Rugalmasságtan

II. előadás
készítette: Dr. Lengyel Ákos József

2020. március 7.

2. A lineáris rugalmasságtan alapegyenletei, a lehetséges peremfeltételek (folytatás)

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Rugalmas testnek nevezzük a kontinuumot, ha a kontinuum mozgása során a feszültségtenzor a kontinuum minden egyes pontjában egyértelmű függvénye az alakváltozási tenzornak.

Az alakváltozási tenzor függhet még további nem mechanikai mennyiségektől is:

- hőmérséklet,
- villamos térerősség,
- entrópia,
- stb.

A $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$ és $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$, vagyis a feszültségi és alakváltozási állapot között fennálló függvénykapcsolatot hívjuk a rugalmas test anyagegyenletének.

Homogén anyagtörvényről beszélünk, ha ez az összefüggés független a helykoordinátáktól. Ha a test izotróp, akkor a feszültségi és alakváltozási tenzorok főirányai összeesnek. (izotrópia=iránytól való függetlenség)

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Lineárisan rugalmas anyagból készült próbatest (rúd) egytengelyű húzóvizsgálatából nyert eredmények (egyszerű Hooke-törvény):

$$\sigma = E\varepsilon, \qquad \varepsilon_k = -\nu\varepsilon,$$

ahol ε_k a keresztirányú fajlagos nyúlás, E az anyagra jellemző rugalmassági modulus és ν pedig a Poisson-tényező. A nyíróvizsgálatok jelleggörbéi alapján bizonyos feszültségszintig a következő lineáris kapcsolat is fennáll a nyírófeszültség és a szögtorzulás között:

$$\tau = G\gamma,$$

itt G az anyag csúsztató rugalmassági modulusa.

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Izotróp anyagok esetében az alakváltozási és a feszültségi tenzor főtengelyei megegyeznek. Ezen főtengelyek által alkotott koordináta-rendszerben ($\vec{\boldsymbol{n}}_1, \vec{\boldsymbol{n}}_2, \vec{\boldsymbol{n}}_3$) a következőket lehet írni

$$\varepsilon_i = C_{i1}\sigma_1 + C_{i2}\sigma_2 + C_{i3}\sigma_3, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Tiszta húzásra vonatkozó képletek alapján (az egyszerű Hooke-törvényt behelyettesítve):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_3 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Izotróp anyag esetén ez fennáll bármely irányban, így kapunk 3 skalár egyenletet DDKR-ben

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\
\varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\
\varepsilon_z &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)
\end{aligned}$$

Illetve ekkor fennáll újabb 3 skalár egyenlet

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Lineárisan rugalmas anyag estén fennáll

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2G}$$

Így összefoglalva az eredményeket, beírva a skalár koordinátákat az alakváltozási tenzorba kapjuk

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \frac{1}{2G}\left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} - \frac{\nu}{1+\nu} T_{\mathrm{I}} \underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right], \qquad T_{\mathrm{I}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

Ezt nevezzük általános Hooke-törvénynek. A feszültségi tenzorra is felírható az általános Hooke-törvény

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = 2G\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_{\mathrm{I}} \underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right], \qquad A_{\mathrm{I}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Az általános Hooke-törvény a Lamé-állandókkal (μ, λ)

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = 2\mu \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \lambda A_{\mathrm{I}} \underline{\underline{\boldsymbol{1}}}$$

$$\mu = G, \qquad \lambda = 2G\frac{\nu}{1-2\nu} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Kapcsolat az első skaláris invariánsok között

$$T_{\mathrm{I}} = 2GA_{\mathrm{I}} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} A_{\mathrm{I}} \underbrace{1_{\mathrm{I}}}_{3} = \underbrace{2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}}_{3K} A_{\mathrm{I}}$$

ahol K a térfogati rugalmassági modulus. Az anyagegyenlet felírásához tömörített jelölést szoktunk alkalmazni, a feszültségtenzor és az alakváltozási tenzor független koordinátáit egy-egy vektorba rendezzük

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad \sigma_4 = \tau_{yz}, \quad \sigma_5 = \tau_{xz}, \quad \sigma_6 = \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_4 = \gamma_{yz}, \quad \varepsilon_5 = \gamma_{xz}, \quad \varepsilon_6 = \gamma_{xy}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Ezzel a tömör írásmóddal anizotróp anyagra is felírható az anyagegyenlet

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{6} C_{ij}\varepsilon_j, \qquad (i = 1, \ldots, 6)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}}_{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$$

Vagyis tömören felírva az anyagegyenletet

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

ahol $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ az anyagállandók mátrixa, vagy merevségi mátrix összesen 36 db állandót tartalmaz.

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

A fajlagos alakváltozási energia definíció szerint

$$u(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int\limits_{\underline{\mathbf{0}}}^{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \underline{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int\limits_{\underline{\mathbf{0}}}^{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \sigma_i \mathrm{d}\varepsilon_i = \int\limits_{\underline{\mathbf{0}}}^{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \varepsilon_i C_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_j = \int\limits_{0}^{\varepsilon_i} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_i C_{ij}\varepsilon_j\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_i C_{ij}\varepsilon_j = \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Ez alapján

$$\frac{\partial u(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij}\varepsilon_j, \qquad \frac{\partial^2 u(\underline{\boldsymbol{\varepsilon_1}})}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} = \frac{\partial^2 u(\underline{\boldsymbol{\varepsilon_1}})}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \qquad \rightarrow \qquad \underline{\underline{\boldsymbol{C}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^{\mathrm{T}}$$

tehát az anyagállandók mátrixa szimmetrikus. Így a mátrixban a független anyagállandók száma: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ db anizotróp, lineárisan rugalmas anyagok esetén.

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Egy szimmetria síkkal rendelkező anizotróp anyag (monoklin rendszer) merevségi mátrixa

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Az anyagegyenlet inverz alakja

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\underline{\boldsymbol{S}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}$$

itt $\underline{\underline{\boldsymbol{S}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^{-1}$ az ún. alakíthatósági mátrix, szintén szimmetrikus és általános esetben 21 db független állandót tartalmaz. Rombikus szimmetriának eleget tevő faanyag esetén például

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{S}}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & -\frac{\nu_{TR}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} \end{bmatrix}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

Lineárisan rugalmas, izotróp anyag merevségi mátrixa

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\right] = \frac{2G}{1-2\nu}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

A hőmérséklet-változás figyelembevétele: a hőmérséklet-változás hatására fellépő deformációt a következő alakban lehet felírni izotróp anyag esetén

$$\varepsilon = \alpha(T - T_0)$$

ahol α az anyagra jellemző lineáris hőtágulási együttható, T_0 a test referencia, vagy kezdeti hőmérséklete, melyen deformáció és feszültségmentes, illetve T a test pillanatnyi hőmérséklete. Ez a törvény izotróp anyag esetén minden irányban fennáll. Ha a rugalmas test kis alakváltozást szenved, miközben egyszerre hat rá mechanikai és hőterhelés is, akkor a teljes deformációt a két terhelésből származó deformáció összegeként lehet értelmezni, így az anyagegyenlet hőrugalmas testre

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \underbrace{\frac{1}{2G}\left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} - \frac{\nu}{1+\nu} T_{\mathrm{I}} \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right]}_{\text{mechanikai terhelés}} + \underbrace{\alpha(T - T_0)\underline{\underline{\mathbf{1}}}}_{\text{hőterehelés}}$$

A törvény inverz alakja

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_{\mathrm{I}} \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right] - \frac{E}{1-2\nu}\alpha(T - T_0)\underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

2.3.1. Példa: Tekintsük adottnak a korábbi 2.1.4. Példában egy lineárisan rugalmas, izotróp testre kiszámított $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ alakváltozási tenzort:

$$\underset{(x,y,z)}{\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right]} = \begin{bmatrix} -\nu\Gamma y & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\Gamma y & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma y \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a feszültségi tenzort!
Ehhez a Hooke-törvény következő alakjára van szükségünk:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = 2G\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu}A_{\mathrm{I}}\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right]$$

Mivel az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzornak csak a főátlójában találhatóak elemek, a feszültségi tenzorban is csak a normálfeszültségek lehetnek zérustól különbözőek:

$$\sigma_x = -2G\nu\Gamma y + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(-2\nu\Gamma y + \Gamma y) = -2G\nu\Gamma y + 2G\nu\Gamma y = 0$$

$$\sigma_y = -2G\nu\Gamma y + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(-2\nu\Gamma y + \Gamma y) = -2G\nu\Gamma y + 2G\nu\Gamma y = 0$$

$$\sigma_z = 2G\Gamma y + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(-2\nu\Gamma y + \Gamma y) = 2G\Gamma y + 2G\nu\Gamma y = 2G(1+\nu)\Gamma y = E\Gamma y$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

2.3.2. Példa: Legyen adott egy lineárisan rugalmas, izotróp test alakváltozási tenzora HKR-ben (2.1.5. Példa alapján)

$$\underset{(r,\varphi,z)}{\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right]} = cr^2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a feszültségi tenzort HKR-ben!
Az anyagegyenletet invariáns alakban adtuk meg, így ugyanaz az alakja, mint a DDKR-ben, vagyis

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = 2G\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right]$$

A mellékátlóbeli elemek esetében most is zérus értékek helyezkednek el a feszültségi tenzorban ott, ahol az alakváltozási tenzorban is. A főátlóbeli elemeket tekintve:

$$\sigma_r = 6Gcr^2 + \frac{2G\nu}{1-2\nu} 4cr^2 = \left(6 + \frac{8\nu}{1-2\nu}\right) Gcr^2 = \frac{6-4\nu}{1-2\nu} Gcr^2$$

$$\sigma_\varphi = 2Gcr^2 + \frac{2G\nu}{1-2\nu} 4cr^2 = \left(1 + \frac{4\nu}{1-2\nu}\right) 2Gcr^2 = \frac{1+2\nu}{1-2\nu} 2Gcr^2$$

$$\sigma_z = 0 + \frac{2G\nu}{1-2\nu} 4cr^2 = \frac{8\nu}{1-2\nu} Gcr^2$$

2.3. Lineárisan rugalmas test anyagegyenlete

2.3.3. Példa: Bizonyítsuk be, hogy megválasztható a $\Delta T = T - T_0$ hőmérséklet-különbség oly módon, hogy egyenletes p nyomásnak kitett lineárisan rugalmas, izotróp test feszültségmentes legyen!
Ha egyenletes nyomásnak teszünk ki egy testet, az azt jelenti, hogy a testet minden irányból azonos p nyomás terhel, mely csak nomrálfeszültséget eredményez a testen belül, nyírófeszültséget nem. Ez alapján a mechanikai terhelésből származó feszültségi tenzor a következő alakba írható

$$\underset{(x,y,z)}{\left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_m\right]} = \left[-p\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

A hőrugalmas test anyagegyenletét figyelembe véve a hőterhelésből származó feszültségi tenzor a következő

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_h = -\frac{E}{1-2\nu}\alpha(T - T_0)\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}$$

Ahhoz, hogy feszültségmentes legyen a test, a mechanikai és hőterhelésből származó feszültségek összege zérus kell legyen, tehát

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_m + \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_h = \underline{\underline{\boldsymbol{0}}} = -\left[p + \frac{E}{1-2\nu}\alpha(T - T_0)\right]\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}$$

2.3.3. Példa folytatása

Ez alapján írható, hogy a zárójelben található kifejezés kell zérus legyen, amit ha átrendezünk

$$T = T_0 - \frac{1-2\nu}{E\alpha}p$$

Legyen $T_0 = 20$ C$^\circ$, $\nu = 0{,}29$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{C}^\circ}$, $p = 100$ MPa, $E = 204$ GPa. Ezeket behelyettesítve az előző képletbe azt kapjuk, hogy

$$T = 20 - \frac{1 - 2 \cdot 0{,}29}{204000 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} \cdot 100 = 2{,}84\ \mathrm{C}^\circ$$

Tehát ha ekkora hőmérsékletre lehűtjük a testet, akkor a 100 MPa-os nyomás hatására kialakuló feszültség a testben megszűnik.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

I. Primál rendszer:
Ekkor alapváltozónak tekintjük a test elmozdulásmezőjét: $\vec{\boldsymbol{u}} = u\vec{\boldsymbol{e}}_x + v\vec{\boldsymbol{e}}_y + w\vec{\boldsymbol{e}}_z$. Ennek a vektornak a 3 koordinátája 3 db ismeretlent jelent. Keressük még továbbá az alakváltozást leíró mennyiségeket, ez a mi esetünkben az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ alakváltozási tenzor elemeit jelenti, mely a tenzor szimmetriája miatt összesen 6 db további ismeretlen (ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}). Ezenkívül meg kell határozni a testben kialakuló feszültségeket is, azaz a $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$ feszültségi tenzor koordinátáit is, ami ennek a tenzornak a szimmetriája miatt szintén 6 db ismeretlent jelent (σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}). Mindent összevetve 15 db ismeretlent tartalmaz a feladat.

Mezőegyenletek:
Az előbbiekben áttekintett fejezetekben láttuk, hogy ezek között az ismeretlenek között kapcsolatot lehet teremteni. Az első egyenlet az ún. kinematikai vagy geometriai egyenlet, mely az elmozdulásmező és az alakváltozások között teremt kapcsolatot:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}\right)$$

Ez egy tenzoregyenlet, melyből 6 db független skaláregyenlet állítható elő. Ezek például DDKR-ben:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

A második egyenlet az alakváltozási jellemzők és a feszültségek között teremt kapcsolatot, ez az ún. anyagegyenlet, mely lineárisan rugalmas, izotróp anyag esetén

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = 2G\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu}A_{\mathrm{I}}\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right]$$

Ez egy újabb tenzoregyenlet melyből újabb 6 skaláregyenlet állítható elő. Ezek DDKR-ben:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right) = 2G\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_y+\varepsilon_z\right)\right]$$

$$\sigma_y = 2G\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_z\right)\right]$$

$$\sigma_z = 2G\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)\right]$$

$$\tau_{xy} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{xy} = G\gamma_{xy}, \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Végül az utolsó egyenlet, amely biztosítja a test egyensúlyát, ez pedig az egyensúlyi egyenlet

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \nabla + \vec{\boldsymbol{q}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

mely egy vektoregyenlet, ennek megfelelően 3 db skaláregyenlet állítható elő belőle. Ezek DDKR-ben:

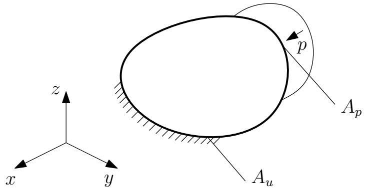
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z = 0$$

Tehát ebből a 3 mezőegyenletből nyertünk összesen 15 db skaláregyenletet a 15 db ismeretlenre. Ám ezek között az egyenletek között szerepel több differenciálegyenlet is, így a probléma egyértelmű megoldásához szükségünk van peremfeltételi előírásokra is.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata



Egy valós feladat esetén a testre működik valamilyen külső terhelés és emellett valamilyen kényszerrel biztosítják a test egyensúlyát. Így a test külső felületét két részre tudjuk bontani: A_u-val jelöljük azt a felületet, ahol a kényszerek működnek, és A_p-vel, ahol pedig a terhelések (azt a felület részt, amelyen nincs kényszer, és terhelve sincs, a terhelt felülethez soroljuk, ahol 0 a terhelés). Ennek megfelelően a test teljes felülete előáll ennek a két felületnek az összegeként ($A_u \cup A_p = A$), viszont közös része a két felületnek nem lehet ($A_u \cap A_p = \{0\}$).

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Így kétféle peremfeltételi előírás tehető. A kényszerek előírják, hogy a megtámasztott felület pontjainak mekkora az elmozdulása, ezt nevezzük kinematikai peremfeltételnek:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}_0 \qquad \vec{\boldsymbol{r}} \in A_u$$

A terhelések pedig a terhelt felület pontjaiban előírják a feszültségek értékét, ezt nevezzük dinamikai peremfeltételnek:

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} \qquad \vec{\boldsymbol{r}} \in A_p$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Így már a feladat elvileg megoldható, ismerve a 15 skaláregyenletet illetve a 15 ismeretlent, és az előírható peremfeltételeket. Ennek a kapcsolt differenciálegyenlet-rendszernek a megoldása azonban rendkívül bonyolult, ezért előállítjuk a rendszer ún. alapegyenletét. Továbbra is az elmozdulásmezőt tekintjük alapváltozónak: $\vec{\boldsymbol{u}} = u\vec{\boldsymbol{e}}_x + v\vec{\boldsymbol{e}}_y + w\vec{\boldsymbol{e}}_z$. Ezek után pedig az előállított mezőegyenleteket kifejezzük, mint ennek az $\vec{\boldsymbol{u}}$ elmozdulásmezőnek a függvénye. Vizsgáljuk először a kinematikai egyenletet:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}\right)$$

Ez rendben van, kifejeztük az alakváltozásokat az elmozdulásmezővel. A következő az anyagegyenlet, amelybe behelyettesítjük a kinematikai egyenletet:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = 2G\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu}A_{\mathrm{I}}\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right] = 2G\left[\frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}A_{\mathrm{I}}\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right] =$$

$$= G\left(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}\right) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\left(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}$$

mivel

$$A_{\mathrm{I}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{u}} = \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Ezzel kifejeztük a feszültségeket, mint az elmozdulásmező függvényeit. Ezt behelyettesítjük az egyensúlyi egyenletbe:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \nabla + \vec{\boldsymbol{q}} = \left[G \left(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}} \right) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \left(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \right) \underline{\underline{\boldsymbol{1}}} \right] \cdot \nabla + \vec{\boldsymbol{q}} =$$

$$= G(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla) \cdot \nabla + G(\nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \nabla + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}})\nabla + \vec{\boldsymbol{q}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Nézzük külön a tagokat

$$G(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla) \cdot \nabla = G\vec{\boldsymbol{u}} \underbrace{(\nabla \cdot \nabla)}_{\Delta} = G\Delta\vec{\boldsymbol{u}}$$

$$G(\nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \nabla = G\nabla(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla) = G\nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}})$$

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}})\nabla = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}})$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

A második és harmadik tag tartalmazza a $\nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}})$ szorzatot valamint a G-t, vagyis ezt a két tagot össze tudjuk adni

$$G\left(1+\frac{2\nu}{1-2\nu}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}}) = G\left(\frac{1-2\nu}{1-2\nu}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}}) = G\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}})$$

Ezeket visszaírva az egyensúlyi egyenletbe

$$G\Delta\vec{\boldsymbol{u}} + G\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}}) + \vec{\boldsymbol{q}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Végigosztva az egyenletet G-vel

$$\Delta\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{q}}}{G} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Ez az egyenlet a primál rendszer alapegyenlete, az ún. Lamé-Navier egyenlet. Jól látszik, hogy így a probléma egy vektoregyenlettel leírható, melyben csak az elmozdulásmező 3 koordinátája ismeretlen, és ennek megfelelően 3 skalár egyenlet állítható elő belőle.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Nézzük részletesen az egyenletet DDKR-ben

$$\Delta u\vec{\boldsymbol{e}}_x + \Delta v\vec{\boldsymbol{e}}_y + \Delta w\vec{\boldsymbol{e}}_z + \frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_z\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) +$$

$$+\frac{q_x}{G}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{q_y}{G}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{q_z}{G}\vec{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Ez alapján a 3 skaláregyenlet tehát a következő

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{q_x}{G} = 0$$

$$\Delta v + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{q_y}{G} = 0$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{q_z}{G} = 0$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Most is egy differenciálegyenlet-rendszert kaptunk, tehát az egyértelmű megoldáshoz szükségünk van peremfeltételi előírásokra. A korábban említett két peremfeltételi előírás nem változott, továbbra is a kinematikai és a dinamikai peremfeltételeket kell előírni. A kinematikai peremfeltétel alakja nem változik, az eleve az elmozdulásmezővel van felírva

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}_0 \qquad \vec{\boldsymbol{r}} \in A_u$$

Viszont a dinamikai peremfeltételi előírásban feszültségek szerepelnek, így ezt is ki kell fejeznünk az elmozdulásmezővel, hogy az alapegyenletből előállítható megoldásokra alkalmazni tudjuk.

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \left[G \left(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}} \right) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \left(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \right) \underline{\underline{\boldsymbol{1}}} \right] \cdot \vec{\boldsymbol{n}} =$$

$$= G(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} + G(\nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}})\vec{\boldsymbol{n}} =$$

$$= G\left[\overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) + \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) + \frac{2\nu}{1-2\nu}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}})\vec{\boldsymbol{n}} \right]$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

A kifejtési tételt felhasználva az alábbi alakban kifejezzük az előző egyenletben a zárójelben található második tagot

$$\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{n}} = (\nabla \times \vec{\boldsymbol{u}}) \times \vec{\boldsymbol{n}} = \overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) - \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}})$$

$$\nabla(\overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) = \overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) - \mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{n}} = \overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) + \vec{\boldsymbol{n}} \times \mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{u}}$$

Ezt visszaírjuk a peremfeltételbe, így

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = G\left[\overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) + \overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) + \vec{\boldsymbol{n}} \times \mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{2\nu}{1-2\nu}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}})\vec{\boldsymbol{n}}\right] =$$

$$= 2G\left[\overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{n}} \times \mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}})\vec{\boldsymbol{n}}\right] = \vec{\boldsymbol{p}} \qquad \vec{\boldsymbol{r}} \in A_p$$

Ez lesz a dinamikai peremfeltétel kifejezve az elmozdulásmezővel.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Összefoglalva:
Tehát a rugalmasságtani feladat a következő alapegyenlettel és peremfeltételekkel fogalmazható meg *primál rendszerben*:

- Alapegyenlet (Lamé-Navier egyenlet): $\Delta\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{u}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{q}}}{G} = \vec{\boldsymbol{0}}$,
- Kinematikai peremfeltétel: $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}_0 \qquad \vec{\boldsymbol{r}} \in A_u$,
- Dinamikai peremfeltétel: $2G\left[\overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{n}}) + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{n}}\times\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{u}})\vec{\boldsymbol{n}}\right] = \vec{\boldsymbol{p}} \qquad \vec{\boldsymbol{r}} \in A_p$

Ez az alapegyenlet és a hozzá tartozó peremfeltételek alkotják a rugalmasságtan első peremérték-feladatát. Meghatározva az elmozdulásmezőt a kinematikai egyenletekkel előállíthatók az alakváltozási tenzor elemei, melyeket beírva az anyagegyenletbe a feszültségi tenzor elemei is számíthatóak.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Duál rendszer:

A kiindulási egyenletek (kinematikai egyenlet, anyagegyenlet és egyensúlyi egyenlet) változatlanok, ahogy a peremfeltételek és az ismeretlenek is. Ebben az esetben azonban a feszültségeket tekintjük alapváltozóknak és a peremérték-feladatot a feszültségekkel, mint ismeretlenekkel fogalmazzuk meg. Ennek a feladatnak az alapegyenletét fogjuk előállítani a Lamé-Navier egyenletből. Korábban már láttuk, hogy az alakváltozási tenzor első skaláris invariánsát az elmozdulásmező segítségével ki tudjuk számítani az alábbi alakban

$$A_{\mathrm{I}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$$

mely a Lamé-Navier egyenletben is megjelenik: $\Delta \vec{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla A_{\mathrm{I}} + \frac{\vec{\boldsymbol{q}}}{G} = \vec{\boldsymbol{0}}$. Szintén korábban már volt szó arról, hogyan függ össze az alakváltozási tenzor első skaláris invariánsa a feszültségi tenzor első skaláris invariánsával

$$T_{\mathrm{I}} = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} A_{\mathrm{I}} \qquad \Rightarrow \qquad A_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} T_{\mathrm{I}}$$

Így ki tudtuk fejezni az alakváltozási tenzor első skaláris invariánsát a feszültségekkel. Ezt behelyettesítjük a Lamé-Navier egyenletbe, így kapjuk

$$\Delta \vec{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla T_{\mathrm{I}} + \frac{\vec{\boldsymbol{q}}}{G} = \Delta \vec{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{2G(1+\nu)} \nabla T_{\mathrm{I}} + \frac{\vec{\boldsymbol{q}}}{G} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Az egyenletnek ezt az alakját megszorozzuk hátulról is diadikusan ∇-val, illetve elölről is, így kapunk két egyenletet

$$\Delta(\vec{\boldsymbol{u}} \circ \nabla) + \frac{1}{2G(1+\nu)} \nabla \circ \nabla T_{\mathrm{I}} + \frac{\vec{\boldsymbol{q}} \circ \nabla}{G} = \underline{\underline{\boldsymbol{0}}}$$

$$\Delta(\nabla \circ \vec{\boldsymbol{u}}) + \frac{1}{2G(1+\nu)} \nabla \circ \nabla T_{\mathrm{I}} + \frac{\nabla \circ \vec{\boldsymbol{q}}}{G} = \underline{\underline{\boldsymbol{0}}}$$

Összeadva a két egyenletet

$$2\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \frac{1}{G(1+\nu)} \nabla \circ \nabla T_{\mathrm{I}} + \frac{\vec{\boldsymbol{q}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{q}}}{G} = \underline{\underline{\boldsymbol{0}}}$$

Az anyagegyenlet (általános Hooke-törvény) alapján

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \frac{1}{2G} \left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} - \frac{\nu}{1+\nu} T_{\mathrm{I}} \underline{\underline{\boldsymbol{1}}} \right]$$

melyet visszahelyettesítjük az előző egyenletbe

$$\frac{1}{G} \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} - \frac{\nu}{G(1+\nu)} \Delta T_{\mathrm{I}} \underline{\underline{\boldsymbol{1}}} + \frac{1}{G(1+\nu)} \nabla \circ \nabla T_{\mathrm{I}} + \frac{\vec{\boldsymbol{q}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{q}}}{G} = \underline{\underline{\boldsymbol{0}}}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Lehet látni, hogy a G-vel minden tag el van osztva, lehet vele egyszerűsíteni. Az egyenlet második tagját $\left(-\frac{\nu}{1+\nu}\Delta T_{\mathrm{I}}\underline{\underline{\mathbf{1}}}\right)$ még átalakítjuk. Először is a Lamé-Navier egyenletet megszorozzuk skalárisan ∇-val

$$\Delta\underbrace{(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)}_{A_{\mathrm{I}}}+\frac{1}{1-2\nu}\underbrace{\nabla\cdot\nabla}_{\Delta}\underbrace{(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{u}})}_{A_{\mathrm{I}}}+\frac{\vec{\boldsymbol{q}}\cdot\nabla}{G}=0$$

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\Delta A_{\mathrm{I}}+\frac{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{q}}}{G}=0$$

Ebbe beírva a korábban már látott összefüggést T_{I} és A_{I} között $\left(A_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2G}\frac{1-2\nu}{1+\nu}T_{\mathrm{I}}\right)$

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{1}{2G}\frac{1-2\nu}{1+\nu}\Delta T_{\mathrm{I}}+\frac{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{q}}}{G}=0$$

Megjelent mindkét tag előtt osztóként a G, egyszerűsíthetünk vele, egyszerűsíthetünk $1-2\nu$-vel és 2-vel az első tag előtt is, illetve végigosztjuk az egyenletet $1-\nu$-vel

$$\frac{1}{1+\nu}\Delta T_{\mathrm{I}}+\frac{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{q}}}{1-\nu}=0$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Ezt az egyenletet beszorozva $-\nu$-vel és átrendezve kapjuk

$$-\frac{\nu}{1+\nu}\Delta T_{\mathrm{I}} = \frac{\nu}{1-\nu}\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{q}}$$

Ennek az egyenletnek a bal oldalán pontosan az a tag jelent meg, amelyet át akartunk alakítani, így visszahelyettesítjük az egyenlet jobb oldalát, ezzel kapjuk

$$\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \frac{1}{1+\nu}\nabla \circ \nabla T_{\mathrm{I}} + \frac{\nu}{1-\nu}\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{q}}\underline{\underline{\boldsymbol{1}}} + \vec{\boldsymbol{q}} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{\boldsymbol{q}} = \underline{\underline{\boldsymbol{0}}}$$

Ez a duál rendszer alapegyenlete, az ún. Beltrami-Mitchell egyenlet. Ez egy tenzoregyenlet, melyből a tenzorok szimmetriája miatt elvileg 6 független skaláregyenletet lehetne előállítani, de igazolható, hogy valójában 3 független skaláregyenlet származik belőle. Mivel a feszültségi tenzorban 6 független koordináta szerepel, ezért ehhez az alapegyenlethez az egyensúlyi egyenletet is fel kell használni ($\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \nabla + \vec{\boldsymbol{q}} = \vec{\boldsymbol{0}}$), mely újabb 3 skaláris egyenlet szintén a feszültségekre nézve.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

A Beltrami-Mitchell és az egyensúlyi egyenletekből származó feszültségeknek is természetesen ki kell elégíteniük a kinematikai és dinamikai peremfeltételt. Az így előállított feszültségeket beírva az anyagegyenlet megfelelő alakjába, előállíthatóak az alakváltozási tenzor elemei. A kinematikai egyenletek alapján az alakváltozási tenzor elemeiből azonban nem mindig állítható elő egyértelműen a keresett elmozdulásmező. Az egyértelműséget biztosítani kell, erre szolgál az ún. kompatibilitási egyenlet, mely a következő alakú

$$\nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \times \nabla = \underline{\underline{\boldsymbol{0}}}$$

más szavakkal, az alakváltozási tenzorból csak akkor állítható elő egyértelműen az elmozdulásmező, ha a tenzor kielégíti a kompatibilitási egyenletet. Ez egy tenzoregyenlet, melyből az alakváltozási tenzor szimmetriája miatt 6 db skaláris egyenlet állítható elő. Egy tetszőleges tenzor elemeit a tenzorból úgy lehet kinyerni, ha a megfelelő egységvektorokkal megszorozzuk elölről és hátulról is skalárisan (például az 11-es elemet úgy, hogy elölről és hátulról is $\vec{\boldsymbol{e}}_x$-szel szorozzuk meg a tenzort, vagy például a 32-es elemet úgy, hogy elölről $\vec{\boldsymbol{e}}_z$-vel, hátulról pedig $\vec{\boldsymbol{e}}_y$-nal szorozzuk meg skalárisan a tenzort). Így a kompatibilitási egyenlet 6 db skaláregyenletéből kettőt részletesen megnézünk, hogy lehet előállítani, illetve a megmaradó 4 egyenletet pedig csak felírjuk.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Először nézzük meg a főátlóhoz tartozó egyenleteket. Szorozzuk meg a kompatibilitási egyenletet elölről és hátulról is $\vec{\boldsymbol{e}}_x$-szel

$$\vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot (\nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x = (\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \nabla) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{e}}_x) = 0$$

Először nézzük a két zárójelben álló vektorszorzást

$$\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \nabla = \vec{\boldsymbol{e}}_x \times \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_z \right) = \frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{e}}_z - \frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_y$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{e}}_x = -\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \nabla = \frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_y - \frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

Ezzel a két vektorral megszorozva az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzort

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = -\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0$$

Átrendezve

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Ha a kompatibilitási egyenletet elölről és hátulról is $\vec{\boldsymbol{e}}_y$-nal majd pedig $\vec{\boldsymbol{e}}_z$-vel szorozzuk meg, rendre a következő két egyenletet kapjuk

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Most nézzük a mellékátlóhoz tartozó egyenleteket. Szorozzuk meg a kompatibilitási egyenletet elölről $\vec{\boldsymbol{e}}_x$-szel, hátulról pedig $\vec{\boldsymbol{e}}_y$-nal

$$\vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot (\nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \times \nabla) \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y = (\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \nabla) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot (\nabla \times \vec{\boldsymbol{e}}_y) = 0$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{e}}_y = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_z \right) \times \vec{\boldsymbol{e}}_y = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\boldsymbol{e}}_z - \frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_x$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

Így

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0$$

Átrendezzük az egyenletet

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Ugyanez az egyenlet állítható elő, ha a kompatibilitási egyenletet elölről szorozzuk meg $\vec{\boldsymbol{e}}_y$-nal és hátulról $\vec{\boldsymbol{e}}_x$-szel. Így még további két egyenlet állítható elő, melyek

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right)$$

Ezek az egyenletek pedig azt mutatják, hogy valójában az alakváltozási koordináták nem függetlenek egymástól.

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

2.4.1. Példa: Igazolja, hogy az alábbi elmozdulásmező kielégíti a Lamé-Navier egyenletet, ha $\vec{q} = -\gamma \vec{e}_z$!
$u = -\frac{\nu\gamma}{E} xz$; $v = -\frac{\nu\gamma}{E} yz$; $w = \frac{\gamma}{2E}\left[z^2 - L^2 + \nu(x^2 + y^2)\right]$
A Lamé-Navier egyenlet invariáns alakja

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{\vec{q}}{G} = \vec{0}$$

Mivel az elmozdulásmező a DDKR koordinátáitól függ, így a DDKR-ben érvényes 3 skalár egyenletet kell felírni

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{q_x}{G} = 0$$

$$\Delta v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{q_y}{G} = 0$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{q_z}{G} = 0$$

Mivel mindhárom egyenletben szükség lesz az A_{I} első skaláris invariánsra, ezt meghatározzuk külön

$$A_{\mathrm{I}} = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu\gamma}{E} - \frac{\nu\gamma}{E} + \frac{\gamma}{E} z = \frac{\gamma}{E}(1-2\nu) z$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

amire még szükségünk lesz, a Δu, Δv és Δw, ezek

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\nu\gamma}{E} + \frac{\nu\gamma}{E} + \frac{\gamma}{E} = \frac{\gamma}{E}(1 + 2\nu)$$

Helyettesítsük ezeket az eredményeket vissza a 3 skaláris egyenletbe

$$0 + \frac{1}{1-2\nu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\gamma}{E}(1-2\nu)z\right]}_{0} + \frac{0}{G} = 0$$

$$0 + \frac{1}{1-2\nu} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\gamma}{E}(1-2\nu)z\right]}_{0} + \frac{0}{G} = 0$$

$$\frac{\gamma}{E}(1+2\nu) + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\gamma}{E}(1-2\nu) - \frac{\gamma}{G} = \frac{\gamma}{E}(1 + 2\nu + 1 - 2 - 2\nu) = 0; \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

2.4. A lineáris rugalmasságtan peremérték feladata

2.4.2. Példa: Igazolja, hogy az alábbi alakváltozási tenzor kompatibilis!

$$\underset{(x,y,z)}{\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right]} = \begin{bmatrix} -\nu\Gamma y & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\Gamma y & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma y \end{bmatrix}$$

A tenzorból ki tudjuk nyerni az alakváltozási koordinátákat, melyek a következők: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\Gamma y$; $\varepsilon_z = \Gamma y$; $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Ezeket a koordinátákat kell behelyettesíteni a 6 db skaláris kompatibilitási egyenletbe:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad \Rightarrow \qquad 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \qquad \Rightarrow \qquad 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \Rightarrow \qquad 0 + 0 = 0$$

2.4.2. Példa folytatása:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 0 + 0 - 0$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 0 + 0 - 0$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right) \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 0 + 0 - 0$$

Mind a hat kompatibilitási egyenlet teljesült, tehát az alakváltozási tenzorból egyértelműen előállítható az elmozdulásmező.