Rugalmasságtan

III. előadás
készítette: Dr. Lengyel Ákos József

2020. március 28.

2.5. Összefoglalás

A rugalmasságtani feladat ismeretlenjei, egyenletei és peremfeltételei:
Ismeretlenek:

- Elmozdulásmező: $\vec{u}$; koordinátái: u, v, w.
- Alakváltozásmező: $\underline{\underline{A}}$; koordinátái: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$.
- Feszültségmező: $\underline{\underline{T}}$; koordinátái: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

Ez összesen 15 db ismeretlen.
Egyenletek:

- Geometriai (kinematikai) egyenlet: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}\right)$ (6 db egyenlet).
- Anyagegyenlet: $\underline{\underline{T}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right)$ (6 db egyenlet).
- Egyensúlyi egyenlet: $\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ (3 db egyenlet).

Peremfeltételek:

- Kinematikai peremfeltétel: $\vec{u} = \vec{u}_0, \quad \vec{r} \in A_u$.
- Dinamikai peremfeltétel: $\underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} = \vec{p} \quad \vec{r} \in A_p$.

2.5. Összefoglalás

A rugalmasságtan első peremérték-feladata:

- Alapismeretlen az elmozdulás mező: $\vec{\boldsymbol{u}}$.
- Alapegyenlet a Lamé-Navier egyenlet:
  $\Delta\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{u}}) + \frac{\vec{\boldsymbol{q}}}{G} = \vec{\boldsymbol{0}}$.
- Peremfeltételek:
  - Kinematikai peremfeltétel: $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}_0, \quad \vec{\boldsymbol{r}} \in A_u$.
  - Dinamikai peremfeltétel:
    $$2G\left[\overset{\downarrow}{\vec{\boldsymbol{u}}}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{n}}) + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{n}}\times \mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{u}})\vec{\boldsymbol{n}}\right] = \vec{\boldsymbol{p}} \qquad \vec{\boldsymbol{r}} \in A_p.$$

2.5. Összefoglalás

A rugalmasságtan második peremérték-feladata:

- Alapismeretlen a feszültségmező: $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$.
- Alapegyenlet a Beltrami-Mitchell egyenlet és az egyensúlyi egyenlet.
- Peremfeltételek:
  - Kinematikai peremfeltétel és
  - Dinamikai peremfeltétel a feszültségmezővel kifejezve.

3. Prizmatikus rudak Saint-Venant-féle csavarása

3.1. Bevezetés, alapfogalmak

Prizmatikus rudak csavarását vizsgáljuk, vagyis egyenes középvonalú, állandó keresztmetszetű rudak csavarásával fogunk foglalkozni. A Szilárdságtanban már láttuk, hogy hogyan írható le kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarási feladata. Azonban a mérnöki gyakorlatban nem csak ilyen keresztmetszetű rudak lehetnek csavaró igénybevételnek kitéve. Most megvizsgáljuk, milyen elméleti és gyakorlati háttere van tetszőleges keresztmetszetű rudak csavarásának.

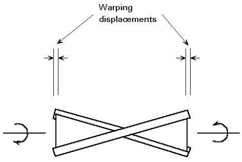
Csavaró igénybevételről akkor beszélünk, ha a prizmatikus rúd tengelye (középvonala) körül működő csavarónyomaték hatására a rúd keresztmetszetei elfordulnak a rúd tengelye körül. Kétféle csavarást különböztetünk meg:

- Szabad csavarás vagy egyszerű csavarás (Saint-Venant-féle csavarás)
- Gátolt csavarás

3.1. Bevezetés, alapfogalmak

Szabad csavarásról akkor beszélünk, ha a csavaró igénybevétel hatására a keresztmetszetben csak nyírófeszültség ébred. A szabad csavarás jellemzői:

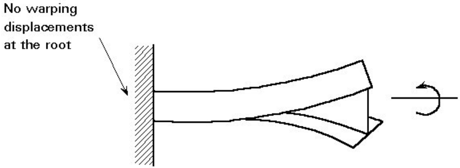
- A keresztmetszet alkotói egyenesek maradnak (a rúd fajlagos szögelfordulása állandó a rúd hossza mentén), az alkotók nem rövidülnek és nem nyúlnak a terhelés hatására (nem ébred normál feszültség),
- A rúd igénybevétele állandó csavarónyomaték a rúd teljes hossza mentén,
- A keresztmetszetek merev lapként fordulnak el, tehát x és y irányban nem torzul a keresztmetszet, de a keresztmetszet pontjai a rúd tengelyének (z) irányába elmozdulhatnak (ezt nevezzük öblösödésnek), tehát a keresztmetszet szabadon öblösödhet.



(a) Torsion with unrestrained warping

3.1. Bevezetés, alapfogalmak

Gátolt csavarásról akkor beszélünk, ha a csavarónyomaték hatására a rúd fajlagos szögelfordulása nem állandó, vagyis a rúd alkotói nem maradnak egyenesek, normálfeszültség is keletkezik a keresztmetszetben.



(b) Torsion with restrained warping

A továbbiakban csak a szabad csavarásról lesz szó.

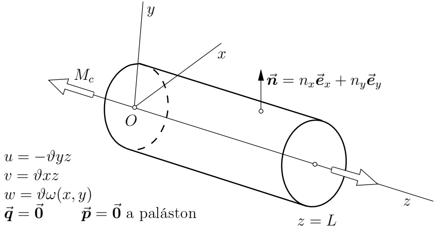
3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

Ahogy már korábban is láttuk, szabad csavarás esetén a rúd alkotói egyenesek maradnak, ez pedig úgy lehetséges, hogy a rúd fajlagos szögelfordulása (két egymástól egységnyi távolságra eső keresztmetszet egymáshoz viszonyított szögelfordulása) állandó ($\vartheta =$állandó).
Így egy tetszőleges z
koordinátájú keresztmetszet szögelfordulása

$$\Theta = \vartheta z$$

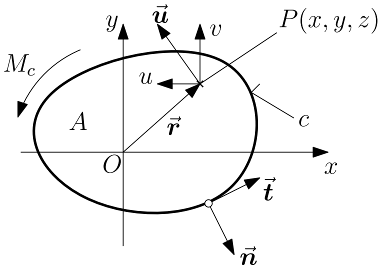
A fajlagos szögelfordulás
kizárólag a csavarónyomatéktól függ

$$\vartheta = \vartheta(M_c)$$



3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

Vizsgáljuk meg az előző ábrán is vázolt, általános keresztmetszetű rúd egyik tetszőleges keresztmetszetét, melyet az alábbi ábra szemléltet. Az *x* és *y* irányú elmozdulás kizárólag a keresztmetszet Θ szögelfordulásának a következménye, így az *xy* síkbeli elmozdulásvektor a következő formában írható fel



$$\vec{u} = \vartheta z \vec{e}_z \times (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) =$$

$$= -\vartheta yz\vec{e}_x + \vartheta xz\vec{e}_y$$

Tehát egy tetszőleges pont *x* és *y* irányú elmozdulása már ismert. A keresztmetszet öblösödése miatt a *P* pontnak van *z* irányú elmozdulása, melyet az öblösödési függvénnyel [$\omega(x, y)$] tudunk jellemezni. Tehát

$$u = -\vartheta yz \qquad v = \vartheta xz \qquad w = \vartheta\omega(x, y)$$

Ezenkívül további feltétel, hogy a rúd súlyát elhanyagoljuk, és felületi terhelés sem hat a rúdra, nem foglalkozunk vele, hogy a csavarónyomaték hogyan jön létre, tehát $\vec{p} = \vec{q} = \vec{0}$.

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

Felhasználjuk a skaláris kinematikai egyenleteket, hogy az elmozdulásmező alapján előállítsuk az alakváltozási koordinátákat

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\vartheta z + \vartheta z = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\vartheta y + \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial x} = \vartheta \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \vartheta x + \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial y} = \vartheta \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)$$

Ezek után az anyagtörvény alapján a feszültségeket is meg tudjuk határozni

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\vartheta \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right), \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\vartheta \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)$$

Vegyük észre, hogy a nem zérus alakváltozási koordinátákra, ebből következően pedig a nem zérus feszültségekre is igaz, hogy nem függnek z-től [$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y)$, $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$].

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

Most pedig vizsgáljuk meg, hogy az így kapott feszültségek kielégítik-e a skaláris egyensúlyi egyenleteket, illetve milyen differenciálegyenletet kell az öblösödési függvénynek kielégítenie

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 + 0 + \underbrace{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}}_{0} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 + 0 + \underbrace{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}}_{0} = 0$$

Tehát az első két skaláris egyenlet automatikusan teljesül, a harmadik pedig

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = G\vartheta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0$$

Vagyis

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \Delta \omega = 0 \qquad (x, y) \in A$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

Mivel csak nyírófeszültség ébredhet a keresztmetszetben, ezért a feszültségi tenzor a következő alakba írható

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

Így a dinamikai peremfeltételt felírva

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}\right] \left[\vec{\boldsymbol{n}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az eredmények alapján tehát

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \qquad (x, y) \in c$$

Ebbe az egyenletbe behelyettesítve a nyírófeszültségeket

$$G\vartheta \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) n_x + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) n_y \right] = 0$$

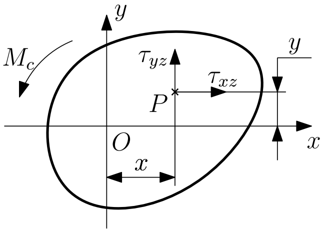
3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

A csavarónyomaték számítása

$$M_c = \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})\,\mathrm{d}A =$$

$$= G\vartheta \int_A \left[x\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + x\right) - y\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - y\right)\right] \mathrm{d}A =$$

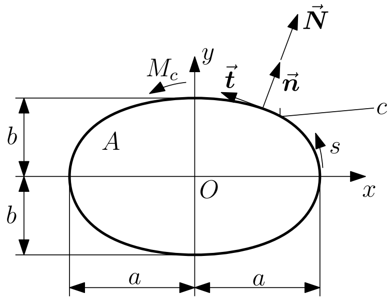
$$= G\vartheta \underbrace{\int_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}x - \frac{\partial\omega}{\partial x}y + x^2 + y^2\right) \mathrm{d}A}_{I_c} = G\vartheta I_c$$



Itt az I_c
a keresztmetszet ún. csavarási merevsége.

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1.
Példa: Adott az alábbi ábrán látható tömör ellipszis keresztmetszetű rúd. Tételezzük fel, hogy ennek a keresztmetszetnek az öblösödése felírható egy $\omega = Cxy$ alakú függvénnyel. Határozzuk meg a C értékét, a keresztmetszetben ébredő τ_{xz} és τ_{yz} nyírófeszültség függvényeket és a keresztmetszet I_c csavarási merevségét!



Az öblösödési függvény C együtthatójának meghatározásához a dinamikai peremfeltételt fogjuk alkalmazni, amihez szükségünk lesz az $\vec{n}$ normálvektorra. Ennek előállításához írjuk fel az érintő egységvektort

$$\vec{t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\vec{e}_y \qquad \Rightarrow \qquad \vec{t}\mathrm{d}s = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: A normálvektor előállításához írjuk fel az ellipszis egyenletét

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Képezzük ennek x szerinti első deriváltját az implicit függvények deriválási szabályának megfelelően

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Elosztva az egyenletet 2-vel, valamint formálisan beszorozva $\mathrm{d}x$-szel kapjuk az egyenlet differenciálját

$$\frac{x}{a^2}\mathrm{d}x + \frac{y}{b^2}\mathrm{d}y = 0$$

Ez az egyenlet pedig felfogható úgy is, mint két vektor skaláris szorzata. Az egyik vektor x koordinátája $\mathrm{d}x$, y koordinátája pedig $\mathrm{d}y$. Ezt láttuk az előbb, ez éppen a $\vec{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}s$ vektor két koordinátája. Két vektor skaláris szorzata akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra, vagyis a másik két koordináta egy a $\vec{\boldsymbol{t}}$-re merőleges általános vektor lesz, tehát a hossza nagy valószínűséggel nem lesz egységnyi. Jelöljük ezt a vektort $\vec{\boldsymbol{N}}$-nel, hosszát pedig λ-val, így

$$\vec{\boldsymbol{N}} = \lambda\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{x}{a^2}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{y}{b^2}\vec{\boldsymbol{e}}_y$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: Ez alapján a normálvektor

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a^2}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{y}{b^2}\vec{\boldsymbol{e}}_y\right)$$

Ismerve a normálvektort, fel tudjuk írni a csavarásra érvényes dinamikai peremfeltételt (az öblösödési függvény keresett alakja: $\omega = Cxy$)

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0 \qquad (x,y) \in c$$

$$G\vartheta\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - y\right)n_x + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + x\right)n_y\right] = \frac{G\vartheta}{\lambda}\left[(C-1)y\frac{x}{a^2} + (C+1)x\frac{y}{b^2}\right] = 0$$

$$xy\left[\frac{C}{a^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{C}{b^2} + \frac{1}{b^2}\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: Közös nevezőre hozva a zárójeles kifejezéseket, majd átrendezve az egyenletet kapjuk

$$C\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2} \qquad \Rightarrow \qquad C=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

Tehát az öblösödési függvény ellipszis keresztmetszetre:

$$\omega(x,y)=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}xy$$

Írjuk fel a következő összefüggéseket

$$C-1=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}-\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=-\frac{2a^2}{a^2+b^2}$$

$$C+1=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=\frac{2b^2}{a^2+b^2}$$

Így egyszerűbb lesz felírni a nyírófeszültségeket.

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: A nyírófeszültségek az öblösödési függvénnyel

$$\tau_{xz} = G\vartheta\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - y\right) = G\vartheta(C-1)y = -G\vartheta\frac{2a^2}{a^2+b^2}y$$

$$\tau_{yz} = G\vartheta\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + x\right) = G\vartheta(C+1)x = G\vartheta\frac{2b^2}{a^2+b^2}x$$

A csavarási merevség számítása

$$I_c = \int\limits_A \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}x - \frac{\partial\omega}{\partial x}y + x^2 + y^2\right)\mathrm{d}A = \int\limits_A \left(Cx^2 - Cy^2 + x^2 + y^2\right)\mathrm{d}A =$$

$$= \int\limits_A \left[(C+1)x^2 - (C-1)y^2\right]\mathrm{d}A = \int\limits_A \left(\frac{2b^2}{a^2+b^2}x^2 + \frac{2a^2}{a^2+b^2}y^2\right)\mathrm{d}A =$$

$$= \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\int\limits_A \left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\mathrm{d}A$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: Tehát látszik, hogy lényegében az ellipszis egyenletét kell integrálni a keresztmetszeten. Ahhoz, hogy az ellipszis keresztmetszeti tartományán tudjunk integrálni egyszerűen, a következő helyettesítéssel fogunk élni

$$x = \lambda a \cos t; \qquad y = \lambda b \sin t$$

Ha a λ értéke 0 és 1 között változik, a t szög értéke pedig 0 és 2π között, akkor látszik, hogy a teljes ellipszis keresztmetszetet lefedjük, és csak azt. Ha másik koordinátákra térünk át integráláskor, akkor a következő transzformációt is el kell végeznünk

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = J\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t$$

ahol J az ún. Jacobi-determináns, melyet a következőképp tudunk meghatározni

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,t)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t \\ -\lambda a \sin t & \lambda b \cos t \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda ab\cos^2 t + \lambda ab \sin^2 t = \lambda ab \underbrace{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}_{1} = \lambda ab \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}A = \lambda ab\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t$$

3.2. Saint-Venant-féle csavarás öblösödési függvényre épített megoldása

3.2.1. Példa folytatása: Végezzük el az integrálást ez alapján

$$\int_{\lambda=0}^{1}\int_{t=0}^{2\pi}\left[\left(\frac{\lambda a\cos t}{a}\right)^2+\left(\frac{\lambda b\sin t}{b}\right)^2\right]\lambda ab\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t = ab\int_{\lambda=0}^{1}\int_{t=0}^{2\pi}\lambda^3\underbrace{\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}_{1}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t =$$

$$= ab\int_{t=0}^{2\pi}\left[\frac{\lambda^4}{4}\right]_0^1\mathrm{d}t = \frac{ab}{4}\int_{t=0}^{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{ab}{4}\left[t\right]_0^{2\pi} = \frac{ab\pi}{2}$$

Így tehát

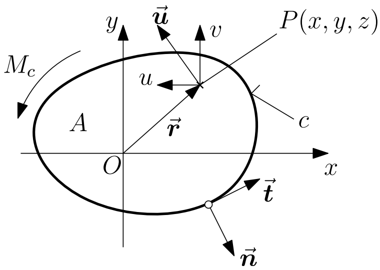
$$I_c = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\,\frac{ab\pi}{2} = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}$$

Ezzel pedig a csavarónyomaték

$$M_c = G\vartheta I_c = G\vartheta\frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

Tömör keresztmetszetet
fogunk vizsgálni a továbbiakban.
Az előző fejezetben már láttuk, hogy
a Saint-Venant-féle csavarásnak kitett rúd
esetén a következő egyensúlyi egyenletnek
és dinamikai peremfeltételnek kell teljesülnie



$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \qquad (x, y) \in A$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \qquad (x, y) \in c$$

A korábbiak alapján szintén fennáll, hogy

$$\vec{t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\vec{e}_y, \qquad \vec{n} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\vec{e}_x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\vec{e}_y$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

Vezessük be az ún. Prandtl-féle feszültségfüggvényt. Ezt a függvényt U-val jelöljük, melynek segítségével a nyírófeszültségeket a következő alakban írjuk fel

$$\tau_{xz} = G\vartheta \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -G\vartheta \frac{\partial U}{\partial x}$$

Ezzel a felírással az egyensúlyi egyenlet identikusan teljesül

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = G\vartheta \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - G\vartheta \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0 \qquad (x, y) \in A$$

Helyettesítsünk be a dinamikai peremfeltételbe

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = G\vartheta \left[\frac{\partial U}{\partial y} n_x - \frac{\partial U}{\partial x} n_y \right] = G\vartheta \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right] = G\vartheta \vec{t} \cdot \nabla U = G\vartheta \frac{\partial U}{\partial s} = 0$$

Mivel a G és a ϑ értéke sem zérus, ezért U iránymenti deriváltja tűnik el a c peremgörbén, ebből következik, hogy

$$U = \text{állandó} = C_0 = 0 \qquad (x, y) \in c$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

Használjuk fel az előző fejezetben felírt nyírófeszültségeket, melyek az öblösödési függvényt is tartalmazzák

$$\tau_{xz} = G\vartheta\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} - y\right) = G\vartheta\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = G\vartheta\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + x\right) = -G\vartheta\frac{\partial U}{\partial x}$$

Ez alapján a kapcsolat az öblösödési függvény és a Prandtl-féle feszültségfüggvény között a következő egyenletrendszerre vezet

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} - y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial\omega}{\partial y} - x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

Deriváljuk az első egyenletet y szerint, a másodikat pedig x szerint, majd adjuk össze a két egyenletet

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} - 1 = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} - 1 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta U = -2$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

Tehát összefoglalva tömör keresztmetszet csavarásakor a Prandtl-féle feszültségfüggvénynek két feltételi egyenletet kell kielégítenie

$$\Delta U = -2 \qquad (x, y) \in A$$

$$U = 0 \qquad (x, y) \in c$$

Ez alapján a Prandtl-féle feszültségfüggvényt úgy építjük fel, hogy egy ismeretlen konstanssal megszorozzuk a keresztmetszet peremgörbéjének (peremgörbéinek) egyenletét (egyenleteit). A peremgörbék egyenlete miatt a második feltétel identikusan teljesül, így az első feltételből a konstans értéke meghatározható. Határozzuk meg a csavarónyomatékot. Az előző fejezetben már láttuk, hogy általánosan a nyírófeszültségek ismeretében a csavarónyomaték az alábbi alakban számítható

$$M_c = \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})\,\mathrm{d}A = G\vartheta \int_A \left(-x\frac{\partial U}{\partial x} - y\frac{\partial U}{\partial y}\right)\mathrm{d}A = -G\vartheta \int_A \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla U \mathrm{d}A$$

Felhasználva, hogy

$$\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{r}} U) = (\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{r}}) U + \vec{\boldsymbol{r}} \cdot (\nabla U)$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

kapjuk a csavarónyomatékra, hogy

$$M_c = -G\vartheta \int_A (\vec{r}U) \cdot \nabla \mathrm{d}A + G\vartheta \int_A (\nabla \cdot \vec{r}) U \mathrm{d}A$$

Az első tag a Stokes-tétel alapján

$$\int_A (\vec{r}U) \cdot \nabla \mathrm{d}A = \oint_c \vec{r}U \cdot \vec{n} \mathrm{d}s = 0$$

mert az egyik feltétel az U-ra, hogy a c peremgörbén zérus értékű. A második tagban pedig

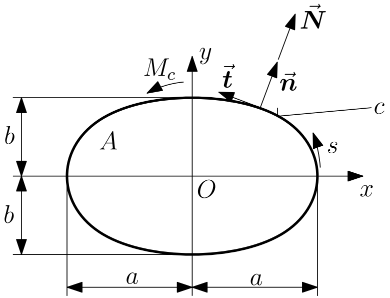
$$\nabla \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y \right) \cdot (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2$$

Vagyis a csavarónyomaték felhasználva az előző fejezetben felírt összefüggést is

$$M_c = G\vartheta I_c = G\vartheta \int_A 2U \mathrm{d}A \qquad \Rightarrow \qquad I_c = 2 \int_A U \mathrm{d}A$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.1. Példa: Tekintsük ismét az előző fejezetben is látott ellipszis keresztmetszetű rudat. Határozzuk meg a rúdhoz tartozó U Prandtl-féle feszültségfüggvényt, a τ_{xz} és τ_{yz} nyírófeszültségeket és a keresztmetszet I_c csavarási merevségét!



Ha meg kell határozni a Prandtl-féle feszültségfüggvényt, akkor a tömör keresztmetszethez tartozó két feltételi egyenlettel kezdünk. Először is

$$U = 0 \qquad (x, y) \in c$$

Ezt a legkönnyebb úgy elérni, hogy felírjuk a keresztmetszet peremgörbéjének, vagyis az ellipszis egyenletét, melyet aztán 0-ra rendezünk

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.1. Példa folytatása: Ez az egyenlet a peremen teljesíti, hogy zérus értékű. Így a feszültségfüggvényt úgy állítjuk elő, hogy egy ismeretlen konstanssal megszorozzuk az egyenletet, tehát

$$U = K\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Az ismeretlen K értékét pedig a másik feltételi egyenletből határozzuk meg

$$\Delta U = -2 \qquad (x, y) \in A$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = K\left(-\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}\right) = -2K\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = -2$$

$$K = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

Tehát a feszültségfüggvény ellipszis keresztmetszetre

$$U = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.1. Példa folytatása: Így a nyírófeszültségek

$$\tau_{xz} = G\vartheta \frac{\partial U}{\partial y} = G\vartheta \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\left(-\frac{2y}{b^2}\right) = -\frac{2G\vartheta a^2}{a^2+b^2} y$$

$$\tau_{yz} = -G\vartheta \frac{\partial U}{\partial x} = -G\vartheta \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\left(-\frac{2x}{a^2}\right) = \frac{2G\vartheta b^2}{a^2+b^2} x$$

Tehát mindkét feszültség lineáris függvénye mind az x-nek, mind az y-nak. Így már csak a csavarási merevség maradt, mely a korábbiak alapján a feszültségfüggvénnyel

$$I_c = 2\int_A U \mathrm{d}A = 2\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\int_A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \mathrm{d}A$$

Hogy az integrálást könnyebben el tudjuk végezni, illetve az integrálási tartományt egyszerűen tudjuk kezelni, a következő helyettesítéssel élünk

$$x = \lambda a \cos t, \qquad y = \lambda b \sin t$$

Mivel áttértünk másik változókra, ezért fel kell még írnunk a J Jacobi determinánst

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = J\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.1. Példa folytatása: Mivel az előző példában ugyanezt az ellipszis keresztmetszetet vizsgáltuk, így ugyanezzel a helyettesítéssel éltünk, a Jacobi-determináns értéke ennek megfelelően ugyanaz lesz

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,t)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t \\ -\lambda a \sin t & \lambda b \cos t \end{vmatrix} = \lambda ab \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$$

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda ab \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}t$$

Így

$$I_c = 2\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} \int_A \left(1 - \frac{\lambda^2 a^2 \cos^2 t}{a^2} - \frac{\lambda^2 b^2 \sin^2 t}{b^2}\right) \lambda ab \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}t = 2\frac{a^3 b^3}{a^2+b^2} \int_A \left(\lambda - \lambda^2\right) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}t$$

Az integrálás tartománya pedig ismét úgy fedi le az ellipszist, hogy $0 \leq \lambda \leq 1$ és $0 \leq t \leq 2\pi$.

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.1. Példa folytatása: Tehát a csavarási merevség a következő

$$I_c = 2\frac{a^3 b^3}{a^2+b^2}\int\limits_{\lambda=0}^{1}\int\limits_{t=0}^{2\pi}(\lambda-\lambda^3)\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}t =$$

$$= 2\frac{a^3 b^3}{a^2+b^2}\int\limits_{t=0}^{2\pi}\left[\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^4}{4}\right]_0^1\mathrm{d}t =$$

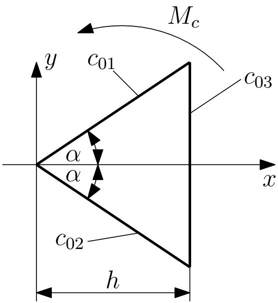
$$= \frac{a^3 b^3}{2(a^2+b^2)}\int\limits_{t=0}^{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{a^3 b^3}{2(a^2+b^2)}[t]_0^{2\pi} = \frac{a^3 b^3 \pi}{a^2+b^2}$$

Az így kapott csavarási merevség pedig épp ugyanaz az érték, mint amit az öblösödési függvénnyel felírt megoldásból is kaptunk.

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.2. Példa:

Adott az alábbi ábrán látható háromszög keresztmetszetű rúd. Határozzuk meg a keresztmetszetre érvényes Prandtl-féle feszültségfüggvényt, rajzoljuk meg a τ_{yz} feszültségeloszlást az x tengely mentén és határozzuk meg ennek maximumát!



Ahhoz, hogy a Prandtl-féle feszültségfüggvényt meg tudjuk határozni, ismét írjuk fel a tömör keresztmetszetre érvényes két feltételi egyenletünket.

$$\Delta U = -2 \qquad (x, y) \in A$$

$$U = 0 \qquad (x, y) \in C$$

A második egyenletből indulunk ki ismét. Ezt a feltételt a peremgörbékkel tudjuk teljesíteni. Írjuk fel ezeket

$$c_{01}: \quad y - kx = 0, \qquad k = \tan\alpha$$

$$c_{02}: \quad y + kx = 0$$

$$c_{03}: \quad x - h = 0$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.2. Példa folytatása: Ezek segítségével az előző feladatban is látott módszerrel itt is fel lehet írni a feszültségfüggvényt

$$U = C(y - kx)(y + kx)(x - h) = C\left(y^2 + kxy - kxy - k^2x^2\right)(x - h) =$$

$$= C\left(xy^2 - k^2x^3 - hy^2 + hk^2x^2\right)$$

Az ismeretlen C konstans értéke a másik feltételi egyenletből nyerhető

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = C\left(-6k^2x + 2hk^2 + 2x - 2h\right) = -2$$

$$C\left[\left(2 - 6k^2\right)x + 2h\left(k^2 - 1\right)\right] = -2$$

Mivel az egyenlet jobb oldalán konstans áll, a bal oldalon is annak kell állnia, ezért az x-től függő tagnak el kell tűnnie, vagyis az előtte álló zárójeles kifejezésnek 0-nak kell lennie, tehát

$$2 - 6k^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k = \sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 30^\circ$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.2. Példa folytatása: Tehát a feszültségfüggvénnyel történő megoldás determinálja, hogy a háromszög csak egyenlő oldalú lehet. Így a C konstans tehát

$$2hC\left(k^2-1\right)=2hC\left(\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{4}{3}hC=-2 \qquad \Rightarrow \qquad C=\frac{3}{2h}$$

Így a feszültségfüggvény

$$U=\frac{3}{2h}\left(xy^2-k^2x^3-hy^2+hk^2x^2\right)=\frac{3}{2h}\left(xy^2-\frac{1}{3}x^3-hy^2+\frac{1}{3}hx^2\right)$$

Így fel tudjuk írni a nyírófeszültségeket

$$\tau_{xz}(x,y)=G\vartheta\frac{\partial U}{\partial y}=G\vartheta\frac{3}{2h}(2xy-2hy)=\frac{3G\vartheta}{h}(x-h)y$$

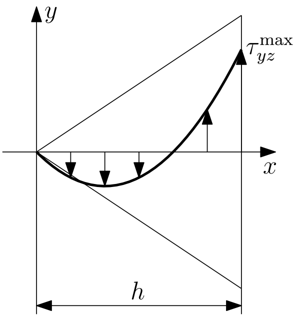
$$\tau_{yz}(x,y)=-G\vartheta\frac{\partial U}{\partial x}=-G\vartheta\frac{3}{2h}\left(y^2-x^2+\frac{2}{3}hx\right)$$

3.3. Saint-Venant-féle csavarás Prandtl-féle feszültségfüggvénnyel

3.3.2. Példa folytatása: Most ábrázoljuk a τ_{yz} feszültség eloszlását az x tengely mentén. Az x tengely y koordinátája 0, vagyis a korábban felírt $\tau_{yz}(x, y)$ függvényt felhasználva

$$\tau_{yz}(x, 0) = -G\vartheta \frac{3}{2h}\left(-x^2 + \frac{2}{3}hx\right) = \frac{3G\vartheta}{2h}x\left(x - \frac{2}{3}h\right)$$

Vagyis így egy x-ben másodfokú függvényt kaptunk eredményül. A megrajzolást nagyban segíti a zérushelyek megkeresése, ezért alakítottuk át a τ_{yz} kifejezést szorzattá. A szorzat egyik tagja akkor tűnik el, ha $x = 0$, a másik tag pedig a zárójelben álló kifejezés, mely $x = \frac{2}{3}h$ esetén lesz épp 0. Ezek alapján az alábbi ábra szemlélteti a másodfokú függvényt. A függvényből lehet látni, hogy $x = h$ esetén lesz a feszültség maximális. Ezt a koordinátát helyettesítsük be a feszültség kifejezésébe



$$\tau_{yz}^{\max} = \tau_{yz}(h, 0) = \frac{3G\vartheta}{2h}h\left(h - \frac{2}{3}h\right) = \frac{G\vartheta h}{2}$$