m}]$; $D_2 = 0,2\,[\mathrm{m}]$; $G_1 = 4\,[\mathrm{kN}]$;

$G_2 = 3\,[\mathrm{kN}]$; $g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $F_2 = 1,2\,[\mathrm{kN}]$



(a) Mekkora F_1^{ε} erő esetén foroghat a merev rendszer $\varepsilon = 5\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}^2}]$ állandó szöggyorsulssal?

(b) Mekkora F_1^{ω} erő esetén foroghat a rendszer állandó szögsebességgel?

Megoldás: $F_1^{\varepsilon} = 837,5\,[\mathrm{N}]$; $F_1^{\omega} = 600\,[\mathrm{N}]$.

---

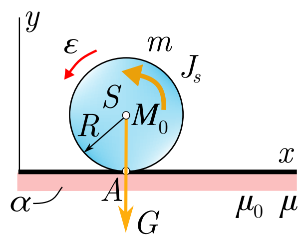
56 Az R sugarú, m tömegű kerékre ismert $\vec{\boldsymbol{M}}_0 = M_0\vec{\boldsymbol{e}}_z$ nyomatékú erőpár hat. A kerék tehetetlenségi nyomatéka a súlyponton átmenő tengellyel párhuzamos S tehetetlenségi főtengelyre J_S.

(MPt. I. 4.88)

A kerék az α jelű érdes síkon gördül, a μ_0 nyugvásbeli és a μ mozgásbeli súrlódási tényező adott.

$R = 0,3\,[\mathrm{m}]$; $m = 20\,[\mathrm{kg}]$; $g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $J_s = 1,2\,[\mathrm{kgm}^2]$;

$M_0 = 36\,[\mathrm{Nm}]$; $\mu_0 = 0,4$; $\mu = 0,3$



(a) Számítsa ki a kerék ε szöggyorsulását!

(b) Határozza meg az $\vec{\boldsymbol{F}}_A$ támasztóerőt!

(c) Mekkora lehet az $M_0^{\max}$ nyomaték legnagyobb értéke, hogy a kerék még ne csússzon meg?

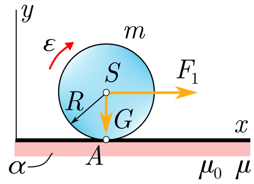
Megoldás: $\varepsilon = 12\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{F}}_A = (-72\vec{\boldsymbol{e}}_x + 200\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{N}]$; $M_0 = 40\,[\mathrm{Nm}]$.

---

57 Az R sugarú, m tömegű homogén merev körhenger a reá ható F_1 és $G = mg$ erők, valamint az $\vec{\boldsymbol{F}}_A$ kényszererő hatására az α jelű síkon gördül.

(MPt. I. 4.87)

$R = 0,4\,[\mathrm{m}]$; $G = 2\,000\,[\mathrm{N}]$; $g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $F_1 = 360\,[\mathrm{N}]$



(a) Határozza meg az S súlypont a_S gyorsulását!

(b) Számítsa ki az $\vec{\boldsymbol{F}}_A$ kényszererőt!

Megoldás: $a_S = 1,2\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $\vec{\boldsymbol{F}}_A = (-120\vec{\boldsymbol{e}}_x + 2000\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{N}]$.

---

58 A G súlyú, l hosszúságú prizmatikus rudat az A végén sima csukló a B végén pedig egy fonál segítségével a vízszintes helyzetben rögzítünk, majd a fonalat elvágjuk.

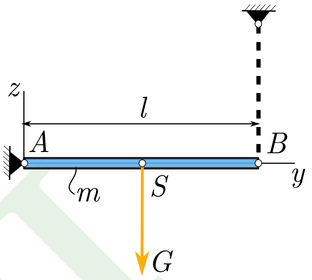
(MPt. I. 4.74)

$$G = 50\,[\mathrm{N}]; \quad g = 10\,[\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad l = 1,2\,[\mathrm{m}]$$

(a) Határozza meg az F_A^1 csuklóerőt az elvágás előtt!

(b) Számítsa ki az F_A^2 csuklóerőt, közvetlenül az elvágás után!

(c) Adja meg az F_A^3 csuklóerőt, a rúd függőleges helyzetében!



Megoldás: $F_A^1 = 25\,[\mathrm{N}]$; $F_A^2 = 12,5\,[\mathrm{N}]$; $F_A^3 = 125\,[\mathrm{N}]$.

---

59 A vízszintessel φ szöget bezáró érdes lejtőn a G súlyú, homogén hasáb a reá ható erők hatására v_S sebességgel (felfelé) elemi haladó mozgást végez.

(MPt. I. 4.55)

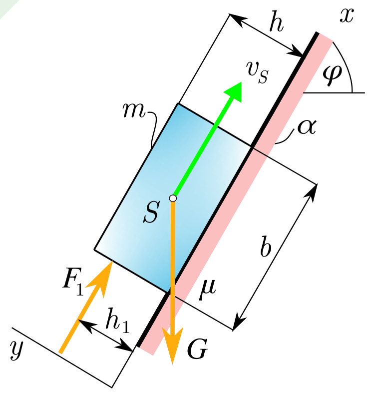
Az $\vec{\boldsymbol{F}}_1 = F_1\vec{\boldsymbol{e}}_x$ erő hatásvonala a z tengelyre merőleges szimmetriasíkban van.

$$\varphi = 60^\circ; \quad h = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad b = 1\,[\mathrm{m}]; \mu = 0,4; \quad G = 600\,[\mathrm{N}]$$

Feltételezve, hogy a test még nem billen fel határozza meg

(a) az F_1 erő értékét, ha $h_1 = 0,45\,[\mathrm{m}]$!

(b) a h_1 méret legkisebb ($h_1^{\min}$) és legnagyobb ($h_1^{\max}$) értékét, ha $F_1 = 1\,200\,[\mathrm{N}]$!



(c) Mekkora a súlypont a_S gyorsulása az (a) és a (b) pontokbeli határhelyzetekben, továbbá mekkora az $\vec{\boldsymbol{F}}_\alpha$ kényszererő és hol van ennek a támadáspontja?

Megoldás: $F_1^{\max} = 600\,[\mathrm{N}]$; $h_1^{\max} = 0,35\,[\mathrm{m}]$; $h_1^{\min} = 0,1\,[\mathrm{m}]$; $\vec{\boldsymbol{F}}_\alpha = (-120\vec{\boldsymbol{e}}_x + 300\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{N}]$; $a_S^{(a)} = -0,66\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $a_S^{(b)} = 9,34\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$.

---

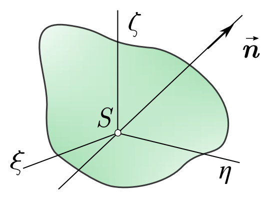
60 Ismeretes a merev test ξ, η és ζ súlyponti tehetetlenségi főtengelyeire számított J_ξ, J_η és J_ζ tehetetlenségi nyomaték, továbbá az n tengely $\vec{\boldsymbol{n}}$ egységvektora.

(MPt. III. 1.1)

$$J_\xi = 5\,[\mathrm{kgm}^2]; \quad J_\eta = 4\,[\mathrm{kgm}^2]; \quad J_\zeta = 2\,[\mathrm{kgm}^2]; \quad \vec{\boldsymbol{n}} = (-0,6\vec{\boldsymbol{e}}_\xi + 0,8\vec{\boldsymbol{e}}_\zeta)\,[-]$$

(a) Írja fel az S súlypontra vonatkozó tehetetlenségi tenzor $[\,\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}\,]_S$ mátrixát!

(b) Adja meg a ξ tengelyhez tartozó $\vec{\boldsymbol{J}}_\xi$ tehetetlenségi nyomatékvektort, majd a $\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}_S$ tenzort diadikus alakban!



(c) Számítsuk ki az n tengelyhez tartozó $\vec{\boldsymbol{J}}_n$ tehetetlenségi nyomatékvektort, és az n tengelyre számított J_n tehetetlenségi nyomatékot!

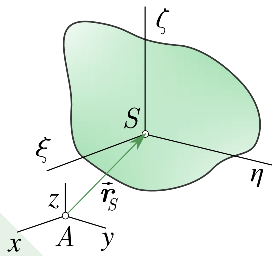
Megoldás:
$[\,\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}\,]_S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\,[\mathrm{kgm}^2]$; $\vec{\boldsymbol{J}}_\xi = 5\vec{\boldsymbol{e}}_\xi\,[\mathrm{kgm}^2]$; $\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}_n = \vec{\boldsymbol{J}}_\xi \circ \vec{\boldsymbol{e}}_\xi + \vec{\boldsymbol{J}}_\eta \circ \vec{\boldsymbol{e}}_\eta + \vec{\boldsymbol{J}}_\zeta \circ \vec{\boldsymbol{e}}_\zeta$; $\vec{\boldsymbol{J}}_n = (-3\vec{\boldsymbol{e}}_\xi + 1,6\vec{\boldsymbol{e}}_\zeta)\,[\mathrm{kgm}^2]$; $J_n = 3,08\,[\mathrm{kgm}^2]$.

---

61 Adott a merev test S súlypontjára vonatkozó tehetlenségi tenzorának $\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}_S$ mátrixa a súlypont $\vec{\boldsymbol{r}}_S = \vec{\boldsymbol{r}}_{AS}$ helyvektora és a test m tömege.

(MPt. III. 1.2)

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}]_S = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 30 \end{bmatrix} [\mathrm{kgm}^2]; \quad \vec{\boldsymbol{r}}_S = (0,4\vec{\boldsymbol{e}}_y + 0,3\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\mathrm{m}]; \quad m = 1000\,[\mathrm{kg}]$$



(a) Írjuk fel az η és az x tengelyekre vonatkozó J_η és J_x; továbbá az $\eta\zeta$, $\zeta\xi$ síkpárra vonatkozó $J_{\xi\eta}$; valamint az A pontra vonatkozó J_A tehetetlenségi nyomatékok értelmezését!

(b) Számítsa ki az A pontra vonatkozó tehetetlenségi tenzor $\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}_A$ mátrixát!

(c) Írja fel az y tengelyhez tartozó $\vec{\boldsymbol{J}}_y$ tehetetlenségi vektort, majd az A pontra vonatkozó $\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}_A$ tehetetlenségi tenzor diadikus alakját!

Megoldás:
$J_\eta = \int\limits_{(m)} (\xi^2 + \zeta^2)\,\mathrm{d}m$; $J_x = \int\limits_{(m)} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m$; $J_{\xi\eta} = \int\limits_{(m)} (\xi\eta)\,\mathrm{d}m$; $J_A = \int\limits_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m$; $\vec{\boldsymbol{J}}_y = (100\vec{\boldsymbol{e}}_y - 120\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\mathrm{kgm}^2]$;

$[\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}]_A = \begin{bmatrix} 270 & 0 & 10 \\ 0 & 100 & -120 \\ 10 & -120 & 190 \end{bmatrix} [\mathrm{kgm}^2]$; $\underline{\underline{\boldsymbol{J}}}_A = \{(270\vec{\boldsymbol{e}}_x + 10\vec{\boldsymbol{e}}_z) \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + (100\vec{\boldsymbol{e}}_y - 120\vec{\boldsymbol{e}}_z) \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y + (10\vec{\boldsymbol{e}}_x - 120\vec{\boldsymbol{e}}_y + 190\vec{\boldsymbol{e}}_z) \circ \vec{\boldsymbol{e}}_z\}\ [\mathrm{kgm}^2]$.

---

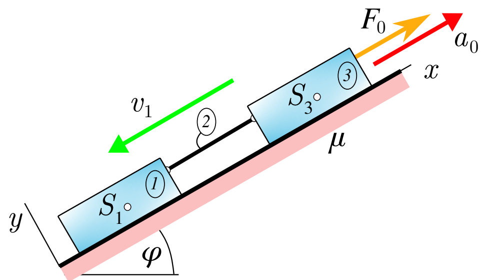
62 Az 1 és 3 jelű súlyos testekből és az azokat összekötő 2 jelű súlytalan rúdból álló rendszert állandó a_0 gyorsulással bocsátjuk le az α jelű érdes lejtőn.

(MPt. III. 4.2)

A súrlódási tényező mindkét testre nézve ugyanaz. A rendszer kezdősebessége v_1.

$$m_1 = 2\,000\,[\mathrm{kg}]; \quad m_3 = 1\,000\,[\mathrm{kg}]; \quad a_0 = 1,5\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$$

$$v_1 = 3\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]; \quad \varphi = 30^\circ; \quad \mu = 0,1$$



(a) Számítsa ki a gyorsulás biztosításához szükséges F_0 erőt!

(b) Számítsa ki az összetett szerkezetre működő összes külső és belső erőt!

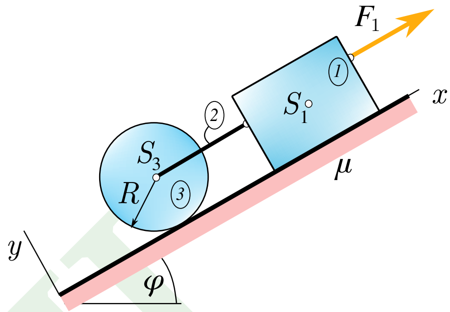
(c) Határozza meg azt a $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ elmozdulást, amely után a szerkezet megáll!

Megoldás: $F_0 = 16,9\,[\mathrm{kN}]$; $F_{21} = 11,27\,[\mathrm{kN}]$; $\vec{\boldsymbol{F}}_{\alpha 1} = (\sqrt{3}\vec{\boldsymbol{e}}_x + 10\sqrt{3}\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{kN}]$; $\vec{\boldsymbol{F}}_{\alpha 2} = (\sqrt{3}/2\vec{\boldsymbol{e}}_x + 5\sqrt{3}\vec{\boldsymbol{e}}_y)\,[\mathrm{kN}]$; $\Delta r = 3\,[\mathrm{m}] \swarrow$.

---

63 Az 1 jelű súlyos testből, a 3 jelű súlyos gördülő korongból és a 2 jelű súlytalan összekötő rúdból álló összetett szerkezetet érdes lejtőn felfelé vontatjuk.

(MPt. III. 4.8)



$$G_1 = 600\,[\mathrm{N}];\quad G_3 = 800\,[\mathrm{N}];\quad R = 0,5\,[\mathrm{m}];$$
$$\mu = 0,1;\quad \varphi = 30^\circ;\quad F_1 = 1\,600\,[\mathrm{N}]$$

(a) Határozzuk meg mekkora az 1 jelű test S_1 súlypontjának a_{S1} gyorsulása!

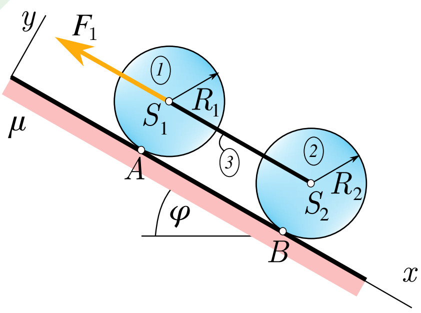
(b) Számítsa ki a szerkezetre ható összes külső és belső erőt!

Megoldás:
$a_S = 4,71\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $F_{23} = 965,2\,[\mathrm{N}]$; $\vec{F}_A = (-188,45\vec{e}_x + 692,8\vec{e}_y)\,[\mathrm{N}]$; $\vec{F}_{\alpha 1} = (-51,9\vec{e}_x + 519,6\vec{e}_y)\,[\mathrm{N}]$.

---

64 A két súlyos korongból és az azokat összekötő súlytalan rúdból álló szerkezetet F_1 erővel lejtőn vontatjuk felfelé. Az ellenállások elhanyagolhatók. Feltételezzük, hogy a korongok gördülnek.

(MPt. III. 4.11)



$$m_1 = 800\,[\mathrm{kg}];\quad m_2 = 300\,[\mathrm{kg}];\quad \varphi = 10^\circ;$$
$$\vec{F}_1 = -6\vec{e}_x\,[\mathrm{kN}];\quad R_1 = R_2 = 0,4\,[\mathrm{m}]$$

(a) Számítsa ki a hengerek súlypontjának sebességét az indulástól számított $s = 30\,[\mathrm{m}]$ út után!

(b) Határozza meg az összekötő rudat terhelő F_{13} erő értékét!

(c) Adja meg a hengerekre ható kényszererőket és a gördülés biztosításához szükséges $\mu_0^{\min}$ nyugvásbeli súrlódási tényezőt!

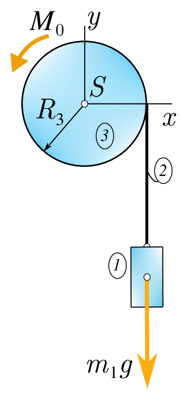
Megoldás: $v = 12,19\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$; $F_{13} = 1\,636\,[\mathrm{N}]\,\nwarrow$; $\vec{F}_A = (991,6\vec{e}_x + 7\,878,46\vec{e}_y)\,[\mathrm{N}]$; $\vec{F}_B = (371,85\vec{e}_x + 2\,954,4\vec{e}_y)\,[\mathrm{N}]$; $\mu_0^{\min} = 0,1259$.

---

65 Az 1 jelű testet a 3 jelű kötéldobra felcsavart 2 jelű kötél segítségével emeljük.

A kötéldob tengelyére állandó M_0 nyomaték hat. A teher sebessége a vizsgáltat kezdetén v_0. A dob tehetetlenségi nyomatéka J_s.

(MPt. III. 4.19)



$$M_0 = 150\,[\mathrm{Nm}];\quad J_s = 200\,[\mathrm{kgm}^2];\quad R_3 = 0,5\,[\mathrm{m}];$$
$$m_1 = 200\,[\mathrm{kg}];\quad v_0 = 4\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$$

(a) Határozza meg $t_1 = 2\,[\mathrm{s}]$ múlva a teher v_1 sebességét!

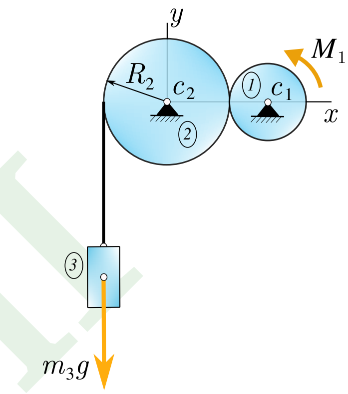
Megoldás: $v_1 = 0,6\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]\uparrow$.

---

66 Az 1 és 2 jelű homogén körhengerek a c_1 és c_2 tengelyek körül ellenállás nélkül foroghatnak. A két test legördül egymáson, a közöttük fellépő belső erő hatásvonala a függőlegessel α szöget zár be. A 3 jelű test a 2 jelű hengerhez súlytalan, nyújthatatlan, tökéletesen hajlékony kötél segítségével csatlakozik. A 3 jelű test előírt gyorsulása a_{S3}.
(MPt. III. 4.21)

$$m_1 = 50\,[\text{kg}]; \quad m_2 = 100\,[\text{kg}]; \quad m_3 = 30\,[\text{kg}];$$

$$R_1 = 0,5\,[\text{m}]; \quad R_2 = 1\,[\text{m}]; \quad \text{tg}\alpha = 0,4; \quad a_{S3} = 2\,[\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}]$$



(a) Mekkora az M_1 emelőnyomaték?

(b) Álló helyzetből indulva mennyi t_3 idő és mekkora h_3 magasság után éri el a 3 jelű test a $v_3 = 10\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$ sebességet?

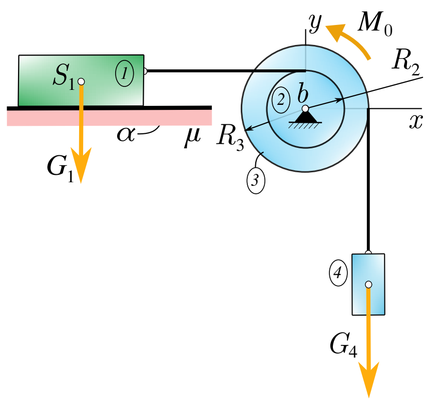
(c) Határozzuk meg az $\vec{F}_{21}$ belső erőt!

Megoldás: $M_1 = 255\,[\text{Nm}]$; $t_3 = 5\,[\text{s}]$; $h_3 = 25\,[\text{m}]$; $\vec{F}_{21} = (184\vec{e}_x + 460\vec{e}_y)\,[\text{N}]$.

---

67 Az 1, 4 jelű súlyos testekből és a 2, 3 jelű súlyos tárcsákból álló összetett szerkezetben az 1, 4 hasábok haladó, a 2, 3 tarcsák álló tengely körüli forgó mozgást végeznek. Az 1 jelű testet a 2 jelű tárcsához a 4 jelű testet a 3 jelű tárcsához kötél kapcsolja.
(MPt. III. 4.27)

Feltételezzük, hogy a kötél nyújhatatlan és tökéletesen hajlékony, a tárcsán nem csúszik meg. A b tengely körül forgó részek a tengelyre számított másodrendű nyomatéka J_b.



$$m_1 = 200\,[\text{kg}]; \quad J_b = 26\,[\text{kgm}^2]; \quad \mu = 0,2;$$

$$R_2 = 0,2\,[\text{m}]; \quad R_3 = 0,4\,[\text{m}]; \quad m_4 = 200\,[\text{kg}]$$

(a) Határozza meg, hogy mekkora M_0 nyomaték szükséges a 4 jelű test állandó sebességű mozgatásához!

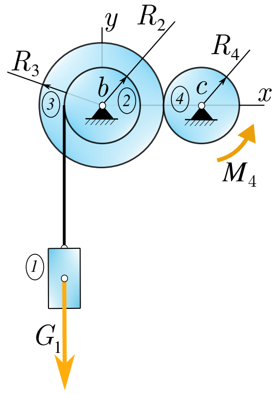
(b) Legyen $M_0 = 390\,[\text{Nm}]$, és ezzel számítsa ki az a_{S4} gyorsulást, és az F_{21} és az F_{34} kötélerőket!

Megoldás: $M_0 = 720\,[\text{Nm}]$; $a_{S4} = 2\,[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]\downarrow$; $F_{21} = 600\,[\text{N}]$; $F_{34} = 1\,600\,[\text{N}]$.

---

68 Emelőszerkezet modelljében a 2, 3 jelű homogén tárcsák a b tengely körül, a 4 jelű tárcsa a c tengely körül ellenállás nélkül forog.
(MPt. III. 4.22)

A 2 jelű koronghoz az 1 jelű testet súlytalan, nyújthatatlan és tökéletesen hajlékony kötél kapcsolja.



$$m_1 = 1\,000\,[\text{kg}]; \quad m_2 = 500\,[\text{kg}]; \quad m_3 = 1\,000\,[\text{kg}]; \quad m_4 = 375\,[\text{kg}];$$

$$R_2 = 0,4\,[\text{m}]; \quad R_3 = 0,8\,[\text{m}]; \quad R_4 = 0,4\,[\text{m}]; \quad M_4 = 2\,480\,[\text{Nm}]$$

(a) Határozza meg a 2 jelű tárcsa ε_2 szöggyorsulását!

(b) Számítsuk ki a kötélben fellépő F_{21} kötélerőt!

Megoldás: $\varepsilon_2 = 1,5\,[\frac{\text{r}}{\text{s}^2}]$; $F_{21} = 10,6\,[\text{N}]$.

---

69 A két súlyos tárcsából és m_1 tömegből álló rendszer 2 jelű tárcsáját az S_2 súlypontban felfüggesztjük. A tárcsa kerületén átvetett kötéllel összekapcsoljuk az 1 jelű testet és a 3 jelű súlyos tárcsa S_3 súlypontját. Feltételezzük, hogy a 3 jelű tárcsa a φ hajlásszögű lejtőn gördül, az összekötő kötél súlytalan, nyújthatatlan és tökéletesen hajlékony, a tárcsa nem csúszik meg.

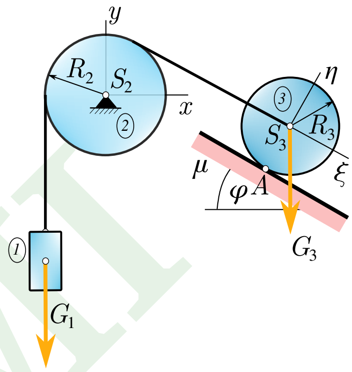
(MPt. III. 4.26)

$$m_1 = 50\,[\mathrm{kg}]; \quad m_2 = 200\,[\mathrm{kg}]; \quad m_3 = 200\,[\mathrm{kg}];$$
$$R_2 = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad R_3 = 0,4\,[\mathrm{m}]; \quad \varphi = 30^\circ$$

(a) Számítsa ki az 1 jelű súly a_{S1} gyorsulását!

(b) Határozza meg az F_{21} kötélerőt!

(c) Adja meg a mozgásban résztvevő 3 jelű testre működő $\vec{\boldsymbol{F}}_A$ kényszererőt!



Megoldás: $a_{S1} = 1,\dot{1}\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$; $F_{21} = 555,\dot{5}\,[\mathrm{N}]$; $\vec{\boldsymbol{F}}_A = (-111,\dot{1}\vec{\boldsymbol{e}}_\xi + 1\,732,05\vec{\boldsymbol{e}}_\eta)\,[\mathrm{N}]$.

---

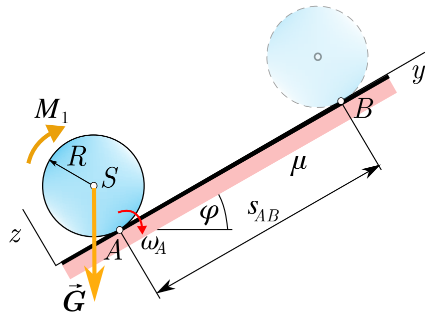
70 Az R sugarú, G súlyú homogén körhenger a reá ható M_1 nyomatékú erőpár hatására vázolt érdes lejtőn felfelé gördül. A gördülő ellenállás f karja adott.

(MPt. III. 4.96)

$$M_1 = 59\,[\mathrm{Nm}]; \quad g = 10\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]; \quad f = 5\,[\mathrm{mm}];$$
$$\mu = 0,4; \quad \mu_0 = 0,5; \quad s_{AB} = 3,9\,[\mathrm{m}];$$
$$R = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad \vec{\boldsymbol{G}} = (-100\vec{\boldsymbol{e}}_y - 240\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\mathrm{N}]$$

(a) Számítsa ki az ε szöggyorsulást, és az $\vec{\boldsymbol{F}}_\alpha$ kényszererőt!

(b) Döntse el, hogy megcsúszik-e a körhenger az adott M_1 terhelésre!



(c) Mekkora ω_A szögsebességgel indult a körhenger, ha s_{AB} út megtétele után $\omega_B = 4,9\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}]$ a szögsebessége?

Megoldás: $\varepsilon = 0,8\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}^2}]\curvearrowright$; $\vec{\boldsymbol{F}}_\alpha = (110,4\vec{\boldsymbol{e}}_y + 240\vec{\boldsymbol{e}}_z)\,[\mathrm{N}]$; nem csúszik meg; $\omega_A = 3,396\,[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}]$.

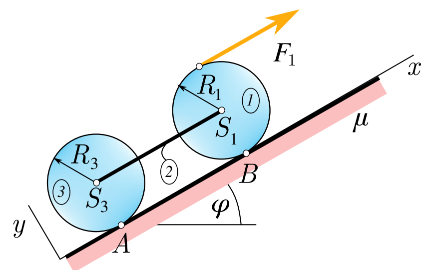
---

71 A két súlyos korongból és az azokat összekötő súlytalan rúdból álló szerkezetet F_1 erővel lejtőn vontatjuk felfelé. A csapsúrlódást és a gördülő ellenállást elhanyagoljuk. A lejtő érdes, a korongok tisztán gördülnek. A korongok súlypontjának gyorsulása a_0.

(MPt. III. 4.10)

$$m_1 = 600\,[\mathrm{kg}]; \quad m_3 = 400\,[\mathrm{kg}]; \quad \varphi = 30^\circ;$$
$$R_1 = R_3 = 0,4\,[\mathrm{m}]; \quad a_0 = 0,2\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$$

(a) Határozza meg az F_1 vontató erőt és az összekötő rudat terhelő F_{12} erőt!



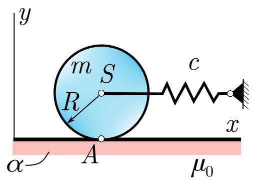
Megoldás: $F_1 = 2\,650\,[\mathrm{N}]$; $F_{12} = 2\,120\,[\mathrm{N}]\nearrow$.

---

(72) Az ábrán vázolt R sugarú, m tömegű, homogén korong az érdes síkon csúszás nélkül gördülhet.

(MPt. III. 5.4)

Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!



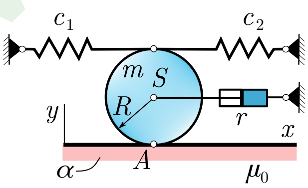
Megoldás: $\frac{3}{2}m\ddot{x} + \frac{x}{c} = 0$; vagy $J_a\ddot{\varphi} + \frac{R^2}{c}\varphi = 0$.

---

(73) Az R sugarú, m tömegű, homogén korong csúszás nélkül gördülhet.

(MPt. III. 5.8)

Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!



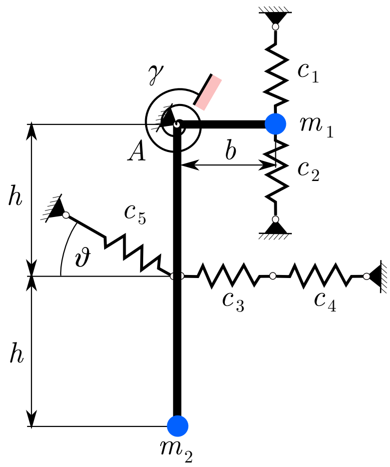
Megoldás: $J_a\ddot{\varphi} + rR^2\dot{\varphi} + 4R^2\varphi(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}) = 0$.

---

(74) A b illetve a $2h$ hosszúságú, súlytalan, merev rúdakból és m_1, m_2 tömegpontokból álló szerkezet az A ponti csukló körül foroghat.

(MPt. III. 5.7)

Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!

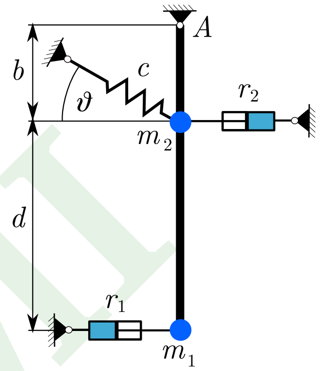


Megoldás: $(m_1b^2 + 4m_2h^2)\ddot{\varphi} + \left[\frac{1}{\gamma} + b^2(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}) + h^2(\frac{1}{c_3+c_4} + \frac{\cos^2\vartheta}{c_5})\right]\varphi = 0$.

---

75 Az ábrán vázolt $(b+d)$ hosszúságú súlytalan merev rúd az A ponti csukló körül szabadon foroghat.

(MPt. III. 5.9)



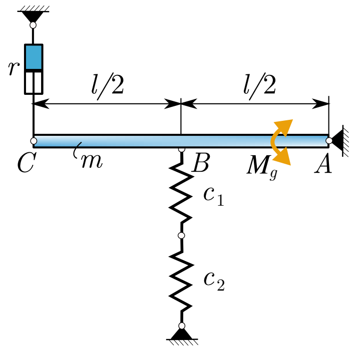
Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!

Megoldás: $[m_1(b+d)^2 + m_2 b^2]\ddot{\varphi} + [r_1(b+d)^2 + r_2 b^2]\dot{\varphi} + \frac{b^2\cos^2\vartheta}{c}\varphi = 0$.

---

76 Az l hosszúságú, m tömegű, homogén, merev rúd az A ponti csukló körül foroghat.

(MPt. III. 5.17)



Írja fel a rendszer kis rezgéseinek mozgásegyenletét!

Megoldás: $J_a\ddot{\varphi} + rl^2\dot{\varphi} + \frac{l^2}{4}\frac{1}{c_1+c_2}\varphi = M_g$.
