

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Szilárdságtan

(Oktatási segédlet a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére)

KÉSZÍTETTE:

Nándori Frigyes, Szirbik Sándor

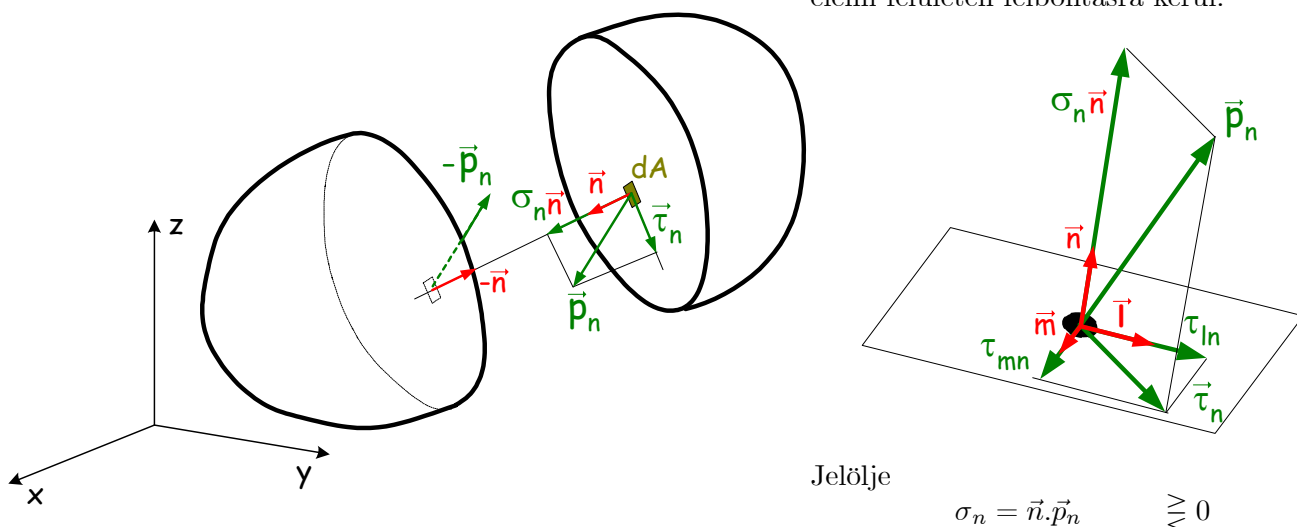
Ezen kézirat a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére készült kivonatos anyag. A tárgy elsajátítását segítő anyagok találhatóak a <http://www.mech.uni-miskolc.hu> URL-címen!

A szilárdságtan feladata a szilárd test kvázistatikus (lassú) terhelésekre adott válaszainak vizsgálata. Test anyagát tekintjük **homogénnek** (egynemű) és **izotrópnak** (tulajdonságai iránytól függetlenek) és **lineárisan rugalmasnak**, továbbá terhelés hatására a test kis (a test méreteihez képest kicsi) deformációt (kis elmozdulást) és kis alakváltozást ($\ll 1$) szenved, így szilárdságtani jellemzői köthetők a terhelés előtti geometriához.

Feszültség

A **feszültségi állapot** vizsgálatok a részekre bontott test egyensúlyát vesszük szemügyre. Az \vec{n} normálisú belső határoló felület mentén megoszló erőrendszer (belső erőrendszer) \vec{p}_n sűrűségvektorát a továbbiakban **feszültségvektornak** nevezzük.

A \vec{p}_n feszültségvektor egy \vec{n} normálisú dA elemi felületen felbontásra kerül:



Jelölje

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{p}_n \quad \geq 0$$

a normálfeszültséget, továbbá

$$\vec{\tau}_n = \vec{p}_n - \sigma_n \vec{n}$$

a nyírófeszültség-vektort. Az \vec{n} normálisú dA felületelem síkjába eső $\vec{\tau}_n$ vektor \vec{m} és \vec{l} irányú összetevői lesznek a

$$\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n \quad \text{és} \quad \tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n$$

nyírófeszültségek.

Egy P pont elemi környezetének feszültségállapotát az e pontra illeszkedő elemi felületeken ható feszültségvektorok összesége adja. Egy \vec{p}_n feszültségvektor bizonyíthatóan az \vec{n} normálvektor $\vec{p}_n = \underline{\underline{T}}_P \cdot \vec{n}$ alakú függvénye.

Elemi környezetként értelmezett P középpontú, koordináta-tengelyekkel párhuzamos, dx , dy és dz oldalhosszúságú kockán (elemi kockán) szemléltetjük a pozitív előjellel vett feszültségeket:

A feszültségeket foglaljuk a $\underline{\underline{T}}_P$ **feszültségtenzorba**:

$$\underline{\underline{T}}_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

A feszültségek mértékegysége a

$$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \left(1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1 \text{MPa}\right).$$

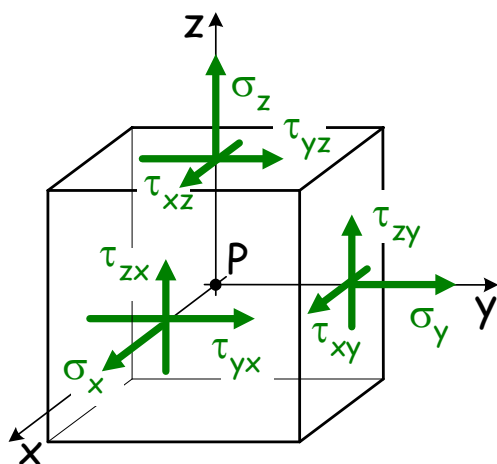
A feszültségtenzor ismeretében egy az \vec{n} által kijelölt irányba vett normálfeszültség a

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{p}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}}_P \cdot \vec{n}$$

módon, az \vec{n} által kijelölt síkon \vec{m} irányba vett nyírófeszültség pedig a

$$\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \underline{\underline{T}}_P \cdot \vec{n}$$

módon számítható ki.



A P középpontú elemi kocka yz síkjába eső feszültségeket mutatja az ábra. Az x tengelyre vett nyomatékból

$$M_p \stackrel{(+)}{=} 0$$

$$2\frac{dz}{2}\tau_{yz}dxdy - 2\frac{dy}{2}\tau_{zy}dxdz = 0$$

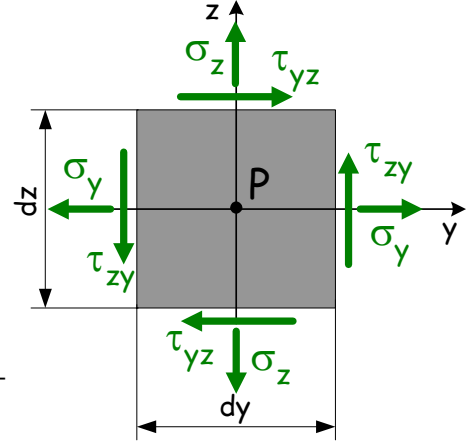
következik, hogy

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Ezt a másik két koordinátasíkra is elvégezve arra jutunk, hogy

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \text{és} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

A feszültségtenzor mellékátlóiában álló feszültségek tehát megegyeznek, azaz $\underline{\underline{T}}_P$ feszültségtenzor szimmetrikus tenzor.



Bizonyíthatóan léteznek egymásra kölcsönösen merőleges $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ egységvektorok által jelölt irányok (**főirányok**), mely irányokban a $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ jelű **főfeszültségek** értelmezettek, míg az egységvektorok, mint normálisok által kijelölt síkokon a τ nyírófeszültségek mindig eltűnnek. Ez a $\underline{\underline{T}}_P \vec{e}_i = \sigma_i \vec{e}_i$ sajátérték-probléma.

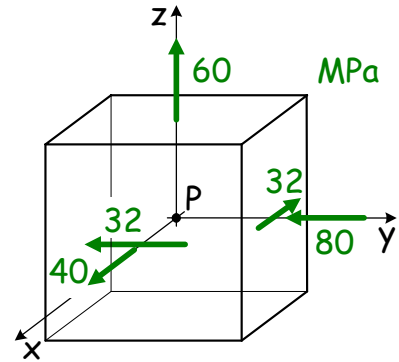
1. példa: Szemléltessük elemi kockán a P pontban ismert $\underline{\underline{T}}_P$ feszültségtenzort, majd határozzuk meg az egymásra kölcsönösen merőleges

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{17}}(\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \quad \text{és} \quad \vec{m} = \frac{1}{\sqrt{17}}(4\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

egységvektorok által kijelölt irányokhoz tartozó σ_n és σ_m normálfeszültségeket, valamint τ_{mn} nyírófeszültséget!

Szemléltetés során a feszültségek előjelét az őket szimbolizáló nyilak irányítása jelöli. A $\underline{\underline{T}}_P$ tenzorban álló $\tau_{yx} = -32$ MPa esetén a neki megfelelő x normálisú oldallapon y irányba mutató nyíl a negatív előjel miatt most jobbról balra mutat.

$$\underline{\underline{T}}_P = \begin{bmatrix} 40 & -32 & 0 \\ -32 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



A korábbiak alapján számítható a

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}}_P \cdot \vec{n} = \frac{1}{17} \left\{ [1 \ 4 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 40 & -32 & 0 \\ -32 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{17} \{ 1 \cdot [1 \cdot 40 + 4 \cdot (-32)] + 4 \cdot [1 \cdot (-32) + 4 \cdot (-80)] + 0 \} = \frac{-88 - 1408}{17} = -88 \text{ MPa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \vec{m} \cdot \underline{\underline{T}}_P \cdot \vec{m} = \frac{1}{17} \left\{ [4 \ -1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 40 & -32 & 0 \\ -32 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{17} \{ 4 \cdot [4 \cdot 40 + (-1) \cdot (-32)] + (-1) \cdot [4 \cdot (-32) + (-1) \cdot (-80)] + 0 \} = \frac{768 + 48}{17} = 48 \text{ MPa} \end{aligned}$$

normálfeszültség és a

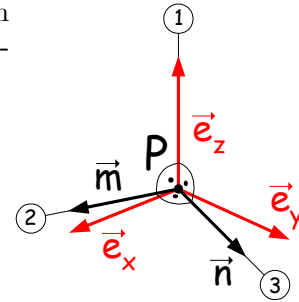
$$\begin{aligned} \tau_{mn} &= \vec{m} \cdot \underline{\underline{T}}_P \cdot \vec{n} = \frac{1}{17} \left\{ [4 \ -1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 40 & -32 & 0 \\ -32 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{17} \{ 4 \cdot [1 \cdot 40 + 4 \cdot (-32)] + (-1) \cdot [1 \cdot (-32) + 4 \cdot (-80)] + 0 \} = \frac{-352 + 352}{17} = 0 \end{aligned}$$

nyírófeszültség.

A tenzor elemi kockán történő szemléltetése jól mutatja azt, hogy a z normálisú lapon nem jelennek meg nyírófeszültségek, ezért a z irány főirányt jelöl, továbbá σ_z lesz az egyik főfeszültség. A főirányok egymásra merőlegesek, így az xy síkban keresendő másik két főirány. A feladatban kijelölt \vec{n} és \vec{m} vektorok esetén $\tau_{mn} = 0$ adódik, ezért \vec{n} és \vec{m} egységvektorok jelölik ki a másik két főirányt.

A három főfeszültséget, valamint a hozzájuk tartozó főirányokat a

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_z = 60 \text{ MPa} & \vec{e}_1 &= \vec{e}_z \\ \sigma_2 &= \sigma_m = 48 \text{ MPa} & \vec{e}_2 &= \vec{m} \\ \sigma_3 &= \sigma_n = -88 \text{ MPa} & \vec{e}_3 &= \vec{n} \end{aligned}$$



módon növekvő sorrendben szokás megadni.

2. példa: Egy szilárd test P pontjában a $\underline{\underline{T}}_P$ feszültségtenzor az alábbi alakban ismert:

$$\underline{\underline{T}}_P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Keressük meg a $\underline{\underline{T}}_P$ tenzorhoz tartozó főfeszültségeket és főirányokat!

Vegyük észre, hogy a második oszlopban álló mindkét nyírófeszültség zérus, így \vec{e}_y jelöli ki az egyik főirányt, míg a $\sigma_y = 4$ MPa normálfeszültség az ebben az irányban vett főfeszültség lesz. Ezt a körülményt kihasználva szerkesztés útján, az ún. **Mohr-féle kördiagramból**, is meghatározhatjuk a főfeszültségeket és a főirányokat.

A Mohr diagramon mindhárom oszlopnak egy-egy pont felel meg, mivel az oszlopokból egy σ és legfeljebb egy nem zérus értékű τ feszültség származik. A diagram vízszintes tengelye mentén az előjelhelyes σ normálfeszültségek, függőleges tengelye mentén pedig az abszolút értékben vett τ nyírófeszültségek kerülnek felmérésre.

Az első oszlopban álló $\sigma_x = -4$ MPa és $\tau_{zx} = -8$ MPa feszültségek előbbieket szerinti felmérése után az $X(-4, 8)$ jelű pontot, míg a harmadik oszlopból vett $\sigma_z = 8$ MPa normálfeszültség és a $\tau_{xz} = -8$ MPa nyírófeszültség felhasználásával a $Z(8, 8)$ jelű pontot határozzuk meg a diagramon.

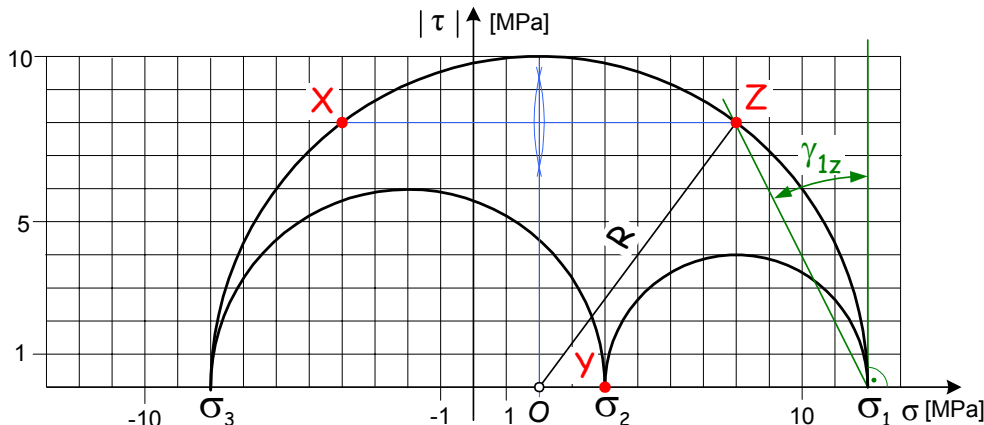
Bizonyítható, hogy a kiszerkesztett pontok egy, a vízszintes σ tengelyen vett O középpontból rajzolt, félköríven helyezkednek el. Az O középpont megkeresése a vízszintes σ tengely felett azonos magasságban ($|\tau| = |\tau_{zx}| = |\tau_{xz}| = 8$ MPa) lévő X és Z jelű pontok közötti vonalszakasz szakaszfelező merőlegesének megszerkesztéséből, vagy pedig a feladat jelöléseit felhasználva a

$$\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} = \frac{8 - 4}{2} = 2 \text{ MPa}$$

képletből történhet. A keresett kör sugara is szerkeszthető, vagy pedig ebben az esetben az

$$R = \sqrt{\left(\sigma_z - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ MPa}$$

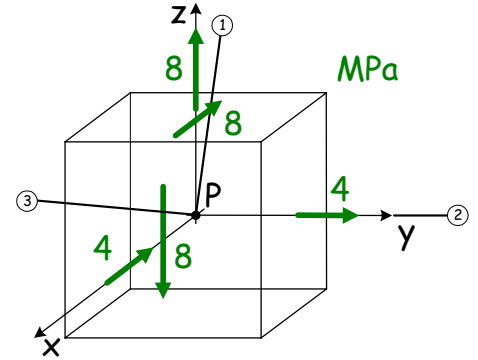
módon számítható. A diagramon így megrajzolt félkörív σ tengelyt két helyen, a másik két főfeszültségnél metszi.



Ezután a második oszlopból előálló $Y(\sigma_y = 4 \text{ MPa}, \tau = 0)$ pontot vesszük fel, majd e pont és az előbbieken szerkesztett körív σ tengelyen vett metszéspontjai között két további körívet rajzolunk meg.

A vízszintes σ tengelyen lévő három metszéspont adja meg a három főfeszültséget, melyek közül a legnagyobbat $\sigma_1 = 12$ MPa, a második legnagyobbat $\sigma_2 = 4$ MPa, a legkisebbet $\sigma_3 = -8$ MPa jelöli.

A Mohr-féle kördiagram segítségével a vonatkozó főteengelyek is meghatározhatók. Miután a $\sigma_2 = \sigma_y = 4 \text{ MPa}$ főfeszültséghez tartozó főteengely, az y tengely, már ismert a másik két főteengely az xz síkban található. A Mohr diagramban a σ_1 főfeszültséghez tartozó 1 jelű főteengely és a z tengely által bezárt α_{1z} szög a σ_1 -nél a σ tengelyre állított merőleges, valamint ezt a pontot Z ponttal összekötő szakasz által bezárt szögnek felel meg. Az 1 jelű főteengely mellékelt ábrán történő berajzolása úgy történik, hogy a P ponthoz kötött KRSZ z tengelyétől felmérjük a α_{1z} szöget az xz síkban, még pedig az elemi kocka z normálisú lapján vett τ nyírófeszültség irányában. A 3 jelű főteengely pedig a már megrajzolt két főteengely által kifeszített síkra lesz merőleges.



Alakváltozás

A szilárd test pontjainak terhelés hatására bekövetkező mozgásai kétféleképpen jellemezhetők. Egyrészt a test két pontját összekötő szakasz eltolódhat és merevtestszerűen elforulhat, miközben hossza nem változik, azaz a test pontjai **merevtestszerű mozgást** végeznek. Másrészt **alakváltozások** lépnek fel, azaz test pontjait összekötő szakaszok hossza, valamint a szakaszok egymással bezárt szöge változhat.

A xy síkon vett P pont terhelés hatására a P' pontba kerül, valamint az eredetileg hozzákötött dx és dy szakaszok A és B végpontjai az A' és B' pontokba kerülnek. Az eredetileg koordináta-tengelyekkel párhuzamos és így derékszöget bezáró szakaszok hossza (nyúlás, rövidülés), valamint általuk bezárt szög is változik. A P pont x irányú elmozdulását $u(x, y)$, az y irányút pedig az $v(x, y)$ függvény (elmozdulásmező) jellemzi. Képezzük az A és A' , illetve B és B' végpontok különbségeinek második tagig vett Taylor-sorait:

$$\begin{aligned} x_{A'} - x_A &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \dots, & y_{A'} - y_A &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \dots, \\ x_{B'} - x_B &= u + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \dots, & y_{B'} - y_B &= v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \dots, \end{aligned}$$

amelyek alapján

$$\varepsilon_x = \frac{P'A' - PA}{PA} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{és} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ezt a másik két koordinátásíkra is elvégezhetjük. A P ponthoz kötött elemi triéderen szemléltetjük a pozitívnak tekintett ε fajlagos nyúlásokat és γ fajlagos szögtorzulásokat.

Alakváltozási jellemzőket az $\underline{\underline{A}}_P$ **alakváltozási tenzor**ba foglaljuk:

$$\underline{\underline{A}}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Az $\underline{\underline{A}}_P$ tenzor szimmetrikus tenzor, azaz mellékátlóiban álló fajlagos szögtorzulások azonosak (pl.: $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx}$).

Az alakváltozási tenzor ismeretében az \vec{n} által kijelölt irányba vett nyúlás a

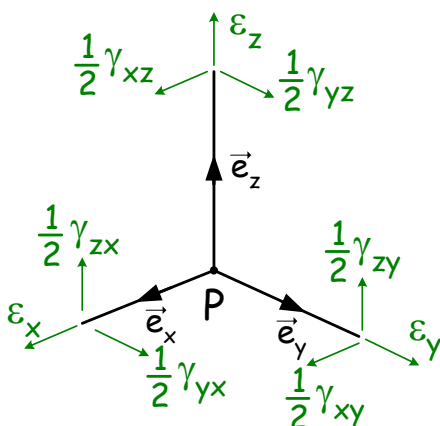
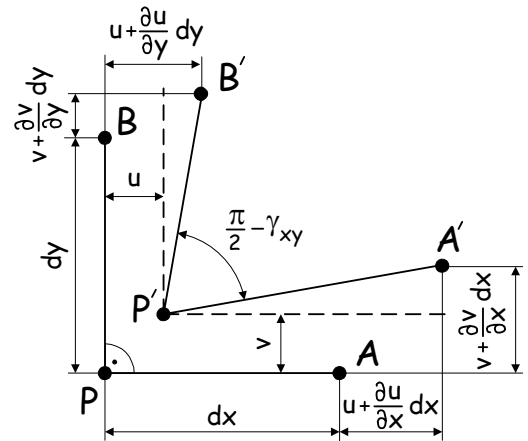
$$\varepsilon_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n}$$

módon számítható ki, az \vec{n} és \vec{m} által bezárt derékszög szögváltozása

$$\gamma_{mn} = 2\vec{m} \cdot \underline{\underline{A}}_P \cdot \vec{n}$$

lesz.

Az alakváltozási tenzornak is létezik a $\underline{\underline{A}}_P \vec{e}_i = \varepsilon_i \vec{e}_i$ ($i = 1, \dots, 3$) sajátértékproblémája, azaz létezik legalább három egymásra kölcsönösen merőleges $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ egységvektorok által jelölt **főirány**, amely irányokban $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ **főnyúlások** értelmezhetők, azonban az $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorok által kijelölt irányok egymással bezárt derékszöge a terhelés hatására nem változik, azaz γ mindig eltűnik.



pedig

Prizmatikus rudak húzása, nyomása

A húzókísérlet során megfigyelhetjük, hogy a z tengelyre nézve hengeres kialakítású próbatest z tengelyen mért hossza az adott húzóerő hatására $\Delta l > 0$ mértékben megnyúlik és közben keresztmetszetének átmérője $\Delta d = d - d_o < 0$ mértékben lecsökken.

A megfigyelésből következően felírhatjuk a

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l_o} = \text{állandó}, \quad \varepsilon_k = \frac{\Delta d}{d_o} = -\nu \varepsilon_z = \text{állandó},$$

fajlagos nyúlásokat. Továbbá az is megfigyelhető, hogy az xy , xz és yz síkokkal párhuzamos síkok alakváltozás után is síkok maradnak, így $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. A próbatestből kimunkált, x , y és z tengelyekkel párhuzamos élű, elemi kockák deformációja mindentűtt azonos, ebből következően egy tetszőleges P pontban az

$$\underline{\underline{A}}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

alakváltozási tenzor írható fel, ahol a próbatest anyagára jellemző Poisson-számot ν jelöli.

A próbatest x és y irányokban terheletlen, következésképp csak a

$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$

módon számítható normálfeszültség létezik, azaz

$$\underline{\underline{T}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{A} \end{bmatrix}.$$

Az általunk vizsgált esetben a húzóerő hatására bekövetkező alakváltozás kicsi, így a létrejövő $d_o - d$ átmérőkülönbség is kicsi, ekképen az $A_o - A$ területkülönbség nagyságrendje még kisebb lesz. Következésképp a műszaki számításokban az eredeti keresztmetszet A_o területével ($A \cong A_o$) számolunk.

A feszültség és az alakváltozás közötti $\underline{\underline{T}}_P = \underline{\underline{T}}_P(\underline{\underline{A}}_P)$ kapcsolatot leíró anyagtörvény, a

$$\sigma_z = E \varepsilon_z$$

egyszerű Hooke-törvény a szakítódiagram lineáris szakaszán, az R_p arányossági határig van érvényben.

Jól alakítható fémeknél az R_p -t és az R_e (σ_F) **folyáshatárt** (a feszültséget, amelyet a test anyaga maradandó alakváltozás nélkül még elvisel) nem különböztetjük meg. Előfordul azonban, hogy a szakítódiagramból a jellemző feszültségek, így az R_p feszültség nem állapítható meg pontosan, ilyenkor a szakítódiagramon mért 0.02% maradandó nyúláshoz tartozó feszültséget feleltetjük meg neki, míg a 0.2% maradandó nyúláshoz tartozó feszültséget tekintjük folyáshatárnak.

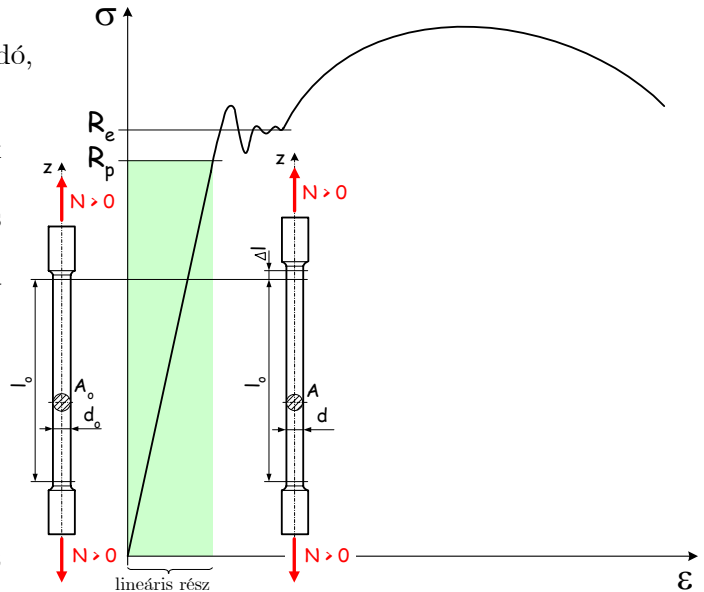
Összefoglalva tehát egy test anyagát a ν Poisson-szám ($0 < \nu < 0.5$), valamint az E Young-féle rugalmassági modulus mint anyagállandók jellemzik. Szerkezeti acélra $\nu = 0.3$; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; $\sigma_F \cong 250$ MPa körüli értékek a jellemzők.

Méretezés, ellenőrzés kérdései

Az általunk vizsgált szerkezetekkel szemben elvárás, hogy rendeltetésszerű használat során ne károsodjanak, azaz a terhelés megszűnése után maradandó alakváltozás bennük ne maradjon vissza. Ecélből **feszültségcsúcsra történő méretezést** alkalmazunk, azaz a terhelések hatására ébredő (abszolútértékben) legnagyobb, σ_{\max} jelű feszültség a szerkezet anyagára megengedett σ_{meg} feszültséget nem haladhatja meg. A σ_{meg} megengedett feszültséget a σ_F folyáshatár és egy választott $n > 1$ biztonsági tényező hányadosaként értelmezzük. Ezek alapján a

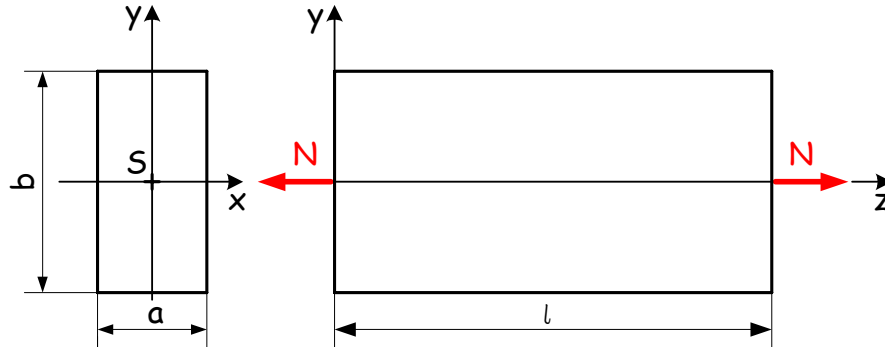
$$\sigma_{\max} = |\sigma_{z \max}| \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_F}{n}$$

képlet alapján méretezünk és ellenőrzünk.



MEGJEGYZÉS: Nyomás ($N < 0$) esetén is a húzásnál felírt összefüggések érvényesek. Karcsú rudak esetén azonban fellép az ún. kihajlás jelensége, amelyet itt külön nem vizsgálunk. Így csak zömök rudat (a rúd hossza a keresztmetszet jellemző méretének legfeljebb 12-szerese lehet) terhelhetünk nyomással, anélkül hogy a kihajlás megjelenne.

1. példa: Az adott téglalapkeresztmetszetű rudat N rúderő húzásra terheli. Legyen $a = 30$ mm; $b = 60$ mm; $l = 300$ mm; $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; $\nu = 0.25$.



Határozzuk meg, hogy $N = 9000$ N húzóerő esetén mekkora lesz a rúd Δl megnyúlásának és Δa és Δb oldalváltozásának nagysága!

Az $\varepsilon_z = \Delta l/l$ képletet és a Hooke-törvényt alapul véve kapjuk a

$$\Delta l = \varepsilon_z l = \frac{Nl}{AE} = \frac{9000 \cdot 300}{1800 \cdot 2 \cdot 10^5} = 7.5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

megnyúlást. Az a és b oldalak változásának mértéke pedig a

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -\nu \frac{N}{AE} = -\frac{0.25 \cdot 9000}{1800 \cdot 2 \cdot 10^5} = -0.625 \cdot 10^{-5}$$

keresztirányú nyúlásokból adódó

$$\Delta a = \varepsilon_x a = -0.625 \cdot 10^{-5} \cdot 30 = -1.875 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$

$$\Delta b = \varepsilon_y b = -0.625 \cdot 10^{-5} \cdot 60 = -3.75 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$$

lesz.

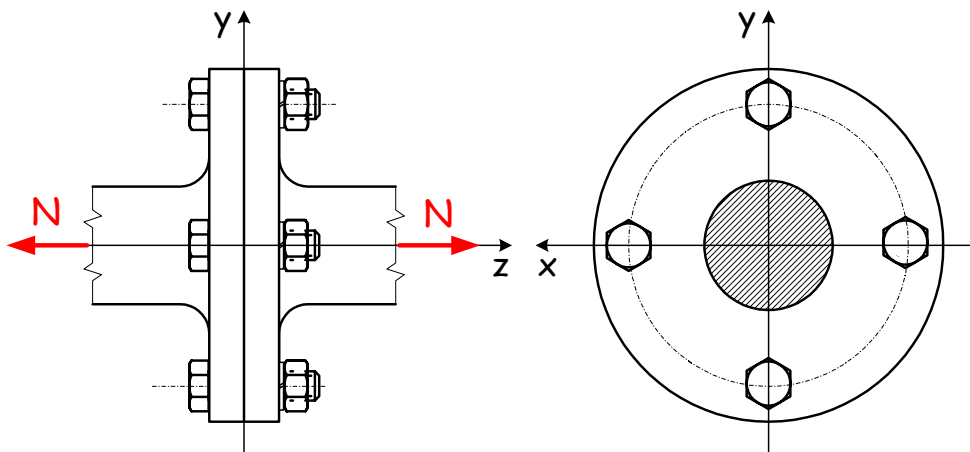
A rúd (téglatest) így

$$\Delta V = (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (l + \Delta l) - a \cdot b \cdot l \cong 6.75 \text{ mm}^3$$

térfogatváltozást szenved, azaz a térfogat nem marad állandó!

MEGJEGYZÉS: A térfogatváltozás a rugalmas alakváltozására jellemző tulajdonság. A fémek anyagok képlékeny alakváltozása például térfogat állandósággal párosul.

2. példa: Az $N = 80$ kN rúderővel terhelt rúdcsatlakozást $k = 4$ csavarral valósítjuk meg.



A szereléskor ébredő feszültségeket elhanyagolva határozzuk meg az egyes csavarok magkeresztmetszetének $A_{szüks.}$ méretét, ha azokra $\sigma_{meg} = 100$ MPa!

Az egyes csavarokra eső húzóerő $N_{cs} = \frac{N}{k} = 20 \text{ kN}$ lesz. Felhasználva a

$$\sigma_z = \frac{N_{cs}}{A_{szüks.}} = \sigma_{meg}$$

$$\frac{20000 \text{ N}}{A_{szüks.}} = 100 \text{ MPa}$$

képletet kapjuk, hogy $A_{szüks.} = 200 \text{ mm}^2$.

3. példa: Mekkora N erővel húzzák a $k = 114$ darab egyenként $d = 1 \text{ mm}$ átmérőjű elemi szálból álló acélsodrony kötelet, ha a benne ébredő feszültség $\sigma_{kötél} = 300 \text{ MPa}$?

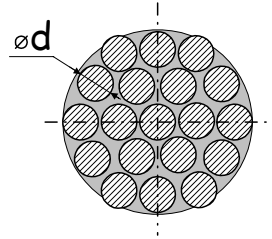
A sodronykötél keresztmetszetének

$$A_{össz} = k \frac{d^2 \pi}{4} = 114 \cdot \frac{1^2 \cdot \pi}{4} = 28.5\pi \text{ mm}^2$$

az összterülete. Ezt felhasználva kapjuk, hogy a kötelet

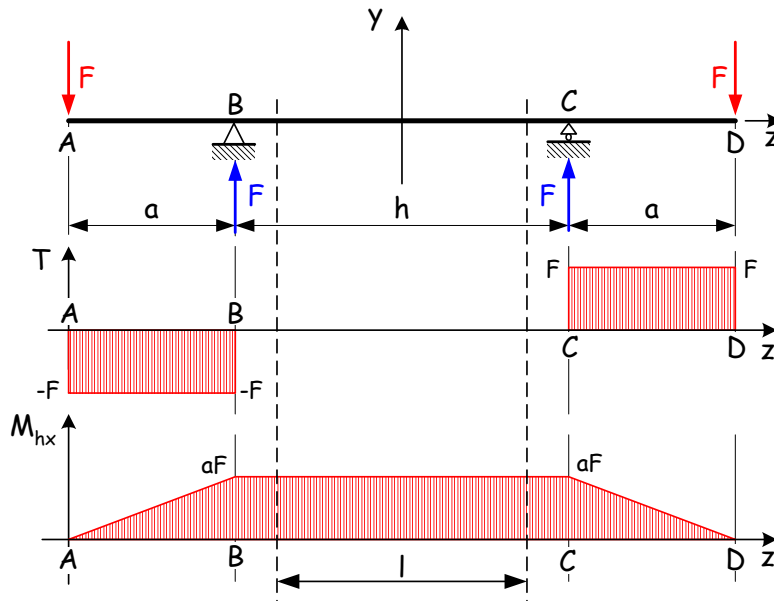
$$N = \sigma_{kötél} A_{össz} = 300 \cdot 28.5\pi \cong 26861 \text{ N} \cong 27 \text{ kN}$$

erővel húzzák.



Prizmatikus rudak egyenes hajlítása

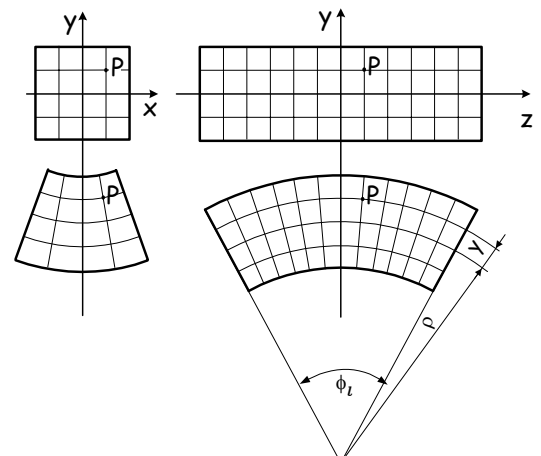
Tekintve az alábbi tartó igénybevételi ábráit megállapíthatjuk azt, hogy a \overline{BC} szakasz tisztán hajlított.



Kiragadva \overline{BC} -ből egy l hosszúságú szakaszt a következőket figyelhetjük meg:

- az yz síkban tekintett z tengellyel párhuzamos szakaszok (szálak) közös középpontú körívekké görbülnek. A felső szálak megnyúlnak, míg az alsók megrövidülnek.
- az xy síkban ugyanez figyelhető meg az x tengellyel párhuzamos szakaszoknál
- az xy síkkal párhuzamos síkok síkok, míg y tengellyel párhuzamos szakaszok egyenesek maradnak és elfordulnak.
- a z tengelyen mért l hosszúságú középvonal változatlan nagyságú marad.

A berajzolt kocka hálóból így egy új ortogonális háló lesz.



A megfigyelések alapján az

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y)\phi_l - l}{l} = \frac{(\rho + y)\phi_l - \rho\phi_l}{\rho\phi_l} = \frac{y}{\rho} = \kappa y \quad \text{és} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z = -\frac{\nu y}{\rho}$$

fajlagos nyúlásokat írhatók fel, ahol ρ jelöli a görbült tartó középvonalának görbületi sugarát, κ pedig a görbületét. Megállapítható, hogy az alakváltozási tenzor mátrixában szereplő fajlagos nyúlások a vizsgált P pont helyzetétől nem függetlenek. Az ortogonalitás miatt pedig $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Így a P pont alakváltozási állapotát leíró $\underline{\underline{A}}_P$ tenzor mátrixa formailag a húzásnál megfigyelttel azonosnak adódik. Alkalmazva az egyszerű Hooke-törvényt kapjuk a

$$\sigma_z = E \frac{y}{\rho}$$

képletet a z irányú normálfeszültségre.

Ezt felhasználva képezzük a feszültségi eredőket a négyszögkeresztmetű tartó xy keresztmetszetén:

$$\vec{F}_S = \int_A \sigma_z \vec{e}_z dA = \vec{e}_z \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \vec{0},$$

azaz a keresztmetszet S súlypontjába redukált eredő zérus értékű lesz, mivel a keresztmetszet szimmetrikus x tengelyre és így az integrál eltűnik. A súlypontba redukált

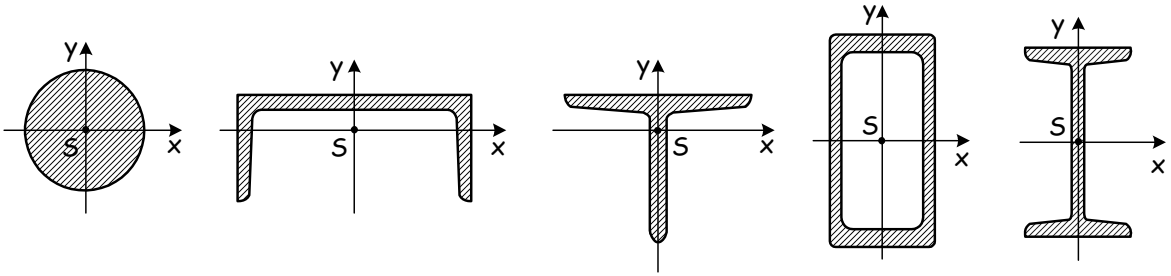
$$\vec{M}_S = M_{hx} \vec{e}_x = \int_A (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \times \sigma_z \vec{e}_z dA = \int_A (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \times \frac{E}{\rho} y \vec{e}_z dA = -\underbrace{\vec{e}_y \frac{E}{\rho} \int_A xy dA}_{I_{xy}} + \underbrace{\vec{e}_x \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA}_{I_x}$$

nyomaték képletében álló I_{xy} az xy tengelypárra vett másodrendű nyomaték a keresztmetszet x és y tengelyekre vett szimmetriája miatt el fog tűnni. Ebből adódóan a két oldal összevetése után az y koordinátától lineárisan függő σ_z feszültségre a

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

képlet adódik, ahol I_x jelöli az x tengelyre (a hajlítás tengelyére) vett másodrendű nyomatékot. A képletbe az M_{hx} nyomatékot Nmm-ben, az I_x másodrendű nyomatékot mm⁴-ben, míg az y koordinátát mm-ben szokás helyettesíteni, hogy a σ_z feszültség MPa-ban adódjon.

MEGJEGYZÉS: A keresztmetszet S súlypontján áthaladó szimmetriatengely, valamint a rá merőleges súlyponti tengely lesz a keresztmetszet ún. **tehetetlenségi főtengelye**. Az egymásra kölcsönösen merőleges súlyponti x és y tehetetlenségi tengelyekre mindig igaz, hogy $I_{xy} = 0$. Az előzőek alapján például a



keresztmetszeteken berajzolásra került x és y tengelyek a keresztmetszetek tehetetlenségi főtengelyei.

Ha a keresztmetszetet síkjában terhelő nyomatékvektor párhuzamos valamely tehetetlenségi főtengellyel, akkor **egyenes hajlításról** beszélünk.

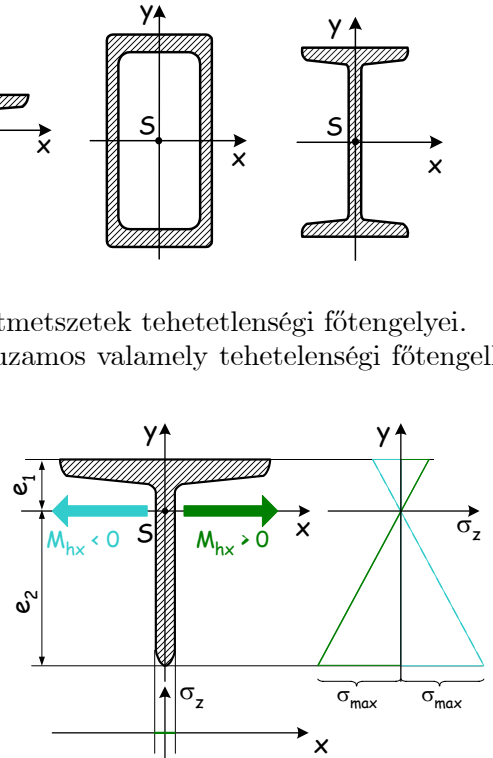
A hajlítás tengelyétől a keresztmetszet legtávolabbi pontjának $e = |y_{\max}|$ távolságát (a szélsőszál távolságát) bevezetve definiáljuk a

$$K_x = \frac{I_x}{e} \quad [\text{mm}^3]$$

x tengelyre vett **keresztmetszeti tényező**t. Ha az x tengely nem szimmetriatengely, lásd pl. az ábrán is, az $e = \max(e_1, e_2)$. Ezt felhasználva a

$$\sigma_{\max} = |\sigma_z|_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}$$

módon számítható a maximális feszültség.



Síkidomok másodrendű nyomatékai

Az A területű síkidom x és y súlyponti tehetetlenségi főtengelyeinek ismeretében az

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_A xy dA \quad \text{és} \quad I_P = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

másodrendű nyomatékokat definiálhatjuk.

Egyszerű alakzatok nyomatékaira az integrálás elvégzése után zárt alakú képletek adódnak, melyekből a másodrendű nyomatékokat a síkidomok geometriai méreteinek helyettesítése után számíthatjuk ki.

Az a szélességű és b magasságú téglalap esetén például a súlyponti x és y tengelyekre vett másodrendű nyomatékok az

$$I_x = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dx dy = a \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{ab^3}{12}, \quad I_y = \frac{ba^3}{12}$$

összefüggések alapján számíthatók, míg az x és y tengelyekre vett keresztmetszeti tényezők a

$$K_x = \frac{ab^3}{12} \frac{2}{b} = \frac{ab^2}{6}, \quad K_y = \frac{ba^3}{12} \frac{2}{a} = \frac{ba^2}{6}$$

képletekből adódnak.

MEGJEGYZÉS: A szabványos keresztmetszetek geometriai adatait (terület, súlypont, súlyponti tehetetlenségi főtengelyek, másodrendű nyomatékok, keresztmetszeti tényezők, stb.) a különböző szabványok tartalmazzák.

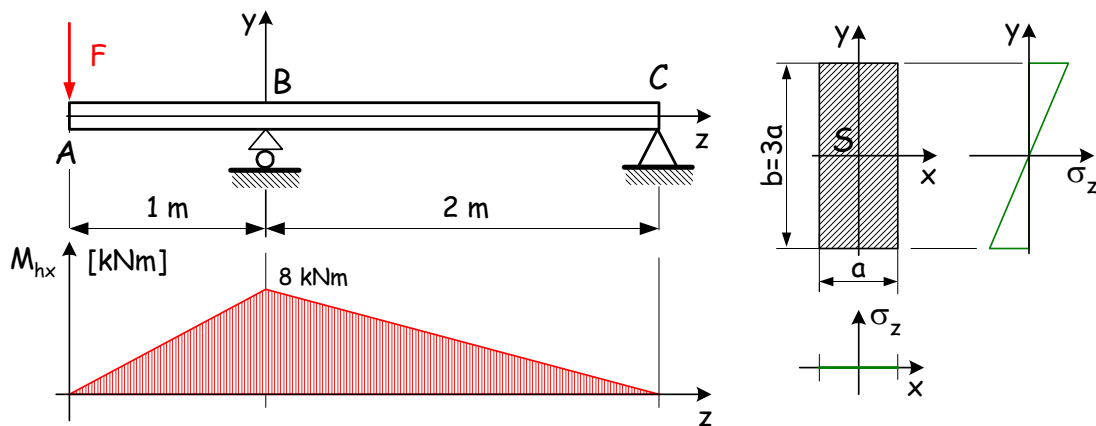
Méretezés, ellenőrzés kérdései

Feszültségcsúcsra méretezünk a

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{meg} = \frac{\sigma_F}{n}$$

képlet alapján, ahol az $n > 1$ a biztonsági tényezőt jelöli.

1. példa: Az ábrán látható módon a konzolos kéttámaszú tartót egy $F = 8 \text{ kN}$ erő terheli. Feladat a rúd méretezése hajlításra, ha az ábrának megfelelően $b = 3a$ és a rúd anyaga acél, melyre $\sigma_{meg} = 160 \text{ MPa}$.



A hajlítónyomatéki ábra megrajzolása után a B keresztmetszet bizonyult a veszélyes keresztmetszetnek $M_{hx \max} = 8 \text{ kNm}$. Itt ébredő x és y tengelymenti feszültségeloszlást mutatja a jobboldali ábra. Az előzőek alapján számítjuk a

$$K_x = \frac{ab^2}{6} = \frac{a(3a)^2}{6} = \frac{3}{2}a^3$$

keresztmetszeti tényezőt, melyet helyettesítve a feszültségcsúcsra történő méretezés képletébe nyerjük a

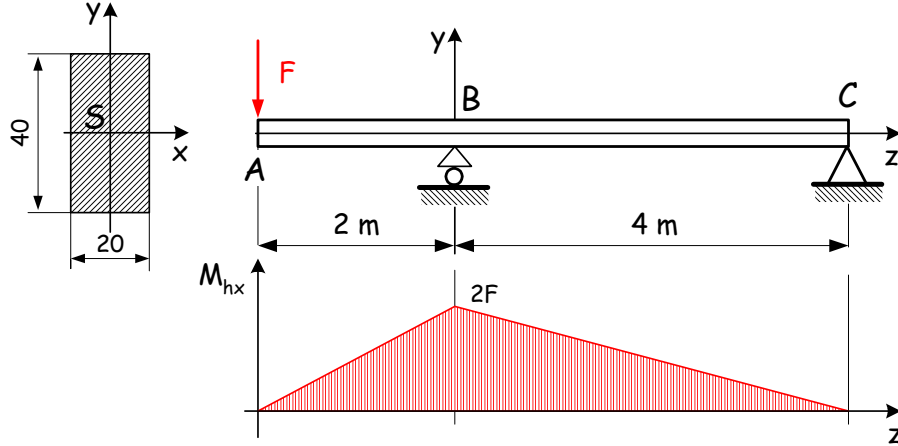
$$\frac{M_{hx \max}}{K_x} \leq \sigma_{meg}$$

összefüggést, ahonnan adódik az

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{2}{3} \frac{M_{hx \max}}{\sigma_{meg}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \cdot \frac{8 \cdot 10^6}{160}} = 32.18 \text{ mm} \approx 33 \text{ mm}$$

végeredmény.

2. példa: Határozzuk meg legfeljebb mekkora F erővel terhelhető az alább vázolt tartó, ha a tartó anyagára megengedett feszültség értéke 150 MPa!



A nyomatéki ábráról leolvasható az $M_{hx \max} = 2F$ [Nm] maximális hajlítónyomaték. A nyomatékot megadó összefüggésben megjelenő távolság méterről milliméterre történő átváltása után a maximális hajlítónyomatékot az $M_{hx \max} = 2000F$ formában kell a

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{hx \max}}{K_x} = \frac{2000F}{\frac{20 \cdot 40^2}{6}} = \frac{12000F}{32000} = \frac{12F}{32}$$

feszültség képletbe helyettesíteni. A feszültségcsúcsra történő méretezés képletének felhasználásával kapott

$$\frac{12F_{\max}}{32} = \sigma_{meg}$$

egyenlet átrendezése után az

$$F_{\max} = \frac{32 \cdot 150}{12} = 400 \text{ N}$$

eredményre jutunk.

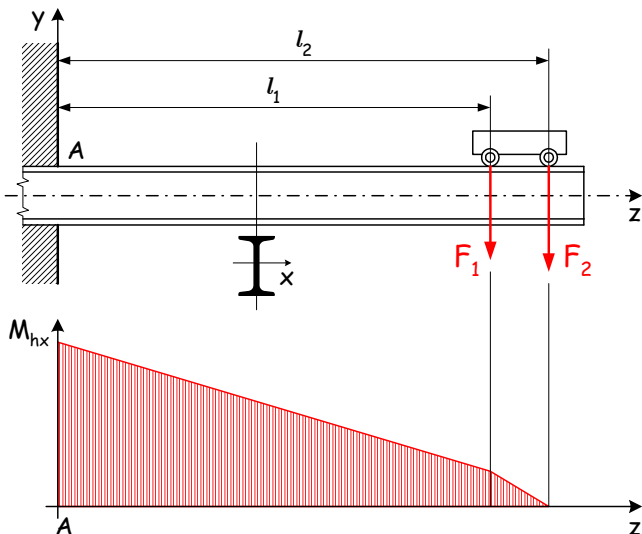
Határozzuk meg legfeljebb mekkora F erővel terhelhető a tartó, ha a gerendát az eredeti elrendezéshez képest 90° -al elfordítjuk a z tengely körül.

Ekkor

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{hx \max}}{K_x} = \frac{2000F}{\frac{40 \cdot 20^2}{6}} = \frac{12F}{16}, \quad \text{azaz} \quad F_{\max} = \frac{16 \cdot 150}{12} = 200 \text{ N.}$$

lesz az eredmény. A feladatból levonhatjuk azt az általános tanulságot, hogy az egyenes hajlításra igénybe vett gerendákat mindig a keskenyebb oldalukra állítva célszerű beépíteni.

3. példa: Az ábrán látható I acélból készített konzolt a befalazástól $l_1 = 1.4$ m és $l_2 = 1.75$ m távolságra elhelyezkedő futómacska kerekek $F_1 = 10.5$ kN és $F_2 = 13.5$ kN erővel terhelik.



szelvény	h [mm]	K_x [cm ³]	K_y [cm ³]	A [cm ²]
I 180	180	161	19.8	27.9
I 200	200	214	26.0	33.4
I 220	220	278	33.1	39.5
I 240	240	354	41.7	46.1

A mellékelt táblázatból válasszuk ki, hogy milyen méretű I acélt kell alkalmazni, ha a tartó anyagára megengedett feszültség értéke 140 MPa!

A feladat megoldásakor feszültségcsúcsra méretezünk, azaz először a konzol veszélyes keresztmetszetén fellépő

$$M_{hx \max} = M_{hx}(A) = F_1 l_1 + F_2 l_2 = 1.05 \cdot 10^4 \cdot 1400 + 1.35 \cdot 10^4 \cdot 1750 = 3.8325 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$$

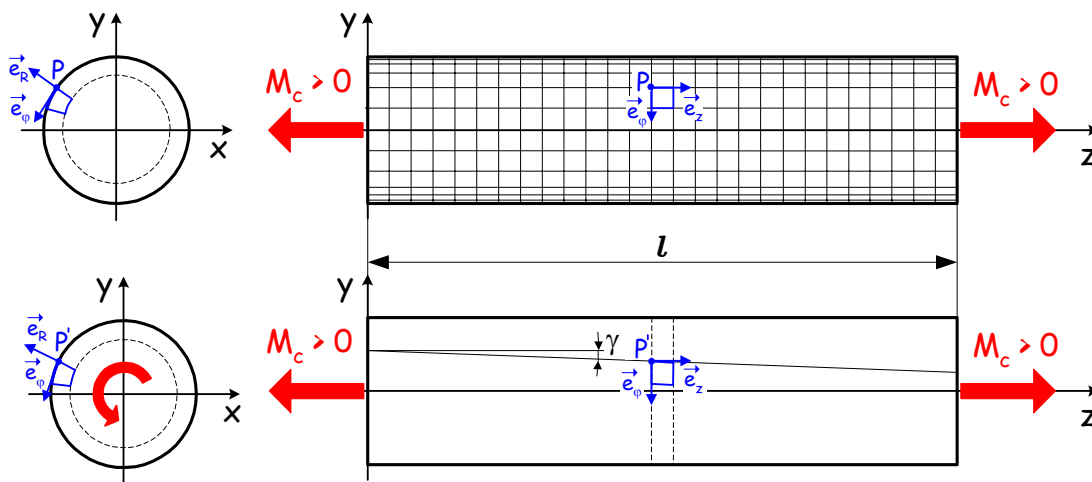
hajlítónyomaték értékét határozzuk meg, amely birtokában számítható a

$$K_{x \text{ szüks.}} = \frac{M_{hx \max}}{\sigma_{meg}} = \frac{3.8325 \cdot 10^7}{140} = 273750 \text{ mm}^3 = 273.75 \text{ cm}^3$$

szükséges keresztmetszeti tényező. Az I szelvényekhez tartozó szabványból kiírt adatokból készített táblázatunkban keressük meg az első, $K_{x \text{ szüks.}}$ keresztmetszeti tényezőnél nagyobb K_x (3. oszlop) tényezővel bíró szabványos keresztmetszetet. Ezek alapján a kiválasztott **I 220** keresztmetszetből kell a tartót elkészíteni.

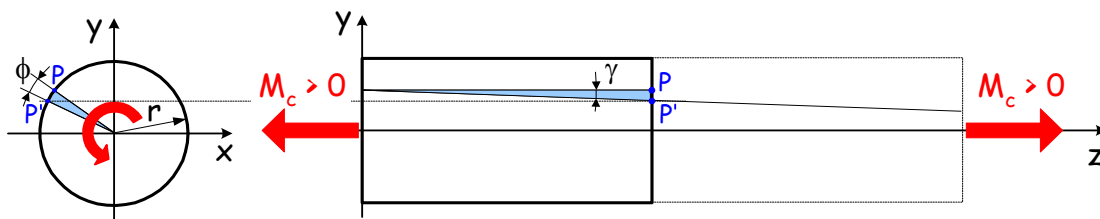
Csavarás

A csavarásra igénybevett körkeresztmetszetű prizmatikus rúd l hosszúságú szakaszából kivett P ponthoz kötött $R\varphi z$ koordináta-rendszerben egy elemi négyzet alapú hasábot vizsgálunk.



A vizsgált l hosszúságú rúdszakasz megfigyeléséből az alakváltozás jellegére következtethetünk:

- A keresztmetszetek saját síkjukban fordulnak el, így ezeken a körlapokon kijelölt anyagi vonalak nem torzulnak, azaz $\gamma_{R\varphi} = \gamma_{Rz} = \varepsilon_z = 0$.
- A rúd átmérője sem változik $\varepsilon_R = 0$.
- Az ábra alapján a terhelés előtt z tengellyel párhuzamos szálak z tengelyű egyenes γ emelkedésű hengeres csavarvonalakká görbülnek.
- A z tengelyre merőleges egyenesszakaszok a z körül fordulnak el. Hosszuk nem változik, azonban a z távolságra lévő körlapok egymáshoz viszonyított $\phi = \vartheta z$ szögelfordulása a z lineáris függvénye lesz, ahol $\vartheta = \text{áll.}$ a fajlagos elcsavarodási szöget jelöli.



Kis alakváltozások esetén a P -ből P' -be történő érintőirányú elmozdulásra felírt $r\phi = \gamma z$ összefüggésből a $\phi = \vartheta z$ helyettesítéssel jutunk a $\gamma = r\vartheta$ képletre, mivel a φ és z tengelyek közötti $\gamma_{\varphi z} = \gamma$ szögtorzulás nem zérus értékű következik, hogy:

$$\underline{\underline{A}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}.$$

Figyelembevéve a palást terheletlenségét, valamint a deformáció jellegét arra jutunk, hogy csavarás esetén $\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi}$ feszültségek ébrednek.

A P pontbeli $\tau_{\varphi z}$ feszültség a P pontbeli $\gamma_{\varphi z}$ fajlagos szögtorzulásból a

$$\tau_{\varphi z} = G\gamma_{\varphi z}$$

alakú csavaráskor érvényes Hooke-törvény segítségével számítható ki, ahol G [MPa] a csúsztató rugalmassági modulus.

MEGJEGYZÉS: Azonos anyagra vett E , G és ν anyagállandók összetartoznak, azaz kettő ismeretében a harmadik számítható.

A fajlagos szögtorzulást és a $\tau_{\varphi z}$ feszültséget az M_c nyomatékból számíthatjuk. Képezzük az ún. feszültségi eredőket a tartó xy keresztmetszetén:

Az \vec{F}_S eredő számítása a keresztmetszet S súlypontjába az

$$\vec{F}_S = \int_A \underbrace{G\vartheta r}_{\tau_{\varphi z}} \underbrace{\vec{e}_\varphi}_{\vec{e}_z \times \vec{e}_R} dA = G\vartheta \vec{e}_z \times \int_A r \vec{e}_R dA = \vec{0}$$

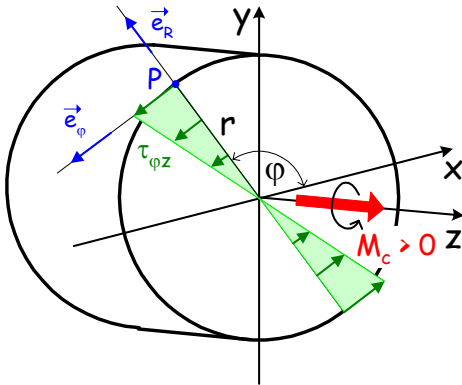
eredményre vezet, mivel az integrál a körkeresztmetszet szimmetriája miatt eltűnik. A súlypontba számított

$$M_c \vec{e}_z = \int_A r \underbrace{\vec{e}_R \times \vec{e}_\varphi}_{\vec{e}_z} G\vartheta r dA = G\vartheta \vec{e}_z \underbrace{\int_A r^2 dA}_{I_P}$$

nyomaték képletéből az I_P poláris másodrendű nyomaték bevezetése után jutunk a

$$\vartheta = \frac{M_c}{I_P G} \quad \text{és} \quad \Phi = \vartheta z = \frac{M_c z}{I_P G}$$

fajlagos elcsavarodási szögek és a



$$\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = G \underbrace{\gamma_{\varphi z}}_{\gamma} = G\vartheta r = \frac{M_c}{I_P} r$$

feszültség számítására szolgáló összefüggésekre. Így a $\underline{\underline{T}}_P$ feszültség-tenzor mátrixa

$$\underline{\underline{T}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

alakú lesz.

Egy d átmérőjű körkeresztmetszet poláris és súlyponti x és y tengelyekre vett másodrendű nyomatékait az

$$I_P = \int_{r=0}^{\frac{d}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 r d\varphi dr = 2\pi \int_{r=0}^{\frac{d}{2}} r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{d}{2}} = \frac{d^4 \pi}{32}, \quad I_x = I_y = \frac{I_P}{2} = \frac{d^4 \pi}{64},$$

képletekből, a vonatkozó keresztmetszeti tényezőket pedig a

$$K_P = \frac{I_P}{e} = \frac{2I_P}{d} = \frac{d^3 \pi}{16}, \quad K_x = K_y = \frac{2I_x}{d} = \frac{d^3 \pi}{32}$$

képletekből határozhatjuk meg.

A D külső és d belső átmérőjű körgyűrűkeresztmetszet poláris és súlyponti x és y tengelyekre vett másodrendű nyomatékait az

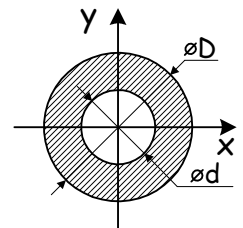
$$I_P = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32}, \quad I_x = I_y = \frac{I_P}{2} = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{64}$$

összefüggésekből, a vonatkozó keresztmetszeti tényezőket pedig a

$$K_P = \frac{I_P}{e} = \frac{2I_P}{D} = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{16D}, \quad K_x = K_y = \frac{2I_x}{D} = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32D}$$

képletekből számítjuk.

Csavarás esetén körkeresztmetszetnél a kerület, míg körgyűrűkeresztmetszetnél a külső D átmérőhöz tartozó kerület pontjai lesznek a veszélyes pontok. Ezekben, azaz a paláston τ_{\max} maximális csavarófeszültség

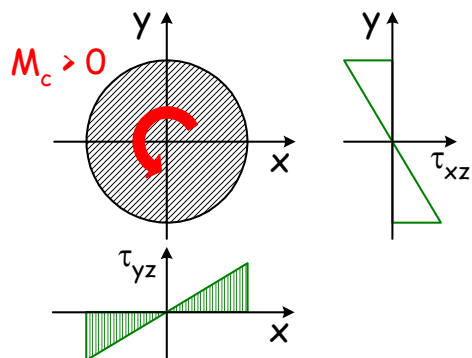


ébred, amelyet a bevezetett K_p keresztmetszeti tényező birtokában a

$$\tau_{\max} = \frac{|M_c|}{K_p}$$

módon számítunk. A képletbe az M_c nyomatékot Nmm-ben, a K_p poláris keresztmetszeti tényezőt mm³-ben kell behelyettesíteni, hogy eredményül a τ_{\max} feszültséget MPa-ban kapjuk.

A pozitív csavaró igénybevételnek kitett körkeresztmetszet súlyponti x és y tengelye mentén ébredő feszültségeloszlásokat szemléltetjük: az x tengelymentén a τ_{yz} , az y tengelymentén pedig a τ_{xz} feszültséget. A feszültségeloszlás is szemléletesen mutatja, hogy a csavarás tengelyétől távolodva lineárisan nő a feszültség.



Az ábrán látható módon a keresztmetszetre berajzolt csavarónyomaték forgatási értelme mutatja, hogy a sugártól lineárisan függő feszültségeloszlások merre mutatnak.

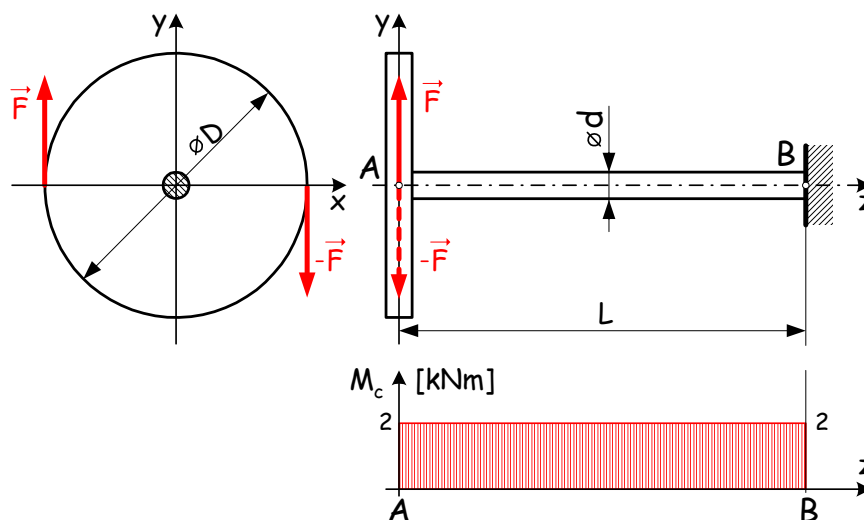
Méretezés, ellenőrzés kérdései

Feszültségcsúcsra méretezünk a

$$\tau_{\max} \leq \tau_{meg} = \frac{\tau F}{n}$$

képlet alapján, ahol az $n > 1$ a biztonsági tényezőt jelöli.

1. példa A d átmérőjű tengelyhez mereven kapcsolódó D átmérőjű tárcsa kerületén állandó \vec{F} és $-\vec{F}$ erőkből álló erőpár működik. Adatok: $|\vec{F}| = 5 \text{ kN}$; $D = 0.4 \text{ m}$.



Méretezzük feszültségcsúcsra a tengelyt, ha anyagának $\tau_{meg} = 60 \text{ MPa}$ a csavarásra megengedett csúszatófeszültsége!

Az A és B keresztmetszet közti tengelyszakaszt az erőpárból számított állandó

$$M_c = |\vec{F}|D = 5 \cdot 0.4 = 2 \text{ kNm}$$

csavarónyomaték terheli.

A megrajzolt igénybevételi ábra alapján az \overline{AB} szakasz keresztmetszetei egyformán veszélyesek. A körkeresztmetszet kerületi pontjai a veszélyes pontok csavarás esetén. Így a

$$\tau_{\max} \leq \tau_{meg}$$

feszültségcsúcsra történő méretezés alapképletébe a körkeresztmetszet K_p poláris keresztmetszeti tényezőjét helyettesítve adódó

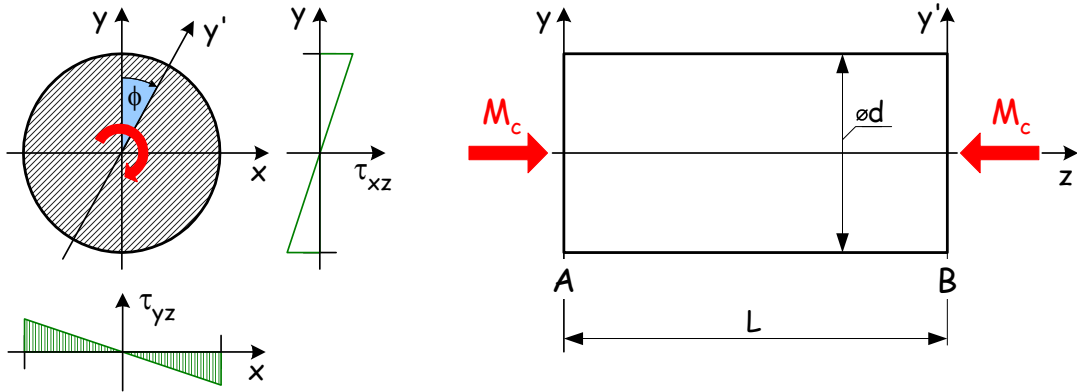
$$\frac{16 |M_c|}{d^3 \pi} \leq \tau_{meg}$$

összefüggés alapján választjuk a

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 |M_c|}{\tau_{meg} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^6}{60 \pi}} = 55.37 \text{ mm}$$

tengelyátmérőt.

2. példa Az ábrán vázolt $L = 0.8$ m hosszúságú és d átmérőjű körkeresztmetsztű rudat, az ábrán látható módon, az $M_c = 31.8$ Nm nyomaték csavarásra terheli. A nyírási rugalmassági modulusz $G = 8 \cdot 10^4$ MPa.



Méretezzük a rudat, ha a két szélső (A és B) keresztmetszetek egymáshoz viszonyított szögelfordulásának megengedett értéke $\Phi_{meg} = -4 \cdot 10^{-3}$ rad (A keresztmetszeten az x -ből y -ba történő forgást tekintjük pozitívnak.), majd ezután ellenőrizzünk feszültségcsúcsra $\tau_{meg} = 30$ MPa mellett!

A terhelés előtti rúd végein felvett függőleges tengelyek közül az A keresztmetszethez kötött, gondolatban függőlegesen maradó y tengelyhez képest a csavarónyomaték forgatási értelme szerint Φ szöggel fordul el a tőle L távolságra lévő B keresztmetszetbeli y' tengely. A relatív szögelfordulásnak a megengedett érték alatt kell maradni, azaz az $|\Phi| \leq \Phi_{meg}$ összefüggés írható fel, amelybe a Φ -re érvényes formulát helyettesítve a

$$\frac{32 |M_c| L}{d^4 \pi G} \leq \Phi_{meg}$$

összefüggésre jutunk. Ezt átrendezve kapjuk a

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 |M_c| L}{\Phi_{meg} \pi G}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 31.8 \cdot 10^3 \cdot 800}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot \pi}} \cong 30 \text{ mm}$$

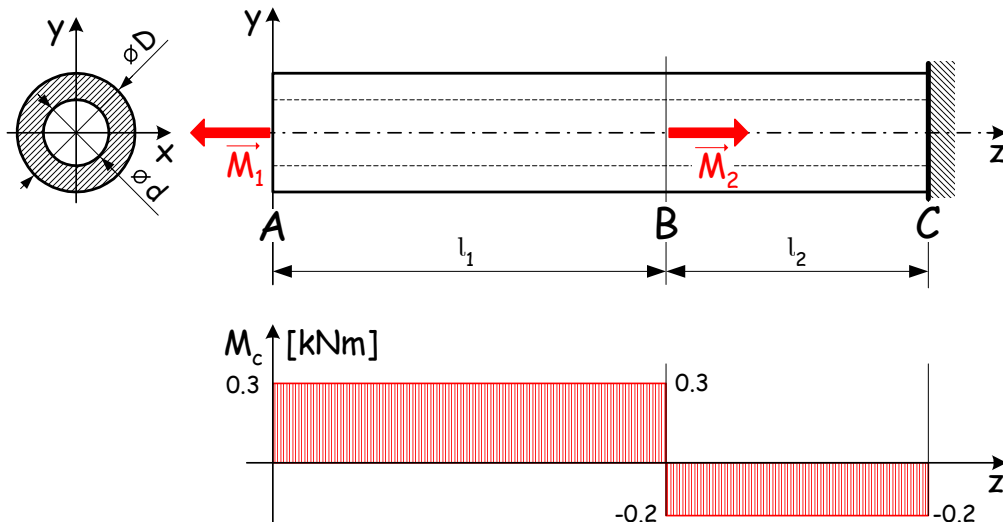
eredményt.

Válsszuk a $d = 30$ mm átmérőt és ellenőrizzük le a rudat a $\tau_{max} \leq \tau_{meg}$ képlet alapján, amely szerint

$$\frac{16 |M_c|}{d^3 \pi} = \frac{16 \cdot 31.8 \cdot 10^3}{30^3 \pi} \cong 6 \text{ MPa} < \tau_{meg} = 30 \text{ MPa},$$

azaz a rúd megfelel.

3. példa Az ábrán vázolt körgyűrűkeresztmetszetű, jobb végén befalazott rudat az $|\vec{M}_1| = 0.3$ kNm és az $|\vec{M}_2| = 0.5$ kNm nyomatékok csavarásra terhelik (az A , ill. B keresztmetszetekben). $l_1 = 600$ mm, $l_2 = 400$ mm.



Méretezzük a rudat, ha ismeretes a $D/d = 3/2$ átmérőviszony és $\tau_{meg} = 70$ MPa a megengedett feszültség a

tengely anyagára, valamint határozzuk meg a rúd B keresztmetszetének az A keresztmetszethez viszonyított Φ_{AB} szögelfordulását, ha $G = 8 \cdot 10^4$ MPa a nyírási rugalmassági modulus!

Az igénybevételi ábra megrajzolása után megállapítható, hogy az \overline{AB} szakasz keresztmetszetei a veszélyesek és ezeket $M_{c\max} = 0.3$ kNm terheli. A feszültségcsúcsra történő méretezés csavarás esetén érvényes

$$\frac{M_{c\max}}{K_P} \leq \tau_{meg}$$

formulájába a

$$K_P = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{16D} = \frac{([\frac{3}{2}d]^4 - d^4) \pi}{16 \frac{3}{2}d} = \frac{\frac{65}{16}d^4 \pi}{24d} = \frac{65}{384}d^3 \pi$$

poláris keresztmetszeti tényezőt helyettesítve kapjuk a

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{384 M_{c\max}}{65 \tau_{meg} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{384 \cdot 0.3 \cdot 10^6}{65 \cdot 70 \cdot \pi}} \cong 20 \text{ mm}$$

összefüggést.

Válasszuk a $d = 20$ mm belső átmérőt, amelyhez a $D = 30$ mm külső átmérő tartozik. Így

$$I_P = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32} = \frac{(30^4 - 20^4) \pi}{32} = 63813.6 \text{ mm}^4$$

lesz a poláris másodrendű nyomaték. Ezt felhasználva a rúd B keresztmetszetének az A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása a

$$\Phi_{AB} = \frac{M_{clAB}}{I_P G} = \frac{0.3 \cdot 10^6 \cdot 600}{63813.6 \cdot 8 \cdot 10^4} = 0.035 \text{ rad}$$

képletből adódik.

Prizmatikus rudak összetett igénybevételei

Ebben a részben tárgyaljuk a több igénybevétel együttes hatásának (összetett igénybevételnek) kitett rúd méretezésének és ellenőrzésének kérdéseit.

Ferde hajlítás

Ferde hajlításról akkor beszélünk, ha a keresztmetszet síkjában terhelő \vec{M}_S nyomatékvektor egyik súlyponti tehetetlenségi főtengellyel sem párhuzamos.

A ferde hajlítás igazolhatóan két egyenes hajlítás szuperpozíciójaként is megadható a

$$\sigma_z(x, y) = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

összefüggés alapján, amely szerint a keresztmetszet x és y súlyponti tehetetlenségi tengelyeire vett M_{hx} , M_{hy} hajlítónyomatékok, valamint I_x , I_y másodrendű nyomatékok segítségével a tetszőleges (x, y) koordinátájú pontban számítható a σ_z normál feszültség.

A keresztmetszeten keressük azon kitüntetett pontok helyét, ahol az ébredő feszültség zérus értékű lesz. Az eképpen felírt

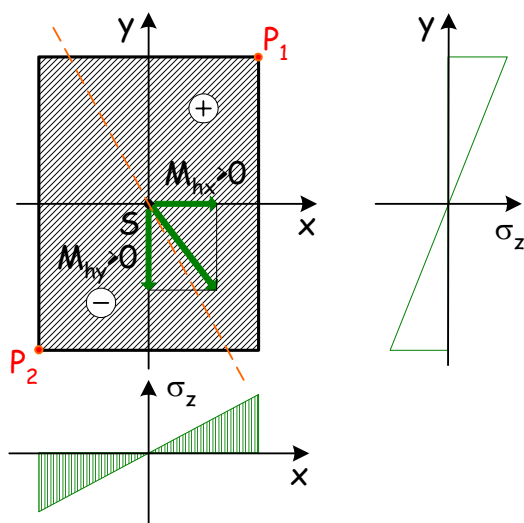
$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x &= 0 \end{aligned}$$

egyenletből az átrendezés után az

$$y = -\frac{M_{hy}}{M_{hx}} \frac{I_x}{I_y} x$$

összefüggésre, az ún. **zérusvonal** egyenletére jutunk. Az ábrán piros szagatott vonallal jelölt zérusvonal áthalad az S súlyponton és a keresztmetszetet két részre bontja. Az egyik részen a pozitív, a másikon a negatív normál feszültségek ébrednek.

A zérusvonal bevezetésével a keresztmetszet veszélyes pontjait könnyen megállapíthatjuk, mivel azok értelemszerűen a zérusvonalától legtávolabbi pontok lesznek (Az ábrán ezeket P_1 és P_2 jelöli). Ezekben a

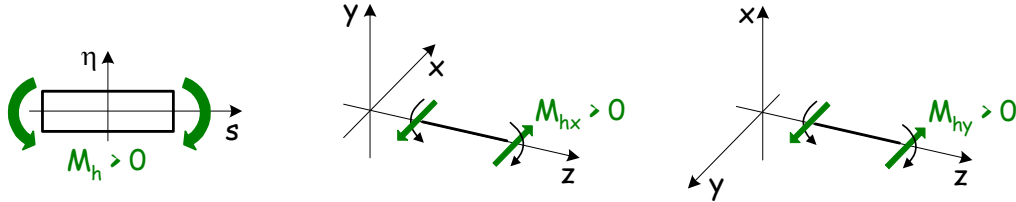


pontokban ébredő maximális feszültség a

$$\sigma_{z \max} = \sigma_z(P_1) = |\sigma_z(P_2)|.$$

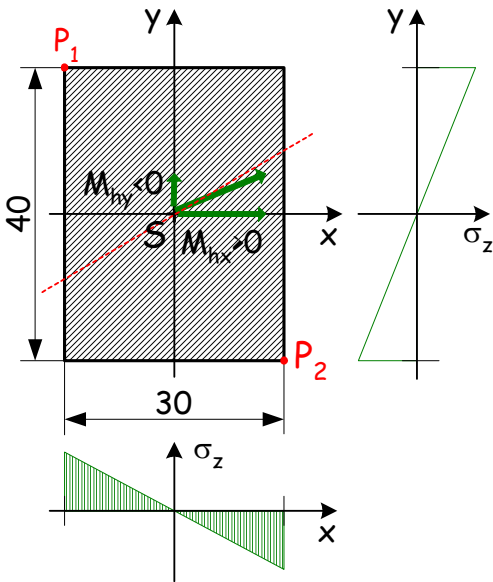
A feszültségcsúcsra történő méretezés és ellenőrzés során a ferde hajlítás esetén ébredő maximális $\sigma_{z \max}$ feszültség egy az anyagra jellemző feszültségből a biztonság figyelembevételével megállapított σ_{meg} megengedett feszültségen nem léphet túl, azaz $\sigma_{z \max} \leq \sigma_{meg}$.

MEGJEGYZÉS: Az igénybevételek előjelszabályából következően



az M_{hy} nyomaték pozitív előjelű, ha vektorának iránya y tengelyiránnyal ellentétes!

1. példa Az ábrán vázolt téglalapkeresztmetszetű prizmatikus rúd veszélyes K keresztmetszetének igénybevétele az S súlypontba redukált $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{M}_S = (240\vec{e}_x + 90\vec{e}_y)$ Nm eredő vektorkettőssel adott.



Határozzuk meg a zérusvonal egyenletét, majd jelöljük be a keresztmetszet ábráján a zérusvonalat, továbbá ellenőrizzük a rudat feszültségcsúcsra, ha $\sigma_{meg} = 80$ MPa!

Az \vec{M}_S nyomatékvektorból az előjelszabály figyelembevételével állapítjuk meg az

$$M_{hx} = 24 \cdot 10^4 \text{ Nmm} \quad \text{és} \quad M_{hy} = -9 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$$

súlyponti tehetetlenségi tengelyekre vett nyomatékokat és a keresztmetszet adataiból meghatározzuk a vonatkozó

$$I_x = \frac{30 \cdot 40^3}{12} = 16 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \quad \text{és} \quad I_y = \frac{40 \cdot 30^3}{12} = 9 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

másodrendű nyomatékokat.

Ezek behelyettesítésével a zérusvonal egyenlete az

$$y = -\frac{M_{hy} I_x}{M_{hx} I_y} x = -\frac{-9 \cdot 10^4 \cdot 16 \cdot 10^4}{24 \cdot 10^4 \cdot 9 \cdot 10^4} x = \frac{2}{3} x$$

lesz.

Az ábrán szaggatott piros vonallal bejelölt zérusvonalról legtávolabbi $P_1(-15, 20)$ mm és $P_2(15, -20)$ mm jelű pontok lesznek a keresztmetszet veszélyes pontjai.

A veszélyes pontokban ébredő

$$\sigma_{z \max} = \sigma_z(P_1) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_{P_1} + \frac{M_{hy}}{I_y} x_{P_1} = \frac{24 \cdot 10^4}{16 \cdot 10^4} (20) + \frac{-9 \cdot 10^4}{9 \cdot 10^4} (-15) = 45 \text{ MPa}$$

feszültség kisebb, mint a $\sigma_{meg} = 80$ MPa, tehát a rúd megfelel.

Húzás (nyomás) és egyenes hajlítás

A rúd keresztmetszete egyidejűleg húzásra (nyomásra) és egy a keresztmetszet súlyponti x tengelyével párhuzamos egyenes hajlításra van igénybevéve, akkor a keresztmetszet adott P pontjában a szuperpozíció elve alapján a két hatás

$$\sigma'_z(P) = \frac{N}{A} \quad \text{és} \quad \sigma''_z(P) = \frac{M_{hx}}{I_x} y_P$$

feszültsége összegződik, azaz $\sigma_z(P) = \sigma'_z(P) + \sigma''_z(P)$.

A feszültségcsúcsra történő méretezés és ellenőrzés során az ébredő maximális $\sigma_{z \max}$ feszültség egy az anyagra jellemző feszültségből a biztonság figyelembevételével megállapított σ_{meg} megengedett feszültségen nem léphet túl, azaz

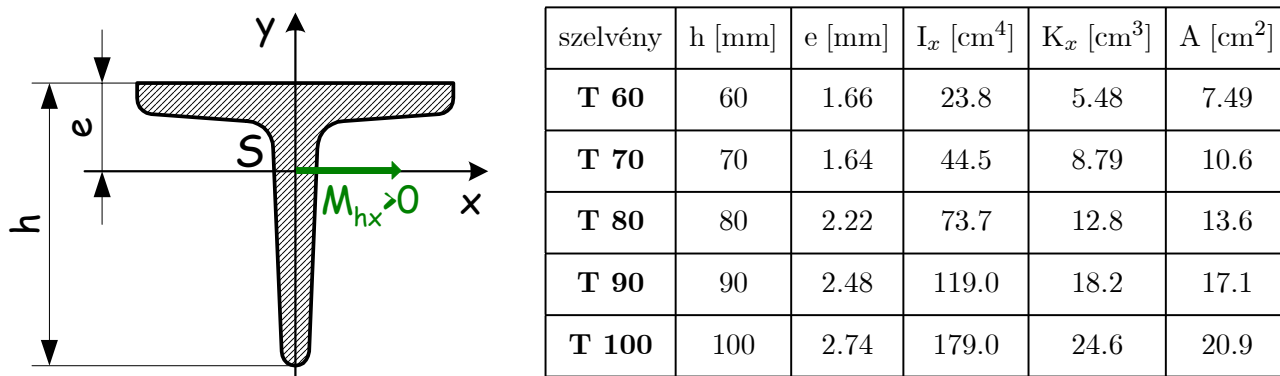
$$\sigma_{z \max} \leq \sigma_{meg}.$$

A keresztmetszet veszélyes pontjának és így $\sigma_{z \max}$ megkeresése az y tengelymenti feszültség eloszlások megrajzolásával történik.

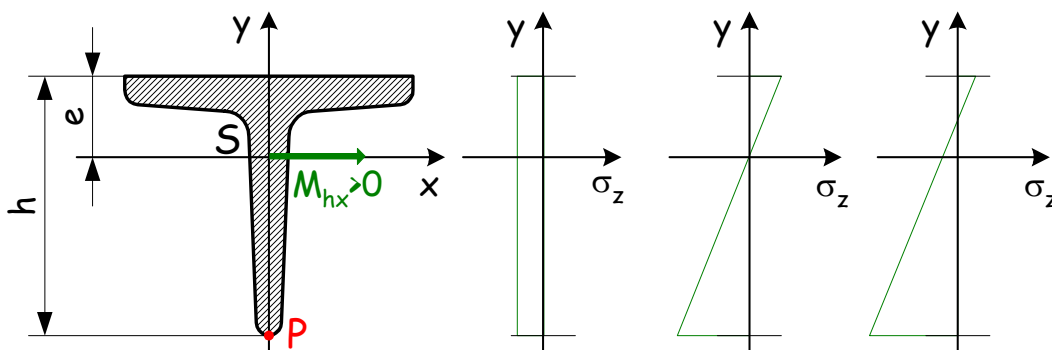
1. példa Egy T acélból készült tartó veszélyes K keresztmetszetének igénybevétele az S súlypontba redukált $\vec{F} = (-9\vec{e}_z)$ kN és $\vec{M}_S = (700\vec{e}_x)$ Nm eredő vektorkettőssel adott.

Méretezzük a tartót feszültségcsúcsra, ha anyagának $\sigma_F = 120$ MPa a folyási határa és $n_F = 2$ az előírt biztonsági tényező!

Az ábra mellett néhány, a szabványos T keresztmetszethez tartozó adatot foglaltunk össze:



A feladat megoldása az y tengelymenti feszültségeloszlás jelleghelyes megrajzolásával kezdődik. Ebből megállapítható a veszélyes pont a keresztmetszeten:



A feszültségi állapotok szuperpozíciója az y tengelymenti feszültségeloszlás összegzésével szemléletesen követhető. Így a bejelölt P pontban ébredő

$$\sigma_{z \max} = \frac{|N|}{A} + \frac{M_{hx}}{K_x}$$

feszültséget kell a korábban elmondottak szerint összevetni a $\sigma_{meg} = \sigma_F/n_F = 60$ MPa feszültséggel.

A $\sigma_{z \max}$ képletében ismeretlenként az A és K_x jelenik meg, ezért az egyszerűség miatt élünk a következő iterációs lehetőséggel:

Először hajlításra méretezzünk, majd a kapott eredménynél nagyobb, hozzá legközelebb eső szabványos keresztmetszet adataival ellenőrizzük nyomásra és hajlításra. Ha nem felel meg a keresztmetszet, akkor értelemszerűen a következő, nagyobb méretűt vesszük és arra ellenőrizzük. Ezt addig ismételjük, amíg a tartó meg nem felel.

$$\frac{M_{hx}}{K_x} \leq \sigma_{meg}$$

$$K_x \geq \frac{M_{hx}}{\sigma_{meg}} = \frac{7 \cdot 10^5}{60} = 11666.6 \text{ mm}^3 = 11.6 \text{ cm}^3$$

alapján a táblázatból a K_x alapján a **T 80** szelvényt választjuk ki.

Az ellenőrzést a **T 80** szelvény adataival elvégezve, a

$$\sigma_{z \max} = \frac{|N|}{A} + \frac{M_{hx}}{K_x} = \frac{9 \cdot 10^3}{1360} + \frac{7 \cdot 10^5}{12.8 \cdot 10^3} = 6.62 + 54.7 = 61.32 \text{ MPa} > \sigma_{meg}$$

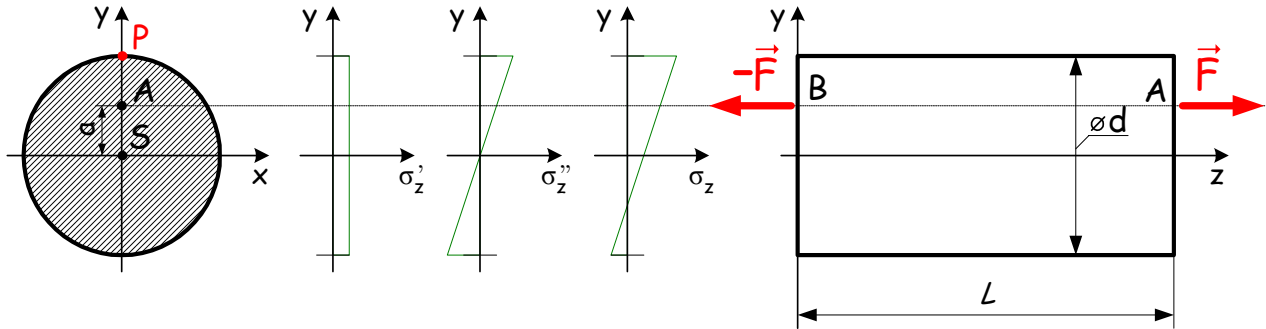
eredményre jutunk, így választjuk a rákövetkező T90 acélt, melyre a

$$\sigma_{z \max} = \frac{|N|}{A} + \frac{M_{hx}}{K_x} = \frac{9 \cdot 10^3}{1710} + \frac{7 \cdot 10^5}{18.2 \cdot 10^3} = 5.26 + 38.46 = 43.72 \text{ MPa} < \sigma_{meg}$$

lesz, azaz a **T 90** szelvény megfelel.

MEGJEGYZÉS: Az előbb bemutatott méretezési módszer pár lépés után mindig eredményre vezet.

2. példa Az ábrán vázolt $L = 0.6$ m hosszúságú és $d = 80$ mm átmérőjű körkeresztmetszetű rudat az $|\vec{F}| = 47.1$ kN nagyságú erők húzásra terhelik, amelyek hatásvonala A ($0; a = 20$ mm; L) és B ($0; a = 20$ mm; 0) pontokat összekötő z tengellyel párhuzamos egyenes.



Ellenőrizzük a rudat feszültségcsúcsra, ha $\sigma_{meg} = 30$ MPa!

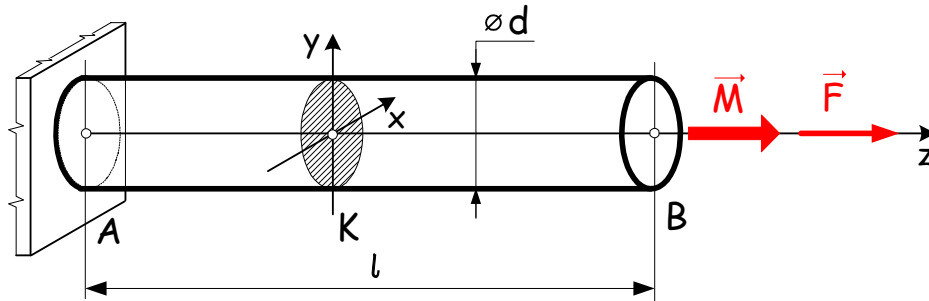
A rúdszakasz igénybevétele ún. excentrikus húzás lesz, mivel a húzóerők hatásvonala nem a keresztmetszetek S súlypontjain halad keresztül. Az \vec{F} erő S pontba redukálásával egy $M_{hx} = a|\vec{F}| = 20 \cdot 47.1 \cdot 10^3 = 942 \cdot 10^3$ Nmm nyomaték adódik, azaz a feladat húzásból és egyenes hajlításból álló összetett igénybevételre vezet. A feszültségeloszlás jelleghelyes megrajzolása után megállapítható, hogy a keresztmetszet veszélyes pontja a P pont. Itt ébred a

$$\sigma_{z \max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{K_x} = \frac{4N}{d^2\pi} + \frac{32M_{hx}}{d^3\pi} = \frac{4 \cdot 47.1 \cdot 10^3}{80^2\pi} + \frac{32 \cdot 942 \cdot 10^3}{80^3\pi} = 28.11 \text{ MPa}$$

feszültség, amely kisebb mint a $\sigma_{meg} = 30$ MPa így a rúd megfelel.

Húzás (nyomás) és csavarás

A kör-, vagy körgyűrűkeresztmetszetű rudat egyidejűleg húzás (zömök rúd esetén esetleg nyomás) és csavarás veszi igénybe. Az ábrán látható módon a prizmatikus rúdnak a z tengely a középvonala és az \vec{M} és \vec{F} vektorok B keresztmetszetből kifelé mutatva az igénybevételi előjelszabályok alapján pozitív előjelű csavarást és húzást okoznak.



A rúd egy P pont feszültségi állapota a két megadott egyszerű igénybevétel által okozott feszültségi állapotokból a $\underline{\underline{T}}_P = \underline{\underline{T}}'_P + \underline{\underline{T}}''_P$ módon szuperponálódik, azaz

$$\underline{\underline{T}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

A feszültségcsúcsra történő ellenőrzés, méretezés során először veszélyesség (károsodás) alapján hasonlítjuk össze a rúd pontjaiban előálló feszültségi állapotokat, majd a legveszélyesebb pontra végezzük el az ellenőrzést, méretezést. Húzás (nyomás) és csavarás esetén a tenzorban (feszültségi állapotban) σ és τ feszültségek is szerepelnek. Így a vizsgált feszültségi állapotok közvetlenül nem hasonlíthatóak össze egymással, ezért az őket helyettesítő egyszerű, de veszélyességi szempontból velük egyenértékű feszültségi állapotokat keresünk.

A legegyszerűbb feszültségi állapot az egyetlen σ_1 főfeszültséggel ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) jellemezhető egytengelyű feszültségi állapot. Az eddig tárgyalt esetek ide tartoztak.

A $\underline{\underline{T}}_P$ tenzor által leírt feszültségi állapothoz keressük meg a veszélyesség szempontjából vele egyenértékű egytengelyű feszültségállapotot, amelyet az illető (általános) feszültségi állapothoz tartozó σ_{red} jelű redukált (egyenértékű) feszültségnek nevezzük.

A megadott $\underline{\underline{T}}_P$ tenzorhoz a

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2}$$

főfeszültségek tartoznak. Ezek segítségével képezzük a Mohr elmélet szerint

$$\sigma_{red}^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi z}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\varphi z}^2}$$

a Huber-Mises-Henckey (von Mises) elmélet szerint pedig a

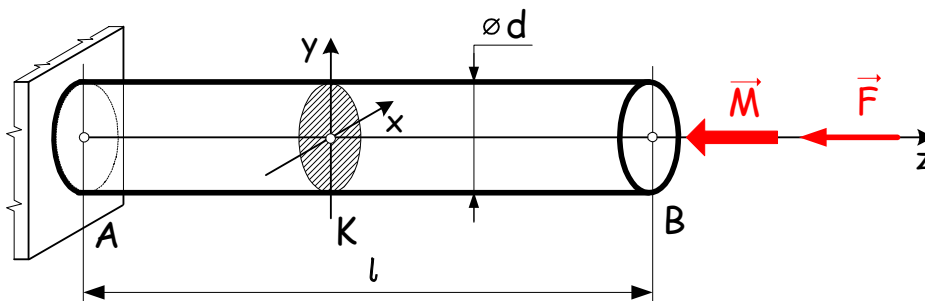
$$\sigma_{red}^{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{\varphi z}^2}$$

redukált feszültségeket, amelyek birtokában a

$$\sigma_{red\max} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + \beta\tau_{\max}^2} \leq \sigma_{meg}$$

képlet szerint a szokott módon méretezünk, ahol $\beta = 4$ Mohr szerint és $\beta = 3$ HMH szerint.

1. példa Az ábrán vázolt, baloldali végén befogott, $d = 40$ mm átmérőjű, $l = 600$ mm hosszú, tömör tengelyt az $\vec{M} = (-50.24\vec{e}_z)$ Nm nyomaték és a $\vec{F} = (-7.536\vec{e}_z)$ kN erő terheli.



Ellenőrizzük a rudat feszültségcsúcsra a Huber-Mises-Henckey-féle elmélet alapján, ha $\sigma_{meg} = 10$ MPa!

A tengely teljes hossza mentén a csavarónyomaték és a nyomóerő nagysága állandó, ezért a tengely minden egyes keresztmetszete egyformán veszélyes. Kiválasztva ezek közül az egyiket a keresztmetszet tengelyei mentén ábrázoljuk a feszültségeloszlásokat. Jól látható módon a veszélyes pontok az ábrán pirossal megjelölt kerületi pontok lesznek. A kerület egyes pontjaiban egyidejűleg pedig a

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} = \frac{4 \cdot 7536}{40^2\pi} \cong 6 \text{ MPa}$$

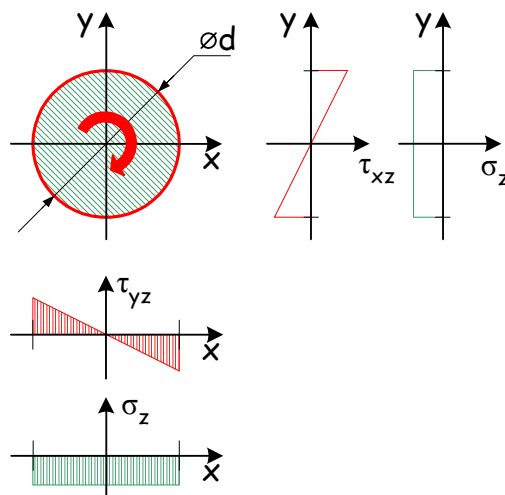
és

$$\tau_{\max} = \frac{|M_c|}{K_P} = \frac{16 \cdot 50240}{40^3\pi} \cong 4 \text{ MPa}$$

feszültségek ébrednek. Az ezekből számított Huber-Mises-Henckey-féle elmélet szerint vett

$$\sigma_{red\max}^{HMH} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sqrt{6^2 + 3 \cdot 4^2} = 9.165 \text{ MPa}$$

maximális redukált feszültség kisebbnek adódik, mint a megengedett $\sigma_{meg} = 10$ MPa feszültség. Így a tengely megfelel.



Hajlítás és csavarás

A hajlításból és csavarásból álló összetett igénybevétel esetében is csak a kör-, illetve körgyűrűkeresztmetszetű prizmatikus rúd méretezésének és ellenőrzésének kérdéseit vizsgáljuk.

Az előzőek alapján a redukált feszültség számítását kell elvégezni a feszültségi állapotok összevetéséhez, mivel a pontbeli feszültségi állapotot jellemző, $R\varphi z$ hengerkoordináta-rendszerben felírt \underline{T} tenzorban σ_z és $\tau_{\varphi z}$ feszültségek vannak.

Az igénybevételi ábrák alapján megállapított veszélyes C keresztmetszeten tisztán hajlításból a hajlítás tengelyétől vett legtávolabbi pontok (piros színnel jelölt P_1 és P_2 pontok), míg csavarásból a kerületi pontok (zöld színnel jelöltek) adódnak veszélyesnek. Ebből következik, hogy összetett igénybevétel esetén a P_1 és P_2 pontok jelölik a keresztmetszet veszélyes pontjait. A P_1 (és így a P_2) jelű veszélyes pontban a

$$\sigma_{\max} = \sigma_z(P_1) = \frac{M_{hx}(C)}{K_x} \quad \text{és} \quad \tau_{\max} = |\tau_{\varphi z}(P_1)| = \frac{M_c(C)}{K_P}$$

feszültségek ébrednek. A redukált feszültség számítására pedig a

$$\sigma_{red\max} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + \beta\tau_{\max}^2} \leq \sigma_{meg}$$

képlet érvényes, ahol $\beta = 4$ Mohr és $\beta = 3$ HMH szerint.

Behelyettesítve ebbe az összefüggésbe a σ_{\max} és τ_{\max} képletét, valamint kihasználva azt, hogy kör-, illetve körgyűrűkeresztmetszetek esetén $K_P = 2K_x$ és a K_x keresztmetszeti tényezőt a nevezőben kiemelve kapjuk, hogy

$$\sigma_{red\max} = \sqrt{\left[\frac{M_{hx}(C)}{K_x}\right]^2 + \beta \left[\frac{M_c(C)}{2K_x}\right]^2} = \frac{1}{K_x} \underbrace{\sqrt{M_{hx}^2(C) + \frac{\beta}{4}M_c^2(C)}}_{M_{red\max}}$$

Bevezetve az M_{red} jelű **redukált nyomatékot** a feszültségcsúcsra történő méretezést, ellenőrzést a

$$\frac{M_{red\max}}{K_x} \leq \sigma_{meg}$$

képlet alapján végezzük el.

A tengely méretezése tehát a redukált nyomaték ismeretében úgy történik, mintha a tengelyt az M_{red} nyomaték hajlításra terhelné.

A tengely veszélyes keresztmetszete pedig a vonatkozó nyomatéki ábrák megrajzolása után a tengely keresztmetszeteinél számított redukált nyomatékok összevetésével kerül kiválasztásra. A veszélyes keresztmetszetben ébredő legnagyobb redukált nyomatékot $M_{red\max}$ jelöli. A σ_{meg} megengedett feszültség ismeretében pedig ebből kiszámítjuk a szükséges

$$K_{xszüks.} = \frac{M_{red\max}}{\sigma_{meg}}$$

keresztmetszeti tényezőt, amely birtokában a tengely átmérőjét kiválasztjuk.

MEGJEGYZÉS: A gyakorlatban előfordul, hogy egy általánosan terhelt tengely esetén célszerű külön-külön megrajzolni az M_{hx} és M_{hy} nyomatéki ábrákat. A két nyomaték $M_{hx}\vec{e}_x$ és $-M_{hy}\vec{e}_y$ vektora egymásra merőleges, ezért az

$$M_h^2 = M_{hx}^2 + M_{hy}^2$$

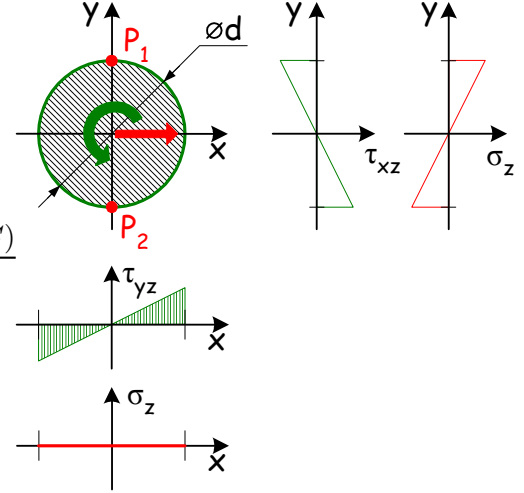
lesz az eredőjük négyzete. Ezt helyettesítve az M_{red} összefüggésbe a hajlítónyomaték helyett az

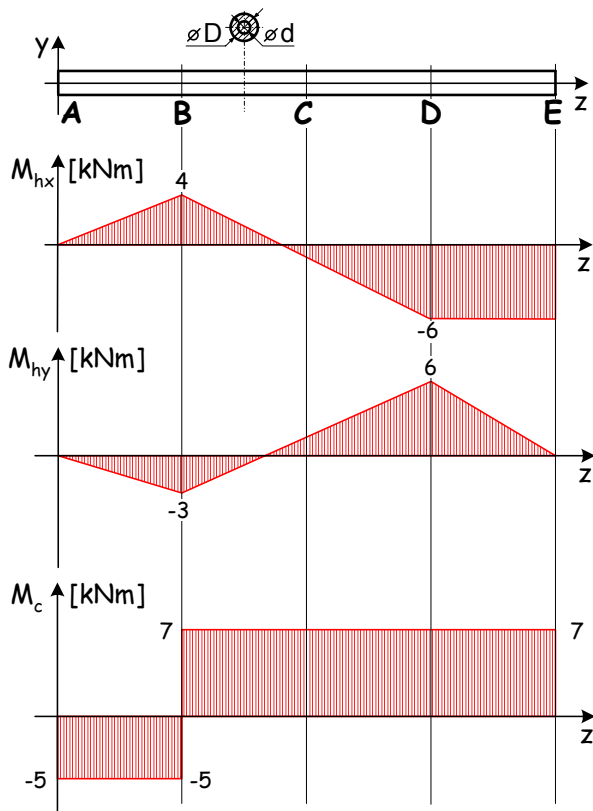
$$M_{red} = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2 + \frac{\beta}{4}M_c^2}$$

képletre jutunk.

1. példa Ismeretesek a D külső és d belső átmérővel rendelkező körgyűrű keresztmetszetű, prizmatikus tengely hajlító és csavarónyomatéki ábrái.

Méretezzük a tengelyt feszültségcsúcsra Mohr-féle elmélet szerint a $D/d = 2$ átmérőviszony és a tengely anyagára vonatkozó $\sigma_{meg} = 200$ MPa ismeretében!





A megadott nyomatéki ábrák alapján keressük a tengely veszélyes keresztmetszetét. E célból a veszélyesnek tűnő keresztmetszetekben a Mohr elmélet szerint számított redukált nyomatékok kiszámítását és egymással történő összehasonlítását végezzük el:

A B^+ keresztmetszetben

$$M_{red}^{Mohr}(B^+) = \sqrt{4^2 + 3^2 + 7^2} = 8.6 \text{ kNm}$$

a D keresztmetszetben pedig

$$M_{red}^{Mohr}(D) = \sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2} = 11 \text{ kNm}$$

a redukált nyomaték nagysága, azaz a D keresztmetszet a veszélyes. Így $M_{red\max}^{Mohr} = M_{red}^{Mohr}(D)$.

A K_x képletét a $D = 2d$ átmérőviszony helyettesítésével a

$$K_x = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32D} = \frac{(16d^4 - d^4) \pi}{64d} = \frac{15d^3 \pi}{64}$$

alakra hozzuk. Ezt behelyettesítve jutunk a méretezés

$$\frac{64M_{red\max}^{Mohr}}{15d^3 \pi} \leq \sigma_{meg}$$

képletére, ebből pedig a

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{64M_{red\max}^{Mohr}}{15\sigma_{meg}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{64 \cdot 11 \cdot 10^6}{15 \cdot 200\pi}} = 42.115 \text{ mm}$$

eredmény adódik a belső átmérőre.

Ajánlott irodalom

- [1.] Mechanikai Tanszék Munkaközössége. Szilárdságtan I., TankönyvKiadó, Budapest, 1977.
- [2.] Mechanikai Tanszék Munkaközössége. Mechanikai Példatár I., TankönyvKiadó, Budapest, 1980.
- [3.] Mechanikai Tanszék Munkaközössége. Mechanikai Példatár II., TankönyvKiadó, Budapest, 1990.
- [4.] H. G. Steger, J. Sieghart, E. Glauning. Műszaki mechanika 1. Statika, súrlódás, szilárdságtan, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993.
- [5.] A. Böge, W. Schlemmer. Mechanikai és szilárdságtani feladatgyűjtemény, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993.