Ütemterv a Diszkrét Matematika c. tárgyhoz

(I. éves műszaki-informatikus hallgatóknak, alapszak, **G-122-B, G-122-BL**)

2019/2020 II. félév (3 óra előadás+1 óra gyakorlat)

1.-2. Relációk tulajdonságai, ekvivalencia reláció és rendezési reláció. Műveletek relációkkal. Egy ekvivalencia relációhoz rendelt partíció – példák. Gráfelméleti alapfogalmak. Csúcsokkal és élekkel kapcsolatos fontosabb fogalmak, egyszerű gráf, gráfok izomorfizmusa.

3-4. Részgráf, teljes gráf, feszített részgráf, séták és körök egy gráfban. Összefüggő gráfok. Egy gráf összefüggő komponensei. Fák és erdők, jellemzésük. Síkba rajzolható gráfok.

5-6. Euler poliéder tétele és következményei. Kuratowski tétele. Euler körök és Hamilton utak egy gráfban. Euler és Dirac tételei. Páros gráfok.

7-8. Páros gráfok jellemzése páratlan hosszúságú körökkel. Párosítások, Hall és Frobenius tételei. Gráfok színezése, kromatikus szám. Sík gráfok és térképek színezése. 4-szín tétel. Irányított gráfok. Szomszédsági és illeszkedési mátrix.

9-10. Részben rendezett halmazok, Hasse diagram. Láncok és antiláncok., Dilworth tétele. Egy részben-rendezés lineáris kiterjesztései. Hálók, mint részben rendezett és mint algebrai struktúrák - a két definíció ekvivalenciája. Teljes hálók, részhálók.

11.-12. Hálók izomorfizmusa. Moduláris és disztributív hálók és jellemzésük részhálóikkal. Komplementumos hálók, Boole hálók és Boole algebrák. A kijelentés kalkulus elemei: logikai műveletek.

13.-14. Igazságfüggvények. Logikai áramkörök és leírásuk igazságfüggvényekkel. Igazságfüggvények teljes diszjunktív és teljes konjunktív normálformája. Standard felírás. Boole gyűrűk, Zsegalkin polinomok.

Tantárgyi követelmények

1. A tárgy lezárásának a módja: gyakorlati jegy + vizsga –ez utóbbi részét képezi a szigorlatnak.

2. A félév elismerésének (az aláírás megszerzésének) feltételei: Egy zárthelyi dolgozat és egy Teszt legalább elégséges szinten való teljesítése.

3. A gyakorlati jegyet a zárthelyi és a Teszt alapján állapítjuk meg.

4. A dolgozatok időtartama 50, illetve 40 perc, időpontja a 7. és 13. hétre tervezett – a tanulókör kérésére 1 héttel eltolható. Az értékelés módja: az elégséges osztályzat eléréséhez legalább az összpontszám 50%-a szükséges. A sikertelen vagy meg nem írt zárthelyik pótlása a 14. héten vagy az összes érintett hallgató által kért héten történik, egyéb feltétele a pótlásnak nincs.

5. A szigorlat a Diszkrét Matematika I és II (valamint az Analízis I és II) tárgyakat tartalmazza. A Diszkrét matematika rész egy kötelező írásbeli részből és egy fakultatív szóbeli részből áll. Az írásbeli

vizsga időtartama 1 óra 30 perc. Az elégséges osztályzat megszerzéséhez az írásbeli teljes pontszámának legalább a 45%-a szükséges.

Javasolt irodalom

1. Szendrei Ágnes: Diszkrét matematika, Polygon Kiadó, 1995-2018
2. Bagyinszki J. és György. A. : Diszkrét matematika Főiskolásoknak, Typotex Kiadó, 2001-2017.
3. Katona Gyula, Recski András: Bevezetés a véges matematikába, BME egyetemi jegyzet, 1994.
4. Andrásfai Béla: Ismerkedés a gráfelmélettel, Tankönyvkiadó, 1995.

Dr. Radeleczki Sándor
A tárgy jegyzője

Miskolc, 2019. szeptember 09.

Zárthelyi dolgozat Diszkrét Matematika II-ből

Név:.. Kód...................................

1. Az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon adottak a
$\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (5, 4), (5, 6), (6, 4)\}$ és az
$R = \{(1, 4), (1, 6), (2, 1), (3, 2), (3, 5), (4, 3), (5, 1), (6, 1)\}$ bináris relációk.
(a) Számítsa ki a $R^2 \cap (\rho \circ R^{-1})$ relációt. (3p)
(b) Igazolja hogy a háromszögek hasonlósága ekvivalencia reláció. (2p)

2. (a) Van-e olyan fa aminek fokszámai 1, 1, 3, 3 és 2 ? (indoklással) (2p)
(b) Igazolja, hogy minden legaláb kétpontú fa kromatikus száma 2 (2p)
(c). Van-e a $K_{3,4}$ gráfban Euler kör vagy vonal; Hamilton kör vagy vonal? Ha igen találja meg. Mennyi a gráf kromatikus száma? (2p+2p+1p)

3. A $G = (V, E)$ egyszerű gráfban $\mid V \mid= 7$ és minden pontnak a fokszáma legalább 4. Igazolja hogy:
(a) G-ben éleinek a száma $14 \leq\mid E \mid\leq 21$. (3p)
(b) G tartalmaz Hamilton kört és kromatikus száma legalább 3 (2p+1p)
(c) G összefüggő. (1p)
(d) Legfeljebb hány éle lehet G-nek amenyiben síkgráf? (2p)

Teszt Diszkrét Matematika II-ből

Név:.. Kód...

1. (a) Legfeljebb mennyi lehet egy síkgráf kromatikus száma? (1p)
(b) Ha az A halmaznak az elemszáma 11, mekkora a $(P(A), \subseteq)$ háló láncfedési száma? (indoklás) (2p)
(c) Milyen tulajdonságait ismeri a $(P(A), \subseteq)$ hálónak? (2p)

2. (a) Adja meg a $(D(72)\ \trianglelefteq)$ háló Hasse diagramját. (2p)
(b) Disztributív-e az így kapott háló? Mennyi a láncfedési száma ? (Válaszait indokolja) (3p)
(c) Adjon meg $(D(72)\ \trianglelefteq)$-ban egy maximális hosszúságú láncot. (1p)
(d) Számítsa ki ebben a hálóban $\sup\{3, 4, 18\}$-at. (1p)

3. (a) Hány 5 elemű nem izomorf háló létezik? Miért? Melyek ezek közül azok, amelyek disztributívak - és miért ? (4p)
(b) Jelentse ki Dilworth láncokra és antiláncokra vonatkozó tételét. (1p)
(c) Adja meg M_3 egy lineáris kiterjesztését. (1p)

Javítási útm. / Zárthelyi d.

$\boxed{1}$ (a) $R^2 = R \circ R = \{\underline{(1,3)}, (1,1), \underline{(2,4)}, (2,6), \underline{(3,1)}, \underline{(4,2)}, \underline{(4,5)}, (5,4), (5,6), (6,4), (6,6)\}$ (1p)

$R^{-1} = \{(1,2), (1,5), (1,6), (2,3), (3,4), (4,1), (5,3), (6,1)\}$

$S \circ R^{-1} = \{\underline{(1,3)}, \underline{(2,4)}, \underline{(3,1)}, (3,3), \underline{(4,2)}, \underline{(4,5)}, (4,6), (5,1), (6,1)\}$ (1p)

$R^2 \cap (S \circ R^{-1}) = \{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2), (4,5)\}$. (1p)

(b) $ABC\Delta \sim ABC\Delta$: a $\sim$ reláció reflexív

$ABC\Delta \sim DEF\Delta \Leftrightarrow DEF\Delta \sim ABC\Delta \Rightarrow \sim$ szimmetrikus (1p)

$(ABC\Delta \sim DEF\Delta, DEF\Delta \sim GHI\Delta) \Rightarrow (ABC\Delta \sim GHI\Delta) \Rightarrow \sim$ tranzitív

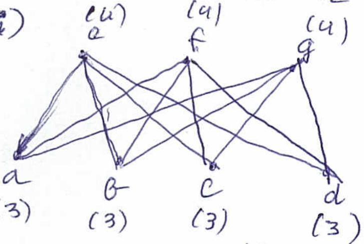
$\Big\}$ $\sim$ ekvivalencia rel. (1p)

$\boxed{2}$ (a) Ha volna $G = (V, E)$ fa lenne, akkor $|V| = 5$ és $|E| = |V| - 1 = 4$ eleme. Mivel $2|E| = \sum_{i=1} d_i$, (1p) ezért

$2 \cdot 4 \neq 1+1+3+3+2$ nem teljesülne $\Rightarrow$ ilyen fa nincs (1p)

(c)

K$_{3,4}$:



(b) Minden $G = (V, E)$ fa körmentes, ezért ha $|V| \geq 2$, akkor G páros gráf, és így $\chi(G) = 2$ (2p)

Hamilton vonal van $K_{3,4}$-ben ez $a-g-d-f-c-e-b$. (1p) Hamilton kör nem lehet mert $K_{3,4}$ páros gráf, így nem lehet benne 7-es hosszúságú kör. (1p) Mivel $K_{3,4}$-ben 2-nél több páratlan fokszámú pont van (a, b, c és d) ezért nem lehet benne sem Euler kör sem Euler vonal. (2p)

$\boxed{3}$ (a) Mivel G egyszerű gráf minden $a_i \in V$ pontjára $4 \leq d(a_i) \leq 6$, $i = \overline{1,7}$. (1p)

Lévén $2|E| = \sum_{i=1}^{7} d(a_i)$, (1p) ezért $28 \leq 2|E| \leq 42 \Rightarrow 14 \leq |E| \leq 21$ (1p)

(b) Mivel $d(a_i) \geq \frac{7}{2} = 3{,}5$ minden $a_i \in V$ pontra, ezért Dirac tétel szerint G tartalmaz Hamilton kört (2p). Mivel ez 7-es páratlan hosszúságú, ezért $\chi(G) \geq 3$. (1p). Mivel tartalmaz Hamilton kört összefüggő (1p)

(d) Ha G síkgráf lenne, mivel egyszerű és $|V| \geq 3$, ezért $|E| \leq 3|V| - 6$ (1p) teljesülne. Így $|E| \leq 3 \cdot 7 - 6 = 15$. Tehát legfeljebb $\underline{15}$ éle lehet. (1p)

Javítási útm / Test

(24)

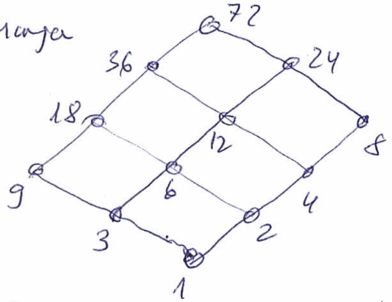
1 (a) A 4-szín tétel szerint $\chi(G)$ legfeljebb 4. (1p)

(b) $N=\binom{n}{\lceil \frac{n}{2}\rceil}$ (1p), itt: $N=\binom{11}{5}=462$. (1p)

(c) $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$ egy teljes atomisztikus Boole háló (2p)

2 (a) $D(72)=\{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72\}$

Hasse diagramja (2p)



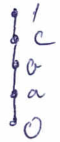
(b) $(D(72),\trianglelefteq)$ disztributív mert izomorf az $(\mathbb{N},\trianglelefteq)$ disztributív háló $[1,72]$ intervallumával. (2p)

$\{4,6,9\}$ egy max. antilánc $(D(72),\trianglelefteq)$-ben, így Dilworth tétele szerint a láncfedési száma $=3$. (1p)

(c) Egy max. lánc pl: $1\prec 2\prec 4\prec 8\prec 24\prec 72$ (1p)

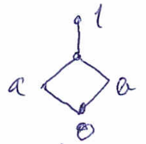
3 (a) Az 5-elemű háló legkisebb elemét 0-val legnagyobb elemét 1-el jelöljük. Mivel ezek minden elemmel összehasonlíthatók, így maximális antiláncai legfeljebb 3 eleműek lehetnek. (1p)

1-elemű max antilánc

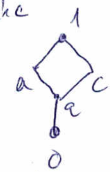


L egy lánc
1) ábra

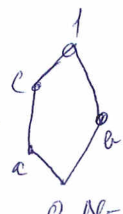
2-elemű max. antilánc



2 ábra

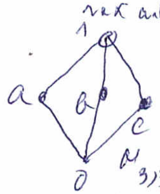


3 ábra



0 N_5
4 ábra

3-elemű max antilánc



0 $M_{3,3}$
5. ábra

(2p)

Egy disztributív háló nem tartalmazhatja részhálóként N_5-öt vagy $M_{3,3}$-at, így pontosan az 1), 2) és 3) ábrán látható hálók a disztributívak. (1p)

(c) M_3 egy lehetséges lineáris kiterjesztése: $0\prec a\prec b\prec c\prec 1$ (1p)