Ütemterv

a **Műszaki áramlástan** c. tárgyhoz (GEAHT001M)

gépészmérnöki és mechatronikai mérnöki mesterképzési szakos hallgatók részére

2019/2020. tanév I. félév

(2 óra előadás+1 óra gyakorlat)

1. hét: Folyadékok és gázok tulajdonságai. Ideális folyadék, ideális gáz, összenyomhatatlan és összenyomható folyadék, viszkozitás. Folyadéknyomás, skaláris tulajdonság, hidrosztatika alapegyenlete, speciális esetek: potenciálos erőtér, barotróp közeg, összenyomhatatlan folyadék, nehézségi erőtér. Nyomáseloszlás álló tartályban.

2. hét: A hidrosztatika alapegyenletének alkalmazása: síkfalra ható erő. A hidrosztatika alapegyenletének alkalmazása: síkfalra ható erő hatásvonalának meghatározása. Görbült falra ható erő. Kinematika elemei: áramvonal, pályavonal, nyomvonal, örvénymentes áramlás, sebességi potenciál.

3. hét: Térfogati integrál idő szerinti differenciálja, rendszer, együttmozgó térfogat, a Reynolds-féle transzportelmélet három alakja. Tömeg megmaradási tétel. Általános mozgásegyenlet, Euler-féle mozgásegyenlet 3 különböző alakja. Örvényes és örvénymentes áramlásra érvényes Bernoulli egyenlet. Energetikai jelentés.

4. hét: Impulzustétel. Az impulzustétel alkalmazása: könyökcsőre ható erő, folyadéksugár által egy elterelőlemezre ható erő. A Navier-Stokes mozgásegyenletek származtatása.

5. hét: Energiaegyenlet. A nyomás munkája. Energiaegyenlet stacionárius csőáramlásra, kinetikus energia korrekciós tényezője. Alkalmazás gőzturbina esetére. Összenyomhatatlan közeg stacionárius áramlására vonatkozó energiaegyenlet. Alkalmazás szivattyút vagy vízturbinát tartalmazó csőszakaszra.

6. hét: Áramlásos folyamatok. Speciális energia egyenlet: a Bernoulli egyenlet. Csövek és szerelvények hidraulikai ellenállása. Moody diagram. Hidraulikai átmérő. A Navier-Stokes egyenlet néhány megoldási lehetősége: időátlagolt egyenletek, turbulencia modellek, nagy örvények szimulációja (LES), direkt numerikus szimuláció (DNS).

7. hét: Hőátviteli folyamatok. Hővezetés, hőáramsűrűség, hőáram, hővezetési tényező. Stacionárius egydimenziós hővezetés egy rétegű síkfalban, hengeres falban és gömbhéjban. Hőáram, hőellenállás és hőmérsékleteloszlás az említett három esetben.

8. hét: Konvektív hőátadás a felületen. Hővezetés több rétegű síkfalban és hengeres falban hőátadással a felületen. Hőáram, hővezetési ellenállás, hőmérsékleteloszlás.

9. hét: Nemlineáris hővezetés (hőmérséklettől függő hővezetési tényező) egy rétegű síkfalban, hengeres falban és gömbhéjban. Hőáram, hőmérséklet-eloszlás. Állandó hővezetési tényező, mint speciális eset.

10. hét: A Navier-Stokes és az enegiaegyenlet megoldása: sebesség- és hőmérséklet eloszlás meghatározása Couette- áramlás esetén (alsó lap áll, a felső *U* sebességgel mozog, állandó hőmérsékletű falak). Eckert szám, Prandtl szám, hőátadás a felső lapon.

11. hét: A Couette- áramlás vizsgálata különböző hőmérsékleti peremfeltételek (különböző falhőmérsékletek; hőszigetelt alsó fal) esetén. Sebesség- és hőmérséklet eloszlás. Átlagsebesség és átlagos hőmérséklet.

12. hét: ZH

13. hét: Lamináris áramlás résben. Sebesség- és hőmérséklet eloszlás. Átlagsebesség és átlagos hőmérséklet.

14. hét: Csőben kialakuló lamináris áramlás. Sebesség- és hőmérséklet eloszlás. Átlagsebesség és átlagos hőmérséklet. PótZH (nem az előadás időpontjában).

Tantárgyi követelmények

1. A tárgy lezárásának módja: aláírás + vizsga.
2. Az aláírás megszerzésének feltételei: Részvétel az előadásokon és gyakorlatokon és az egy félévközi zárthelyi legalább elégséges (50%-os) szinten való teljesítése. A zárthelyi időtartama 80 perc, időpontja a szorgalmi időszak 12. hetére tervezett. A zárthelyi dolgozat értékelésének módja: 0-49%: elégtelen, 50%-tól megszerezte a hallgató az aláírást.
3. A sikertelen vagy meg nem írt zárthelyi pótlása a 14. héten történik.
4. Aki igazolatlanul távol marad mind a zárthelyiről, mind a pótzárthelyiről, végleges aláírás megtagadást kap.
5. A zárthelyi és pótzárthelyin aláírást nem szerzett hallgatók két alkalommal aláíráspótló zárthelyin vehetnek részt. Az aláírás megszerzéséhez az érintett hallgatónak az aláíráspótló zárthelyik valamelyikén szintén legalább a elérhető maximális pontszám 50%-át kell elérnie.
6. Az **írásbeli vizsgán** (elegendően nagy létszám esetén) a hallgatók 80 perces zárthelyit írnak, ahol az év közben elhangzott anyag elméleti kérdéseit, illetve azok gyakorlati alkalmazását (de számértékek nélkül) kérjük számon. Az elért pontszám alapján jegyet ajánlunk meg. Az értékelés módja: 0-49%: elégtelen, 50-59%: elégséges, 60-69%: közepes, 70-79%: jó, 80-100%: jeles. A jeles osztályzatot csak szóbeli megerősítéssel lehet szerezni.
7. A **szóbeli vizsgán** (kis létszám esetén) 2 tételt húz a hallgató; egyet a tételek első feléből és egy másikat a második feléből. Egy mellékfeltétel az, hogy a két húzott tétel sorszáma legalább 7-el különbözzék egymástól. Ilyenkor a hallgatók 20-30 perces felkészülési időt kapnak, majd szóban is elmondják a leírt anyag azon részét, amelyet a vizsgáztató kér. Ezen kívül a vizsgáztató még néhány olyan elemi kérdést is feltehet, amely nem kapcsolódik szorosan a két húzott tétel olyan témájához.

Ajánlott irodalom

1. Czibere Tibor: Áramlástan. Kézirat. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985
2. Lajos Tamás: Az áramlástan alapjai. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1997.

3. Baranyi László, Kalmár László: Áramlástan példatár. Kézirat. Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.
4. Karaffa Ferenc: Műszaki hőtan példatár. Miskolci Egyetemi Kiadó, 1994.
5. White, F.M.: Fluid Mechanics. 4th Edition, McGraw-Hill, Boston, 1999.
6. Roberson, J.A. - Crowe, C.T.: Engineering Fluid Mechanics. 3rd Edition, Houghton Mifflin Company, Boston, 1985
7. Özisik, M.N.: Heat Transfer. 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, 1985.
8. Bejan, A.: Heat Transfer. John Wiley and Sons, New York, 1993.

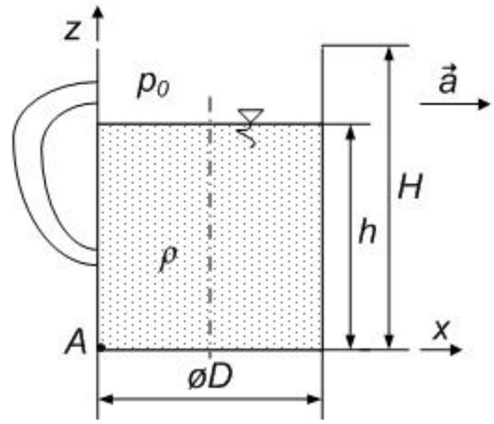
Miskolc, 2019.09.04. Baranyi László

Zárthelyi dolgozat a Műszaki hő- és áramlástan (GEAHT001M) c. tárgyból (MINTA!!!)

A zárthelyi időtartama: **90 perc**. A megfelelt minősítéshez szükséges: **35** pont.

---

1. Egy autós a kocsijában egy vízszintes tálcára helyezi a teásbögréjét, miközben egyenletesen gyorsít. A bögre magassága *H*, és álló helyzetben a tea *h* magasságig tölti meg a bögrét.

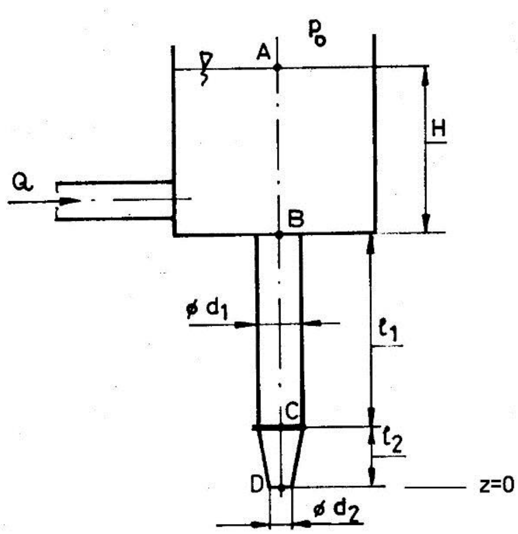


Adatok:

H = 12 cm; h = 7 cm; D = 6 cm; ρ = 1005 kg/m^3,

g =9,81 m/s^2; p_0 = 1 bar

a) Mekkora lehet a gyorsulás maximális értéke, hogy a tea még ne tudjon kifolyni a bögréből?
b) Határozza meg a túlnyomást az ábrán vázolt *A* pontban: álló és gyorsuló jármű esetén is!
c) Mekkora erő hat a tea által a bögre alsó lapjára álló és gyorsuló jármű esetén? **(23 pont)**

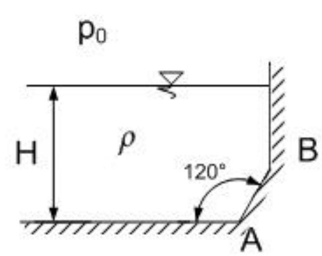


2. Az ábrán látható $3\,\mathrm{m}$ magasságú tartályt az oldalán elhelyezkedő csövön keresztül $Q = 0{,}08\,\mathrm{m^3/s}$ térfogatáramú, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű vízzel töltjük fel. A betáplált víz egy része a tartály alján lévő konfúzorban végződő csövön távozik.

a) Az egyensúly beállta után milyen *H* magasságban áll meg a folyadék a tartályban?
b) Rajzolja meg – **számszerű metszékek bejelölésével** – a folyadékfelszín és a konfúzor kiömlő keresztmetszete között a folyadék tömegegységére vonatkoztatott energiadiagramját!
c) Mekkora és milyen irányú erő hat a konfúzorra? A konfúzor önsúlyától és a konfúzorban lévő folyadék súlyától eltekintünk!

Adatok: $l_1 = 2\ \mathrm{m}$, $l_2 = 1\ \mathrm{m}$, $d_1 = 159{,}5\,\mathrm{mm}$, $d_2 = 100{,}9\,\mathrm{mm}$, $g \cong 10\,\mathrm{m/s^2}$, $p_0 = 0{,}1\,\mathrm{MPa}$ **(30 pont)**

3. A folyadék súlyából származóan mekkora nagyságú és milyen irányú erő hat az ábrán látható fal AB szakaszának *b* szélességű szelvényére, ha a medence *H* magasságig van ρ sűrűségű folyadékkal megtöltve? Határozza meg az erő hatásvonalát!



Adatok: $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $H = 7\,\mathrm{m}$

$b = 2\,\mathrm{m}$, $l_{AB} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{m}$ **(17 pont)**

Zárthelyi megoldása a Műszaki hő- és áramlástan (GEAHT001M) c. tárgyból (MINTA)

1. Egy autós a kocsijában egy vízszintes tálcára helyezi a teásbögréjét, miközben egyenletesen gyorsít. A bögre magassága H, és álló helyzetben a tea h magasságig tölti meg a bögrét.

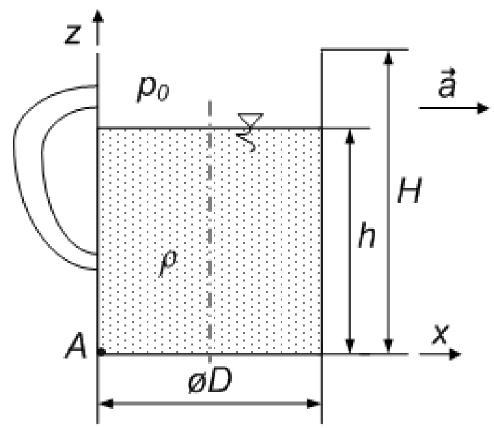
Adatok:

$H = 12$ cm; $h = 7$ cm; $D = 6$ cm; $\rho = 1005$ kg/m^3, g =9,81 m/s^2; $p_0 = 1$ bar

a. Mekkora lehet a gyorsulás maximális értéke, hogy a tea még ne tudjon kifolyni a bögréből?

b. Határozza meg a túlnyomást az ábrán vázolt A pontban: álló és gyorsuló jármű esetén is!

c. Mekkora erő hat a tea által a bögre alsó lapjára álló és gyorsuló jármű esetén?



Adatok:

$\rho := 1005$ kg/m^3 $\quad H := 0.12$ m $\quad h := 0.07$ m

$p_0 := 10^5$ Pa $\quad g := 9.81$ m/s^2 $\quad D := 0.06$ m

a.) Hidrosztatika alapegyenlete: $\vec{f} = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ p$

Komponensenként:

$$\left.\begin{aligned} -a &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ -g &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \ , \qquad p = -\rho a x + K_1(z)$$

$$\frac{dK_1}{dz} = \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad K_1 = -\rho g z + K_2$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$p(x,z) = -\rho a x - \rho g z + K_2$$

A *B* pontban a peremfeltételek: $x = D/2,\ z = h,\ p = p_0 \quad \Rightarrow \quad K_2 = p_0 + \rho a D/2 + \rho g h$

A nyomáseloszlás: $\boxed{p = p_0 + \rho a (D/2 - x) + \rho g (h - z)}$ (1)

A *C* pontban a peremfeltételek: $x = 0,\ z = H,\ p = p_0$

A maximális gyorsulás: $a := \frac{-2\cdot g}{D}\cdot(h - H)$ $\quad a = 16.35$ m/s^2

b.) álló esetben: $p_A - p_0 = \rho g h$ $\quad p_{álló} := \rho\cdot g\cdot h$ $\quad p_{álló} = 690.134$ Pa

mozgó esetben: $p_A - p_0 = \rho g H$ $\quad p_{mozgó} := \rho\cdot g\cdot H$ $\quad p_{mozgó} = 1.183\times 10^3$ Pa

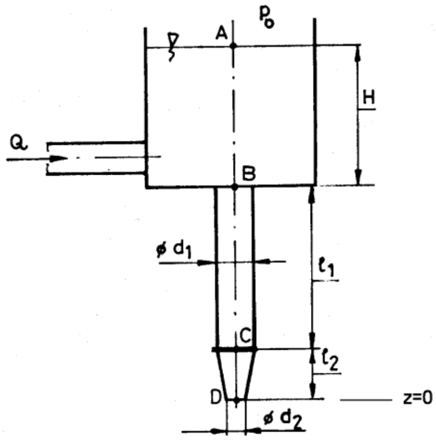
c.) F_a=? Mozgó és álló esetben is ugyanakkora erő hat az alaplapra!

$$F_a = \left(p_{alap} - p_0\right)_S A_{alap}$$

Az alaplap súlypontjában a peremfeltételek: $z = h,\ x = D/2$

Az (1) egyeletből: $\left(p_{alap} - p_0\right)_S = \rho g h$

$F_a := \rho\cdot g\cdot h\cdot\frac{D^2\cdot\pi}{4}$ $\quad F_a = 1.951$ N



2. Az ábrán látható 3 m magasságú tartályt az oldalán elhelyezkedő csövön keresztül $Q = 0{,}08\,\mathrm{m^3/s}$ térfogatáramú, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ sűrűségű vízzel töltjük fel. A betáplált víz egy része a tartály alján lévő konfúzorban végződő csövön távozik.

a) Az egyensúly beállta után milyen H magasságban áll meg a folyadék a tartályban?

b) Rajzolja meg – **számszerű metszékek bejelölésével** – a folyadékfelszín és a konfúzor kiömlő keresztmetszete között a folyadék tömegegységére vonatkoztatott energiadiagramját!

c) Mekkora és milyen irányú erő hat a konfúzorra? A konfúzor önsúlyától és a konfúzorban lévő folyadék súlyától eltekintünk!

Adatok: $l_1 = 2\ \mathrm{m}$, $l_2 = 1\,\mathrm{m}$, $d_1 = 159{,}5\,\mathrm{mm}$, $d_2 = 100{,}9\,\mathrm{mm}$, $g \cong 10\,\mathrm{m/s^2}$, $p_0 = 0{,}1\,\mathrm{MPa}$

Adatok:

$\rho := 100($ kg/m^3	$d_1 := 0.159\text{ξ}$ m	$l_1 := 2$ m	$Q := 0.0\text{ξ}$ m^3/s
$p_0 := 10^5$ Pa	$d_2 := 0.100\text{ξ}$ m	$l_2 := 1$ m	$g := 1($ m/s^2

a.)

A-D pontra Bernoulli-egyenlet: $\dfrac{p_A}{\rho} + g\,z_A + \dfrac{v_A^2}{2} = \dfrac{p_D}{\rho} + g\,z_D + \dfrac{v_D^2}{2}$

Peremfeltétel: $p_A = p_0$, $v_A = 0$, $z_A = H + l_1 + l_2$,
$p_D = p_0$, $z_D = 0$

Kontinuitási tétel: $Q = A_D\,v_D = A_B\,v_B$

$v_D := 4 \cdot \dfrac{Q}{d_2^2 \cdot \pi}$ $\quad v_D = 10.005$ m/s $\quad \dfrac{v_D^2}{2} = 50.05$ J/kg

$H := \dfrac{v_D^2}{2 \cdot g} - l_1 - l_2$ $\quad H = 2.005$ m

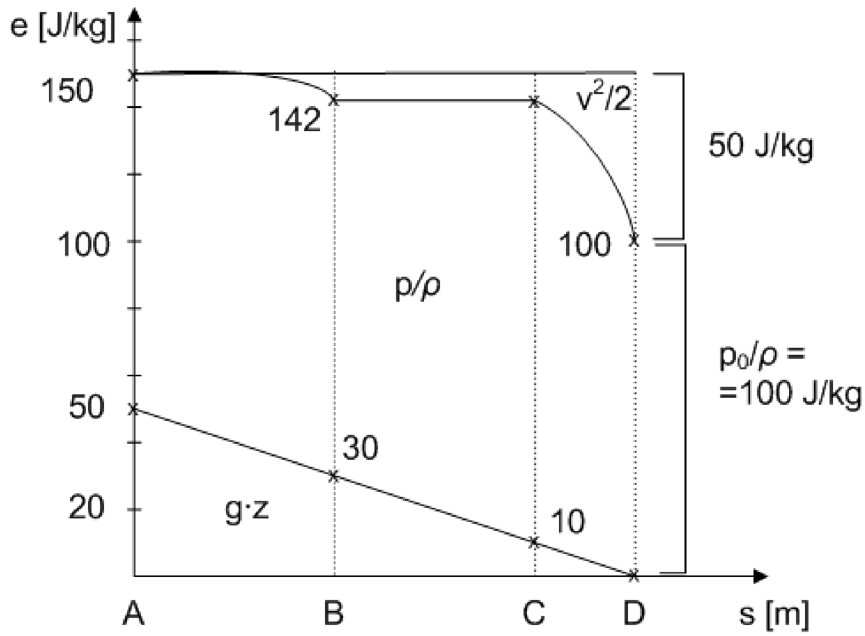
b.)

$e_ö = \dfrac{p_A}{\rho} + g\,z_A + \dfrac{v_A^2}{2}$ $\qquad$ Peremfeltétel: $p_A = p_0$, $v_A = 0$,

$e_ö := \dfrac{p_0}{\rho} + g \cdot (H + l_1 + l_2)$ $\quad e_ö = 150.05$ J/kg

Kontinuitási tétel: $Q = A_F\,v_F = A_B\,v_B$

$v_B := 4 \cdot \dfrac{Q}{d_1^2 \cdot \pi}$ $\quad v_B = 4.004$ m/s $\quad \dfrac{v_B^2}{2} = 8.015$ J/kg



c.)

Impulzustétel: $\vec{R} = \dot{m}(\vec{v}_C - \vec{v}_D) + \vec{G} + \vec{P}_C^* + \vec{P}_D^*$

Peremfeltétel: $\dot{m} = \rho Q$, $\vec{v}_C = -v_B \vec{k}$, $\vec{v}_D = -v_D \vec{k}$, $\vec{G} = \vec{0}$

$$\vec{P}_i^* = -\int_{A_i} (p_i - p_0) d\vec{A}, \quad (i = C, D)$$

$$p_D = p_0 , \Rightarrow \quad \vec{P}_D^* = \vec{0} \ , \ \vec{P}_C^* = -(p_C - p_0) A_C \vec{k}$$

Bemoulli egyenlet A-C pont közé:

$$\frac{p_A}{\rho} + g z_A + \frac{v_A^2}{2} = \frac{p_C}{\rho} + g z_C + \frac{v_C^2}{2}$$

Peremfeltétel: $p_A = p_0$, $v_A = 0$, $z_A = H + l_1 + l_2$

$v_C = v_B$, $z_C = l_2$

$$p_C := p_0 + \rho \cdot g \cdot (H + l_1) - \frac{\rho}{2} \cdot v_B^2$$

$p_C = 1.32 \times 10^5$ Pa

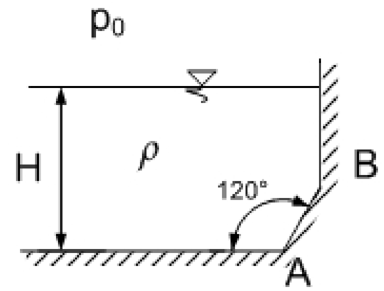
$$\vec{R} = \rho Q(-v_B \vec{k} + v_D \vec{k}) - (p_C - p_0) \frac{d_1^2 \pi}{4} \vec{k}$$

$$R := \rho \cdot Q \cdot (-v_B + v_D) - (p_C - p_0) \cdot \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4}$$

$R = -159.98$ N

$\vec{R} = -159{,}98 \vec{k}\ [N]$

3. A folyadék súlyából származóan mekkora nagyságú és milyen irányú erő hat az ábrán látható fal AB szakaszának b szélességű szelvényére, ha a medence H magasságig van ρ sűrűségű folyadékkal megtöltve? Határozza meg az erő hatásvonalát!



Adatok: $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $H = 7\,\mathrm{m}$, $b = 2\,\mathrm{m}$, $l_{AB} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{m}$

Adatok:

$p_0 := 10^5$ Pa $\quad \rho := 1000$ kg/m^3 $\quad b := 2$ m $\quad \alpha := 60$ ° $\quad g := 9.81$ m/s^2 $\quad H := 7$ m $\quad l_{AB} := 2\cdot\sqrt{3}$ m

Az AB szakasz súlypontjára ható erő: $\quad F_{AB} = (p - p_0)_S\, A\,, \quad A = l_{AB}\, b$

Hidrosztatika alapegyenlete: $\quad \dfrac{p}{\rho} + g\,z = \acute{a}ll. \qquad p = p_0 - \rho\, g\, z$

A súlypontban: $\quad z = -h_S \;\Rightarrow\; (p - p_0)_S = \rho\, g\, h_S$

Az ábrából:

$$h_S = H - \frac{l_{AB}}{2}\sin 60° \qquad h_S := H - \frac{l_{AB}}{2}\cdot\sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{180}\right) \qquad h_S = 5.5 \text{ m}$$

$$F_{AB} := \rho\cdot g\cdot h_S\cdot l_{AB}\cdot b \qquad F_{AB} = 373811.21 \text{ N}$$

$$F_{ABx} := F_{AB}\cdot\sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{180}\right) \qquad F_{ABx} = 323730 \text{ N}$$

$$F_{ABz} := -F_{AB}\cdot\cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{180}\right) \qquad F_{ABz} = -186905.6 \text{ N}$$

$$\vec{F}_{AB} = 373{,}81121\,\vec{i} - 186{,}9056\,\vec{k} \quad \text{kN}$$

Határozza meg az erő hatásvonalát!

$$k = y_Q - y_S = \frac{\bar{I}_X}{A\,y_S} = \frac{b\,l_{AB}^3}{12\,l_{AB}\,b\,y_S} \qquad y_S = \frac{h_S}{\sin 60°}$$

$$y_S := \frac{h_S}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad y_S = 6.351 \text{ m}$$

$$k := \frac{b\cdot l_{AB}^{\,3}}{12\cdot l_{AB}\cdot b\cdot y_S} \qquad k = 0.157 \text{ m}$$

Vizsgazárthelyi dolgozat a Műszaki hő- és áramlástan (GEAHT001M) c. tárgyból (MINTA!!!)

A zárthelyi időtartama: 100 perc

Elérhető pontszám: **80 pont** Elégségeshez szükséges pontszám: **40 pont**

1. Mit nevezünk kritikus sugárnak? Hogyan számolja ki a szigetelőréteg kritikus sugarát? Nevezze meg az összefüggésben lévő mennyiségeket és adja meg azok SI mértékegységét! (**5 pont**)

2. **Származtassa** a Bernoulli egyenletet örvénymentes áramlás esetén és írja fel a speciális eseteit! (**12 pont**)

3. Egy csővezetékszakaszba épített, vízszintes tengelyű V térfogatú konfúzoron (szűkülő csatornán) keresztül ρ sűrűségű és Q térfogatáramú súrlódásmentes folyadék áramlik a p_0 nyomású környezetbe. A konfúzor belépő keresztmetszete d_1, a kilépő pedig d_2. A belépő keresztmetszeten mérhető nyomás p_1. Készítsen ábrát! A konfúzor önsúlyát elhanyagolva, a fenti mennyiségeket adottnak tekintve **származtassa** azt az összefüggést, amelyből kiszámítható a konfúzorra ható erővektor! (**15 pont)**

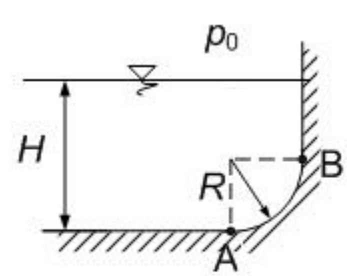
4. Írja fel egyenes csőszakasz és szerelvények esetén hogyan határozná meg az áramlási veszteséget! Nevezze meg az összefüggésben lévő mennyiségeket és adja meg azok SI mértékegységét! (**6 pont**)

5. Az energiaegyenlet megfelelő alakjának alkalmazásával származtassa a **vízturbina** P_T tengely-teljesítményének számítására alkalmas összefüggést! Nevezze meg az összefüggésben lévő mennyiségeket és adja meg azok SI mértékegységét! (**5 pont**)

6. **Származtassa** egy-dimenziós stacionárius hővezetés esetén a kétrétegű hengeres falban – hőátadással a két felületén – a kialakuló hőáram és hőellenállás számítására alkalmas összefüggéseket! **Származtassa** továbbá a két réteg érintkezési hőmérsékletét! Készítsen ábrát! Adott: L, r_1, r_2, r_{12}=r_{21}, λ_1, λ_2, α_1, α_2, θ_{F1} és θ_{F2} (a két oldali közeghőmérsékletek). Írja fel az összefüggésekben szereplő mennyiségek nevét és SI mértékegységét! **(15 pont)**

7. **Származtassa** a kinetikus energia korrekciós tényezőjét csőáramlásra! (**10 pont**)

8. **Származtassa**, hogy a folyadék súlyából származóan mekkora nagyságú és milyen irányú erő hat az ábrán látható fal AB szakaszának b szélességű szelvényére, ha a medence H magasságig van ρ sűrűségű vízzel megtöltve? **Adott:** ρ, H, R, b **(12 pont)**



Vizsgazárthelyi dolgozat megoldása a Műszaki hő- és áramlástan (GEAHT001M) c. tárgyból (MINTA!!!)

1. Mit nevezünk kritikus sugárnak? Hogyan számolja ki a szigetelőréteg kritikus sugarát? Nevezze meg az összefüggésben lévő mennyiségeket és adja meg azok SI mértékegységét! (**5 pont**)

   Egyes esetekben előfordul, hogy a csőfalra helyezett szigetelés a hőveszteséget nem csökkenti, hanem **<u>növeli</u>**! → Kritikus sugár

   $$\boxed{r_{szK} = \frac{\lambda_{sz}}{\alpha_2}}$$

   Ennek oka, hogy a hővezetési ellenállást növeli a szigetelő réteg, de megnő a külső hőátadó felület, amely növeli a hőleadást.

2. **Származtassa** a Bernoulli egyenletet örvénymentes áramlás esetén és írja fel a speciális eseteit! (**12 pont**)

<u>Örvénymentes áramlás</u>: $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$

Kiindulás: Euler III. $$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \operatorname{rot}\vec{v} = -\operatorname{grad}\left[U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\right]$$

Feltételezzük: potenciálos erőtér , barotróp közeg $\vec{f} = -\nabla U$ $\quad P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla\left[U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\right]$$

$$\boxed{\vec{v} = \nabla\Phi = \operatorname{grad}\Phi}$$

Φ: sebességi potenciál

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi = \nabla\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\nabla\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla\left[U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\right]$$

$$\nabla\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\right] = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = K(t)}$$

Bernoulli egyenlet örvénymentes áramlásra

$K(t)$: Bernoulli konstans

Mindig egy adott időpontban írjuk fel, tehát $K(t)$ tényleges konstansként kezelhető.

<u>Örvénymentes áramlás speciáli esetei</u>:

- Stacionárius áramlás: $$\boxed{U + \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = e_m = konst\ .}$$

- Stacionárius, nehézségi erőtér, összenyomhatatlan közeg:

$$\boxed{\overbrace{gz}^{\text{fajlagos helyzeti energia}} + \underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\text{fajlagos mozgási energia}} + \overbrace{\frac{p}{\rho}}^{\text{nyomási energia}} = e_m = konst\ .}$$

Instacionárius áramlásnál:

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + e_m = konst\ .}$$

3. Egy csővezetékszakaszba épített, vízszintes tengelyű *V* térfogatú konfúzoron (szűkülő csatornán) keresztül *ρ* sűrűségű és *Q* térfogatáramú súrlódásmentes folyadék áramlik a p_0 nyomású környezetbe. A konfúzor belépő keresztmetszete d_1, a kilépő pedig d_2. A belépő keresztmetszeten mérhető nyomás p_1. Készítsen ábrát! A konfúzor önsúlyát elhanyagolva, a fenti mennyiségeket adottnak tekintve **származtassa** azt az összefüggést, amelyből kiszámítható a konfúzorra ható erővektor! (**15 pont)**

<u>Adott</u>: p_0, g, ρ, p_1, d_1, d_2, *V*, *Q*.

Impulzus tétel: $\vec{R} = \dot{m}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \vec{G} - \vec{G}_k + \vec{P}_1^* + \vec{P}_2^*$ $\qquad \vec{G}_k = \vec{0}$, $\vec{G} = -\rho g V \vec{k}$

$\dot{m} = \rho Q$, , Kontinuitási egyenlet: $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$\vec{v}_1 = \frac{4Q}{d_1^2 \pi}\vec{i} \qquad \vec{v}_2 = \frac{4Q}{d_2^2 \pi}\vec{i}$$

$$\vec{P}_i^* = -\int_{A_i} (p_i - p_k) d\vec{A}, \quad (i = 1,2); \quad p_2 = p_{2k} = p_0 \Rightarrow \vec{P}_2^* = \vec{0}\ ,$$

$$\vec{P}_1^* = -(p_1 - p_0)\frac{d_1^2 \pi}{4}(-\vec{i})$$

$$\vec{R} = \rho \frac{4Q^2}{\pi\ 2}\left[\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}\right]\vec{i} - \rho g V \vec{k} + (p_1 - p_0)\frac{d_1^2 \pi}{4}\vec{i}$$

2. Írja fel egyenes csőszakasz és szerelvények esetén hogyan határozná meg az áramlási veszteséget! Nevezze meg az összefüggésben lévő mennyiségeket és adja meg azok SI mértékegységét! (**6 pont**)

Áramlási veszteség számítása csővezetékeknél

- **Turbulens csőáramlás esetén**: $\boxed{Y' = \lambda \frac{L}{d}\frac{c^2}{2}}$ [J/kg] fajlagos mechanikai energia veszteség

  $\lambda = \lambda(\mathrm{Re};\ k/d)$ [-] csősúrlódási tényező

  k/d cső relatív érdessége

  $\mathrm{Re} = cd/\nu$ Reynolds-szám

- **Lamináris csőáramlás esetén**: $Y'_{lam} = \lambda_{lam}\frac{L}{d}\frac{c^2}{2}$ $\qquad \boxed{\lambda_{lam} = \frac{64}{\mathrm{Re}}}$

Szerelvények áramlási vesztesége: $Y' = \xi \frac{c^2}{2}$ $\qquad \xi$: [-] veszteségtényező

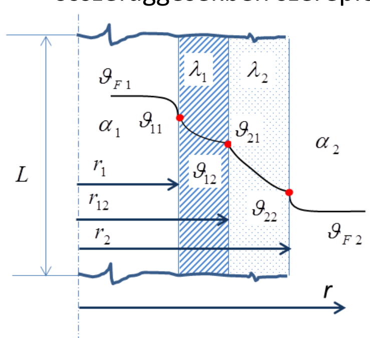
5. Az energiaegyenlet megfelelő alakjának alkalmazásával származtassa a **vízturbina** P_T tengely-teljesítményének számítására alkalmas összefüggést! Nevezze meg az összefüggésben lévő mennyiségeket és adja meg azok SI mértékegységét! (**5 pont**)

$$\frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \frac{v_1^2}{2} - w_t = \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 - u_1 - q \qquad w_t = \frac{P_T}{\dot{m}}$$

$$P_T = \dot{m}\left[\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g\left(z_1 - z_2\right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - Y'\right]$$

p: nyomás [Pa]; *g*: nehézségi gyorsulás [m/s^2]; *z*: magasság [m]; *v*: sebesség [m/s]
Y': fajlagos mechanikai veszteség [J/kg]; $\dot{m}$: tömegáram [kg/s]

6. **Származtassa** egy-dimenziós stacionárius hővezetés esetén a kétrétegű hengeres falban – hőátadással a két felületén – a kialakuló hőáram és hőellenállás számítására alkalmas összefüggéseket! **Származtassa** továbbá a két réteg érintkezési hőmérsékletét! Készítsen ábrát! Adott: *L*, r_1, r_2, $r_{12}=r_{21}$, λ_1, λ_2, α_1, α_2, θ_{F1} és θ_{F2} (a két oldali közeghőmérsékletek). Írja fel az összefüggésekben szereplő mennyiségek nevét és SI mértékegységét! **(15 pont)**



<u>Adott:</u> $\vartheta_{F1}, \vartheta_{F2}, \lambda_i, r_{i1}, r_{i2}, L, \alpha_1, \alpha_2 \quad (i = 1,2)$

$\dot{Q} = ? \quad \vartheta_{31} = ? \quad R = ?$

$$\dot{Q} = A(r)\dot{q}_i(r) = -\lambda_i \frac{d\vartheta_i}{dr_i} \underbrace{2\pi L r}_{A(r)} \quad \rightarrow -d\vartheta_i = \frac{\dot{Q}}{2\pi L \lambda_i}\frac{dr}{r} \quad / \int_{i1}^{i2}$$

$$\boxed{\vartheta_{i1} - \vartheta_{i2} = \frac{\dot{Q}}{2\pi L \lambda_i}\ln\frac{r_{i2}}{r_{i1}}} \quad \textbf{(1)} \qquad (i = 1,2)$$

newtoni hőátadási törvényből: $\boxed{\dot{Q} = \alpha_1(\vartheta_{F1} - \vartheta_{11})2\pi L r_1}$ **(2)** $\quad \boxed{\dot{Q} = \alpha_2(\vartheta_{32} - \vartheta_{F2})2\pi L r_2}$ **(3)**

Hőlépcső:
$$\vartheta_{F1} - \vartheta_{F2} = \underbrace{(\vartheta_{F1} - \vartheta_{11})}_{(2)\ \rightarrow\ \frac{\dot{Q}}{2\pi L}\frac{1}{\alpha_1 r_1}} + \underbrace{(\vartheta_{11} - \vartheta_{12})}_{(1)\ \rightarrow\ \frac{\dot{Q}}{2\pi L}\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{r_{12}}{r_{11}}} + \underbrace{(\vartheta_{21} - \vartheta_{22})}_{(1)\ \rightarrow\ \frac{\dot{Q}}{2\pi L}\frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{r_{22}}{r_{21}}} + \underbrace{(\vartheta_{22} - \vartheta_{F2})}_{(3)\ \rightarrow\ \frac{\dot{Q}}{2\pi L}\frac{1}{\alpha_2 r_2}}$$

$$\vartheta_{F1} - \vartheta_{F2} = \underbrace{\frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{r_{i2}}{r_{i1}} + \frac{1}{\alpha_2 r_2}\right)}_{R\text{: hővezetési ellenállás}}\dot{Q}$$

Hőáram:

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{2\pi L(\vartheta_{F1} - \vartheta_{F2})}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{r_{i2}}{r_{i1}} + \frac{1}{\alpha_2 r_2}}\ [\mathrm{W}]}$$

R: hővezetési ellenállás

$$R = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{r_{i2}}{r_{i1}} + \frac{1}{\alpha_2 r_2}\right)\left[\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}\right]$$

R: hővezetési ellenállás [K/W] $\quad$ ϑ: hőmérséklet [°C] $\quad$ $\dot{Q}$: hőáram [W]

λ: hővezetési tényező [W/(m K)] $\quad$ α: konvektív hőátadási tényező [W/(m^{2}K)]

7. **Származtassa** a kinetikus energia korrekciós tényezőjét csőáramlásra! (**10 pont**)

Energiaegyenlet stac. csőáramlásra: $\dot{Q}-\dot{W}_t = \int\limits_{(A)} \rho\left(u+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\right)\vec{v}\cdot d\vec{A}$ $\qquad (A)=(A_1)+(A_2)+(A_{pal})$

$$\dot{Q}-\dot{W}_t = \int\limits_{(A_1)} \rho\left(u+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\right)\vec{v}\cdot d\vec{A} + \int\limits_{(A_2)} \rho\left(u+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\right)\vec{v}\cdot d\vec{A} + \cancel{\int\limits_{(A_p)} \rho\left(u+\frac{p}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}\right)\underbrace{\vec{v}\cdot d\vec{A}}_{0}}$$

$$\dot{Q}-\dot{W}_t = \int\limits_{(A_1)} \rho\left(u+\frac{p}{\rho}+gz\right)\underbrace{\vec{v}\cdot d\vec{A}}_{-v\,dA} + \int\limits_{(A_1)} \rho\frac{v^2}{2}\underbrace{\vec{v}\cdot d\vec{A}}_{-v\,dA} + \int\limits_{(A_2)} \rho\left(u+\frac{p}{\rho}+gz\right)\underbrace{\vec{v}\cdot d\vec{A}}_{v\,dA} + \int\limits_{(A_2)} \rho\frac{v^2}{2}\underbrace{\vec{v}\cdot d\vec{A}}_{v\,dA}$$

$$\dot{Q}-\dot{W}_t = \int\limits_{(A_2)} \rho\left(u+\frac{p}{\rho}+gz\right)v\,dA + \int\limits_{(A_2)} \rho\frac{v^2}{2}v\,dA - \int\limits_{(A_1)} \rho\left(u+\frac{p}{\rho}+gz\right)v\,dA - \int\limits_{(A_1)} \rho\frac{v^2}{2}v\,dA$$

Átlagértékkel közelítve: $\dot{Q}-\dot{W}_t = \left(u_2+\frac{p_2}{\rho_2}+gz_2\right)\underbrace{\int\limits_{(A_2)}\rho\,v\,dA}_{\dot{m}} + \underbrace{\int\limits_{(A_2)}\rho\frac{v^3}{2}dA}_{\dot{m}\alpha_2\frac{\bar{v}_2^2}{2}} - \left(u_1+\frac{p_1}{\rho_1}+gz_1\right)\underbrace{\int\limits_{(A_1)}\rho\,v\,dA}_{\dot{m}} - \underbrace{\int\limits_{(A_1)}\rho\frac{v^3}{2}dA}_{\dot{m}\alpha_1\frac{\bar{v}_1^2}{2}}$

$\int\limits_{(A)}\rho\,v\,dA = \bar{\rho}\,\bar{v}\,A = \dot{m}$

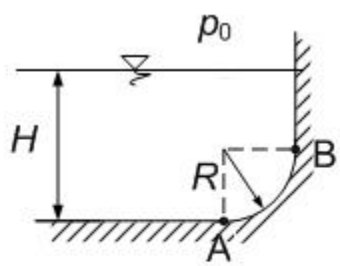
ahol $\bar{v}$: az átlagsebesség a keresztmetszetben

$\bar{\rho}$: az átlagsűrűség a keresztmetszetben

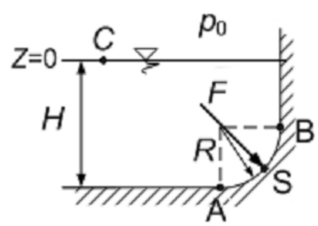
$\int\limits_{(A)}\rho\frac{v^3}{2}dA = \alpha\,\bar{\rho}\frac{\bar{v}^3}{2}A = \alpha\,\bar{\rho}\,\bar{v}\,A\frac{\bar{v}^2}{2} = \dot{m}\,\alpha\frac{\bar{v}^2}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{A}\int\limits_{(A)}\frac{\rho}{\bar{\rho}}\left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^3 dA}$ α: a kinetikus energia korrekciós tényezője [-]

Ha a közeg **összenyomhatatlan** $\qquad \alpha = \frac{1}{A}\int\limits_{(A)}\left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^3 dA$

8. Származtassa, hogy a folyadék súlyából származóan mekkora nagyságú és milyen irányú erő hat az ábrán látható fal AB szakaszának *b* szélességű szelvényére, ha a medence *H* magasságig van *ρ* sűrűségű vízzel megtöltve? **Adott:** *ρ*, *H*, *R*, *b* **(12 pont)**



Az AB felületre ható erő = a súlypont-beli túlnyomás x felület:



$$F_{AB} = (p-p_0)_S\,A$$

$$\vec{F}_{AB} = F_x\,\vec{i} - F_z\,\vec{k}$$

$$F_x = (p-p_0)_S\,A_{vet} \qquad A_{vet} = Rb$$

$$F_z = G = \rho\,g\,V \qquad V = \left[(H-R)R + R^2\pi/4\right]b$$

Hidrosztatika alapegyenlete: $\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow p = -\rho g z + K$ $\qquad$ C pontban: $z=0$, $p=p_0$ -> $K=p_0$

$$p(z) = p_0 - \rho g z$$

A súlypontbeli túlnyomás a hidrosztatika egyenlete alapján: $(p-p_0)_S = -\rho g z \qquad z = -(H-R/2)$

$F_x := \rho\cdot g\cdot\left(H-\frac{R}{2}\right)\cdot R\cdot b \qquad F_z := \rho\cdot g\cdot\left(H\cdot R - R^2 + R^2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot b \qquad F_{AB} := \sqrt{F_x^2+F_z^2}$

Tételjegyzék a Műszaki hő- és áramlástan (GEAHT001M) c. tárgyból (MINTA!!!)

1. Folyadékok és gázok tulajdonságai. Newton-féle súrlódási törvény.
2. A hidrosztatika alapegyenletének származtatása; speciális esetek.
3. Folyadékba merített síkfalra ható erő és hatásvonala.
4. Folyadékba merített görbült falra ható erő.
5. Folyadékok kinematikájának elemei: áramvonal, áramcső, gyorsulástér, örvénymentes áramlás.
6. A térfogati integrál idő szerinti szubsztanciális deriváltja. A tömegmegmaradás tétele. Tömegmegmaradás áramcsőre.
7. A folyadékáramlás általános mozgásegyenlete.
8. Súrlódásmentes eset: az Euler-féle mozgásegyenlet három alakja.
9. A Bernoulli egyenlet származtatása örvénymentes áramlás esetén.
10. A Bernoulli egyenlet származtatása örvényes áramlás esetén.
11. Az impulzustétel. Alkalmazás: könyökcsőre ható erő.
12. Az impulzustétel alkalmazása: folyadéksugár által az elterelő lemezre ható erő.
13. A Navier-Stokes mozgásegyenletek származtatása összenyomhatatlan és összenyomható folyadékra.
14. Energiaegyenlet a termodinamika I. főtétele alapján. Alkalmazás gőzturbina esetére (példa).
15. Energiaegyenlet stacionárius csőáramlásra összenyomhatatlan közeg esetén. Kinetikus energia korrekciós tényezője.
16. Stacionárius, összenyomhatatlan közegre vonatkozó energiaegyenlet alkalmazása szivattyú és vízturbina esetére (példák).
17. Energiaegyenlet áramlásos folyamatok esetén. Speciális eset: Bernoulli egyenlet.
18. Csövek hidraulikai ellenállása. Moody diagram. Szerelvények vesztesége. Áramlás nem kör keresztmetszetű csövekben, hidraulikai átmérő.
19. A turbulens áramlás fontosabb jellemzői. Időátlagolt Navier-Stokes egyenlet, Reynolds-féle mozgásegyenlet. Turbulencia modellek. Nagy örvények szimulációja (LES). Direkt numerikus szimuláció (DNS).
20. Hőátviteli folyamatok. Hővezetés, hőáramsűrűség, hőáram, hővezetési tényező.
21. Stacionárius egydimenziós hővezetés egy rétegű síkfalban, hőáram, hőellenállás, hőmérsékleteloszlás.
22. Stacionárius egydimenziós hővezetés hengeres falban. Hőáram, hővezetési ellenállás, hőmérsékleteloszlás.
23. Stacionárius egydimenziós hővezetés gömbhéjban. Hőáram, hővezetési ellenállás, hőmérsékleteloszlás.
24. Hővezetés és hőátadás több rétegű síkfalban hőátadással a felületen. Hőáram, hővezetési ellenállás, hőátadási ellenállás.
25. Hővezetés és hőátadás több rétegű hengeres falban hőátadással a felületen. Hőáram, hővezetési ellenállás, hőátadási ellenállás.
26. Egydimenziós stacionárius hővezetés síkfalban hőmérséklettől függő hővezetési tényező esetén.
27. Egydimenziós stacionárius hővezetés hengeres falban hőmérséklettől függő hővezetési tényező esetén.

28. Egydimenziós stacionárius hővezetés gömbhéjban hőmérséklettől függő hővezetési tényező esetén.
29. Couette áramlás sebesség- és hőmérsékleteloszlásának származtatása különböző falhőmérsékletek esetén. Eckert szám, Prandtl szám, hőátadás a felső lapon.
30. Couette áramlás hőmérsékleteloszlásának származtatása különböző falhőmérsékletek esetén; hőátadás a felső lapon, maximális hőmérséklet helye és értéke a két fal között.
31. Couette áramlás hőmérsékleteloszlásának származtatása azonos falhőmérséklet, illetve hőszigetelt alsó fal esetén.
32. Lamináris áramlás résben adott áramlás irányú nyomásgradiens esetén. Sebesség- és hőmérséklet eloszlás meghatározása. Maximális hőmérséklet.