

Analízis II

Tárgynév:	Analízis II						
Rövid név:	Analízis II				Kód:	GEMAN124B	
Angol név:	Analysis II						
Tanszék:	Analízis Tanszék						
Tárgyfelelős:	Rakaczki Csaba						
Előtanulmányok:	Analízis I				Kódja:	GEMAN 114B	
Kredit:			Követelmény:		gyakorlati jegy		
Heti óraszámok:	Előadás:	2	Gyakorlat:	2	Labor:	-	
Oktatási cél:	Az analízis alapjainak elsajátítása.						
Tárgy tartalom:	A határozott integrál, tulajdonságai, alkalmazási területei. Improprius integrálok. Kétfázisú függvények. Numerikus sorok. Kettős integrál és alkalmazásai. Hármasszög integrál és alkalmazásai. Differenciálegyenletek. Vektor-skalár függvények. Skalár-vektor függvények. Vektor-vektor függvények.						
Irodalom:	Dr. Szarka Zoltán-Dr. Raisz Péterné Dr. Matematika II (egyetemi tankönyv) Dr. Szarka Zoltán-Dr. Raisz Péterné Dr. Matematika III (egyetemi tankönyv)						
Jellemző oktatási módok:							
Oktatási nyelv:	Magyar						
Előadás:	Minden hallgatónak előadás, tábla használatával						
Gyakorlat:	Tantermi gyakorlatok, táblahasználat						
Labor:	-						
Évközi feladatok, zárthelyik:	Két évközi zárthelyi dolgozat.						
Lezárási feltételek:	Előadásokról való legfeljebb 3 hiányzás; legalább elégséges gyakorlati jegy megszerzése.						

Ütemterv

1. hét A határozott integrál értelmezése, tulajdonságai. A Newton-Leibniz formula. Területszámítás.
2. hét Szektor területe. Görbe ívhosszának számítása integrálszámítással. Forgástest térfogatának, felszínének számítása. Improprius integrálok.
3. hét A differenciálegyenlet fogalma, típusai, megoldása. Szétválasztható változójú, és az ilyen típusúra visszavezethető differenciálegyenletek.
4. hét Elsőrendű lineáris és erre visszavezethető differenciálegyenletek.
5. hét Lineáris állandó együtthatójú homogén és inhomogén differenciálegyenletek megoldása.
6. hét Oktatási Szünet
7. hét Kétváltozós függvények. Nevezetes felületek. A parciális derivált, az iránymenti derivált fogalmi Felület érintő síkjá.
8. hét A kétváltozós függvény szélsőértéke.
9. hét A kettős integrál értelmezése, tulajdonságai. A kettős integrál kiszámítása kétszeres integrállal, illetve új változók bevezetésével. A kettős integrál alkalmazási: terület-, térfogat, felszínszámítás.
10. hét A hármas integrál értelmezése. A hármas integrál kiszámítása háromszoros integrállal, illetve új változók bevezetésével. Hengerkoordináta-rendszer, Gömbi koordináta-rendszer. A hármas integrál alkalmazásai: térfogatszámítás.
11. hét Vektor-skalár függvény értelmezése. A derivált. A binormális vektor, a főnormális vektor, az érintő vektor. A térgörbe ívhossza.
12. hét Oktatási Szünet, Május 1
13. hét A skalár-vektor függvény értelmezése. A derivált. A vonalintegrál.
14. hét A vektor-vektor függvény értelmezése. A derivált. A vektor-vektor függvény vonalintegrálja, divergenciája, rotációja, potenciálfüggvény.

Miskolc, 2019. szeptember 11.

.

Dr. Rakaczki Csaba

1.

Analízis II ZH
2019.05.08
B csoport

Név:..... NEPTUN KÓD:.....
Aláírás:.....

1) Adjuk meg az alábbi képleteket! [16p]

a) Hogyan számítjuk ki a

$$\iint_T f(x, y) dx dy =$$

kettős integrált, ha a T tartomány $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$?

b) Írja fel az elliptikus kúp egyenletét!

c) Definiálja egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény esetén az f függvény x változó szerinti parciális deriváltját az $\overline{x_0} = (x_0, y_0) \in D_f$ pontban.

$$f'_x(x_0, y_0) =$$

d) Írja fel az $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy a karakterisztikus polinomnak két $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$ komplex gyöke van!

$$y_{\text{hom}} =$$

e) Milyen alakú egyenletet nevezünk közönséges elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek?

f) Hogyan értelmezzük az alábbi improprius integrált?

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx =$$

g) Forgassuk meg az $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ görbét az Y tengely körül. Hogyan számítjuk ki a keletkezett forgásfelület felszínét?

$$A_Y =$$

h) Hogyan számítjuk ki az $y = f(x)$ folytonos görbe $a \leq x \leq b$ ívének hosszát?

$$s =$$

2) Vizsgáljuk meg az $f(x, y) = \frac{50}{x} + \frac{20}{y} + xy$ függvényt szélsőérték szempontjából! [16p]

4) Számítsa ki az alábbi két függvény által közezárt síkrész területét! [16p]

$$f(x) = -x^2 + 8x - 9, \quad g(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$$

5) Számítsuk ki az alábbi felületek által határolt zárt térrész térfogatát! [16p]

$$z = x^2 + y^2, \quad z^2 = x^2 + y^2$$

1.

Analízis II B csoport
pótlap
2019.05.08

Név:..... NEPTUN KÓD:.....
Aláírás:.....

3) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! [16p]

$$y'' - 6y' + 9y = \cos x$$

1.

Analízis II ZH

2019.05.08

B csoport

Név:..... NEPTUN KÓD:.....

Aláírás:.....

1) Adjuk meg az alábbi képleteket! [16p]

a) Hogyan számítjuk ki a

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (2r)$$

kettős integrált, ha a T tartomány $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$?

b) Írja fel az elliptikus kúp egyenletét!

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2r)$$

c) Definiálja egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény esetén az f függvény x változó szerinti parciális deriváltját az $\bar{x}_0 = (x_0, y_0) \in D_f$ pontban.

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \quad (2r)$$

d) Írja fel az $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy a karakterisztikus polinomnak két $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$ komplex gyöke van!

$$y_{\text{hom}} = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx \quad (1r)$$

e) Milyen alakú egyenletet nevezünk közösleges elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek?

$$y' + p(x)y = q(x) \quad p(x), q(x) \text{ valamilyen } I \text{ intervallumon}$$

f) Hogyan értelmezzük az alábbi improprius integrált?

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx \quad (2r)$$

g) Forgassuk meg az $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ görbét az Y tengely körül. Hogyan számítjuk ki a keletkezett forgásfelület felszínét?

$$A_Y = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

h) Hogyan számítjuk ki az $y = f(x)$ folytonos görbe $a \leq x \leq b$ ívének hosszát?

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

2) Vizsgáljuk meg az $f(x, y) = \frac{50}{x} + \frac{20}{y} + xy$ függvényt szélsőérték szempontjából! [16p]

$$f(x, y) = 50x^{-1} + 20y^{-1} + xy$$

$$f'_x(x, y) = -50x^{-2} + y$$

$$f'_y(x, y) = -20y^{-2} + x$$

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} =$$

$$f''_{xy}(x, y) = 1$$

$$f''_{xx}(x, y) = 100x^{-3}$$

$$f''_{yy}(x, y) = 40y^{-3}$$

$$f''_{xy}(x, y) = 1$$

$$= \frac{100}{x^3} \cdot \frac{40}{y^3} - 1$$

$$-\frac{50}{x^2} + y = 0$$

$$-\frac{20}{y^2} + x = 0$$

$$x = \frac{20}{y^2}$$

$$\frac{-50}{\frac{400}{y^4}} + y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{8}y^4 + y = 0 \Rightarrow y(-\frac{1}{8}y^3 + 1) = 0$$

$$y = 0 \quad \begin{matrix} \frac{1}{8}y^3 = 1 \\ y^3 = 8 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$$P_1(5, 2)$$

$$\Delta(P_1) = \frac{100}{125} \cdot \frac{40}{8} - 1 = \frac{100}{125} \cdot 5 - 1 = \frac{100}{25} - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$y = 2 \quad \begin{matrix} \frac{1}{8}y^3 = 1 \\ y^3 = 8 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$$f''_{xx}(P_1) = \frac{100}{125} > 0 \quad \text{lok. min}$$

$$f(5, 2) = 10$$

1.

Analízis II B csoport
pótlap
2019.05.08

Név:..... NEPTUN KÓD:.....
Aláírás:.....

3) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! [16p]

$$y'' - 6y' + 9y = \cos x$$

K-e

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0 \quad 2p$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \quad 2p$$

$$y_{hom} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \quad 2p$$

$$y_{part} = y_{hom} + y_p =$$

$$\frac{4}{50} \cos x - \frac{3}{50} \sin x + C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \quad 2p$$

$$y_p = A \cos x + B \sin x$$

$$y_p' = -A \sin x + B \cos x \quad 3p$$

$$y_p'' = -A \cos x - B \sin x$$

$$-A \cos x - B \sin x - 6(-A \sin x + B \cos x) + 9(A \cos x + B \sin x) = 0 \cdot x$$

$$-A \cos x - B \sin x + 6A \sin x - 6B \cos x + 9A \cos x + 9B \sin x = 0 \cdot x$$

$$\cos x (-A - 6B + 9A) + \sin x (-B + 6A + 9B) = 0 \cdot x$$

$$(8A - 6B) \cos x + (8B + 6A) \sin x = 0 \cdot x \quad 2p$$

$$8A - 6B = 1$$

$$8B + 6A = 0$$

$$64A - 48B = 8$$

$$48B + 36A = 0$$

$$100A = 8$$

$$A = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

$$\quad 1p$$

$$8B = -6A = -\frac{12}{25}$$

$$B = -\frac{3}{50}$$

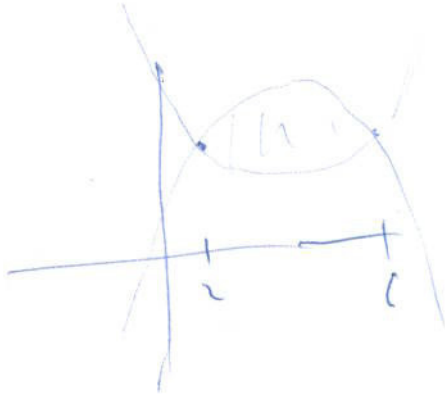
$$1p$$

$$y_p = \frac{4}{50} \cos x - \frac{3}{50} \sin x \quad 1p$$

$$x^2 - 8x + 18$$

4) Számítsa ki az alábbi két függvény által középzárt síkrész területét! [16p]

$$f(x) = -x^2 + 8x - 9, \quad g(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$$



$$-x^2 + 8x - 9 = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$$

$$0 = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 18$$

$$0 = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x^2 - 8x + 12)$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \quad \begin{matrix} \text{hp} \\ 6 \end{matrix}$$

$$-36 + 48 - 9 = 3$$

$$18 - 24 + 9 = 3$$

$$-4 + 16 - 9 = 3$$

$$2 - 8 + 9 = 3$$

$$T = \int_2^6 (-x^2 + 8x - 9) - \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 9 \right) dx =$$

$$= \int_2^6 -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18 dx = \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 12 \cdot \frac{x^2}{2} - 18x \right]_2^6$$

$$= -\frac{6^3}{2} + 6^3 - 18 \cdot 6 - \left(-4 + 24 - 36 \right)$$

$$= \frac{1}{2}6^3 - 3 \cdot 6^2 + 16 = 16$$

5) Számítsuk ki az alábbi felületek által határolt zárt térrész térfogatát! [16p]

$$z = x^2 + y^2, \quad z^2 = x^2 + y^2$$

$$z^2 = z$$

$$z^2 - z = 0$$

$$z(z-1) = 0$$

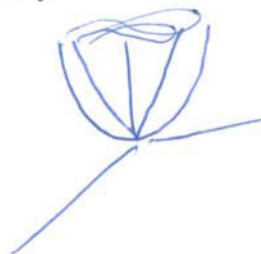
$$z=0$$

$$z=1$$

$$z=1$$

$$z=1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$T = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$\iint_T \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2) dx dy = \begin{cases} x = r \cos \varphi & x^2 + y^2 = r^2 \\ y = r \sin \varphi & 0 \leq r \leq 1 \\ J = r & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (r - r^2) r dr d\varphi = \int_{r=0}^1 \left[\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = \int_{r=0}^1 (r^2 - \frac{2}{3}r^3) 2\pi dr =$$

$$= \left[\left(\frac{r^3}{3} - \frac{2}{3} \frac{r^4}{4} \right) 2\pi \right]_{r=0}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) 2\pi = \frac{1}{6} 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

Akinek az 1)-es feladatban nincs legalább 4 jó válasza, annak az érdemjegye elégtelen!
Értékelés: 0p-39p elégtelen; 40p-49p elégséges; 50p-59p közepes; 60p-69p jó; 70p-80p jeles