

Operációkutatás és optimalizálás (GEMAK 112M)

Ütemterv:

1. Történeti áttekintés. Az operációkutatás célja. Operációkutatási feladatok osztályozása.
2. Lineáris algebrai összefoglaló, pivotálás, bázistranszformáció. Konvex halmazok.
3. A lineáris programozás alapfeladata. Grafikus megoldási módszer.
4. A szimplex módszer és alternatívái.
5. Dualitási problémakör. Érzékenységvizsgálat.
6. Hiperbolikus programozási feladat. Első zárthelyi megírása.
7. Egészértékű lineáris programozás.
8. Nevezetes integer programozási feladatok.
9. Hálózati folyamatok. Szállítási feladat, hozzárendelési probléma.
11. Bevezetés a nemlineáris optimalizálásba. Kvadratikus programozás.
12. Minimumkereső eljárások egy és többváltozós függvényekre.
13. Feltételes optimalizálás. Karush-Kuhn-Tucker feltételek. Második zárthelyi.
14. Optimalizálási feladatok megoldása Solverrel. Pótzárthelyi.

Követelmények:

aláírás + vizsga

Az aláírás megszerzésének feltétele a zárthelyik legalább elégséges szintű (50 %-ot meghaladó) megírása.

A vizsga 90 perces írásbeli dolgozat. Értékelése: 0-49%: elégtelen, 50-59%: elégséges, 60-69%: közepes, 70-79%: jó, 80-100%: jeles.

Irodalom:

Dr. Nagy Tamás: Operációkutatás, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1998.

Dr. Házy Attila: Nemlineáris optimalizálás. (elektronikus jegyzet)

Ferenczi Zoltán: Operációkutatás. (elektronikus jegyzet)

1. Bázistranszformációval határozza meg az $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

2. Írja fel az alábbi feladat modelljét és oldja meg szimplex módszerrel:

Egy üzemben kétféle terméket gyártanak, az első termék darabját 500, a második termék darabját 600 dollárért lehet értékesíteni a piacon. Az első termék egy darabjának elkészítéséhez 3 óra esztergálásra és 3 óra csiszolásra van szükség, míg a második termék egy egységének esetén 4 óra esztergálásra és 2 óra csiszolásra van szükség. Az esztergagép heti kapacitása 52 óra, a csiszológépé 38 óra. Milyen termékösszetétel adja heti lebontásban a maximális nyereséget? Mennyi a maximális nyereség?

3. Egy normál LP-feladat optimálás táblája a következő:

	x_2	u_2	u_3	b
u_1	0	2	0.5	4
x_1	-6	-1	3	3
x_3	5	1	-1	5
-z	-2	-3	-1	-120

b) Végezzen érzékenységvizsgálatot a primál feladat második feltételére vonatkozóan!

c) Ha két egységgel növeljük a primál feladat második feltételének jobb oldalán álló értéket, mennyivel változik meg az új optimális megoldásban a célfüggvény értéke?

a) Adja meg a primál és duál feladatok optimális megoldását, az optimumértékekkel együtt!

4. Adja meg az alábbi LP-feladat duálisát (nem kell megoldani):

$$x_1 \geq 0, x_2 \text{ előjelkötetlen}, x_3 \leq 0$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 7$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

5. Oldja meg az alábbi hiperbolikus programozási feladatot:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$\frac{2x_1 + x_2 - 2}{x_1 + x_2 + 1} \rightarrow \max$$

6. Grafikus módszerrel igazolja, hogy az alábbi LP feladatnak végtelen sok megoldása van:

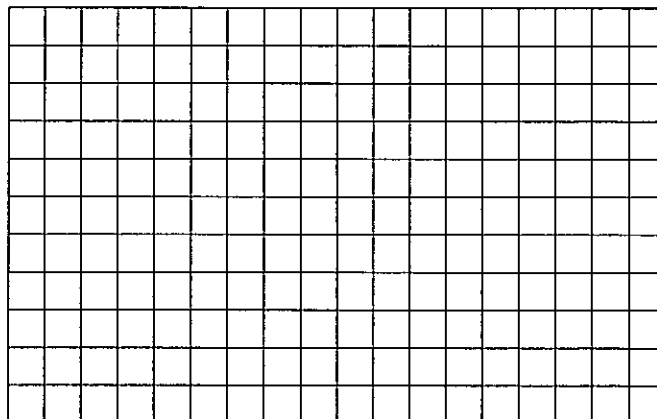
$$x \leq 4$$

$$y \leq 5$$

$$3x + 2y \leq 16$$

$$x, y \geq 0$$

$$6x + 4y \rightarrow \max$$



1) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 5 \\ -5 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

e_1	a_1	a_2	a_3	e_1	a_1	a_2	a_3	e_1	a_1	a_2	a_3	e_3	e_2	e_1	
e_1	-1	1	2	e_1	1	1	6	e_1	-1	-1	1	a_3	-1	-1	1
e_2	-2	1	-3	e_2	2	1	5	a_2	2	1	5	a_2	7	6	-5
e_3	1	0	4	a_1	1	0	4	a_1	1	0	4	a_1	5	4	-4

4p.

- 2) x_1 első termékéből $E: 3x_1 + 4x_2 \leq 52$
 6) x_2 második termékéből $CS: 3x_1 + 2x_2 \leq 38$
 gyártandó mennyiség, $x_1, x_2 \geq 0$ 2p.

$500x_1 + 600x_2 \rightarrow \max$

optimális megkötés:
 $x_1 = 8; x_2 = 7$

u_1	x_1	x_2	b	x_1	u_1	b	u_2	u_1	b
u_1	3	4	52	x_2	3/4	13	x_2		7
u_2	3	2	38	u_2	5/4	12	x_1	4/6	8
$-z$	+5	+6	0	$-z$	2/4	-78	$-z$	-2/3	-82

$Z_{\max} = 8200$ 1p.

3p.

3) a) primal: $x_1 = 3; x_2 = 0; x_3 = 5; z_{\max} = 120$

6) dual: $y_1 = 0; y_2 = 3; y_3 = 1; z_{\min} = 120$

b) $\left. \begin{aligned} 4 + 2\lambda \geq 0 &\rightarrow \lambda \geq -2 \\ 3 - \lambda \geq 0 &\rightarrow \lambda \leq 3 \\ 5 + \lambda \geq 0 &\rightarrow \lambda \geq -5 \end{aligned} \right\} -2 \leq \lambda \leq 3$

$x_1 = 3 - \lambda$
 $x_2 = 0$
 $x_3 = 5 + \lambda$
 $z = 120 + 3\lambda$

c) $\lambda = 2 \in [-2; 3]$, így 3λ -val vagyis 6-tal nő a célfn. értéke.

4) $3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1$ $7y_1 + 6y_2 + 10y_3 \rightarrow \min$

6) $-2y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 3$ $y_1 \geq 0; y_2 \leq 0; y_3$ előjelkötlen
 $y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 1$

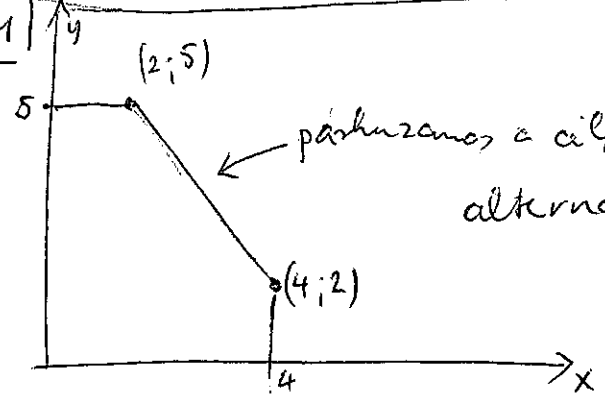
- 5) $y_1 + y_2 - 4t \leq 0$
 $y_1 - y_2 - 2t \leq 0$
 6) $y_1 + y_2 + t = 1$
 $2y_1 + y_2 + 2t \rightarrow \max$

u_1	y_1	y_2	t	b	u_1	y_1	y_2	u_3	t	y_1	u_1	b	u_2	u_1	t
u_1	1	1	-4	0	u_1	5	5	4	4	y_2	1	1/5	4/5	y_2	1/5
u_2	1	-1	-2	0	u_2	3	1	2	2	u_2	2	-1/5	8/5	y_1	3/5
u_3^*	1	1	1	1	t	1	1	1	1	t	0	-1/5	1/5	t	1/5
$-z$	2	1	-2	0	$-z$	4	3	2	2	$-z$	1	-3/5	-2/5	$-z$	-1/2
z^*	1	1	1	1	z^*	0	0	-1	0						

opt: $x_1 = 3; x_2 = 1; z = 1$

6) 4

$\Sigma 32$ pont



alternatív optimum, értéke: 32

1. Egy vásároló a hétköznapokon különböző városokban árulja a portékáját. Az alábbi táblázat megmutatja, hogy átlagosan mennyi bevételt (10000 Ft-ban) ér el az egyes városokban az adott napokon.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Miskolc	5	6	10	8	4
Ózd	5	6	8	7	3
Ónod	6	3	8	9	3
Szerencs	7	9	8	9	6
Nyíregyháza	6	4	5	9	2

Adja meg a városok és napok közötti optimális hozzárendelést, úgy, hogy a vásároló maximális haszonra tegyen szert!

2. Egy hátizsák teherbírása 80 kg, a berakásra váró dolgok tömegeit és értékeit adja meg az alábbi táblázat:

tömeg (kg)	40	25	20	20	18	16	15
érték (\$)	80	75	100	24	27	10	21
	2	3	5	1,2	1,5	0,6	1,1

Mennyi a maximális összértéke a zsákba beférő tárgyaknak?

3. Oldja meg az alábbi szállítási feladatot, melyben kikötjük, hogy az F1 fogyasztó igényét mindenképpen ki kell elégíteni. Mennyi a szállítási összköltség minimuma?

	F1	F2	F3	készletek
T1	5	7	1	10
T2	3	2	8	12
igények	8	15	7	

4. Egy felül nyitott, henger alakú pohár űrtartalma 0.5 liter. A pohár alja fémből készül 10 dollár/négyzetdeciméter áron, az oldala üvegből, 4 dollár/ négyzetdeciméter áron. Milyen méretek mellett kell a legkevesebbet fizetni a pohár elkészítéséért?

5. Határozza meg a KKT pontokat az alábbi NLO feladatban:

$$2y^2 + 4x + 3y \rightarrow \min$$

$$x + 7y = 25$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

1)

5	4	0	2	6	5	4	0	2	6	3	4	0	2	3	2	3	0*	2	2	2	2	0*	2	1
5	4	2	3	7	3	2	0	1	5	1	2	0	1	2	0*	1	0	1	1	0	0*	0	1	0
4	7	2	1	7	3	6	1	0	6	1	6	1	0	3	0	5	1	0*	2	0*	4	1	0	1
3	1	2	1	4	2	0	1	0	3	0	0	1	0	0	0	0	2	1	0	1	0	3	2	0*
4	6	5	1	8	3	5	4	0	7	1	5	4	0	4	0	4	4	0	3	0	3	4	0*	2

A max hason: $10+6+6+6+9 = \underline{37}$

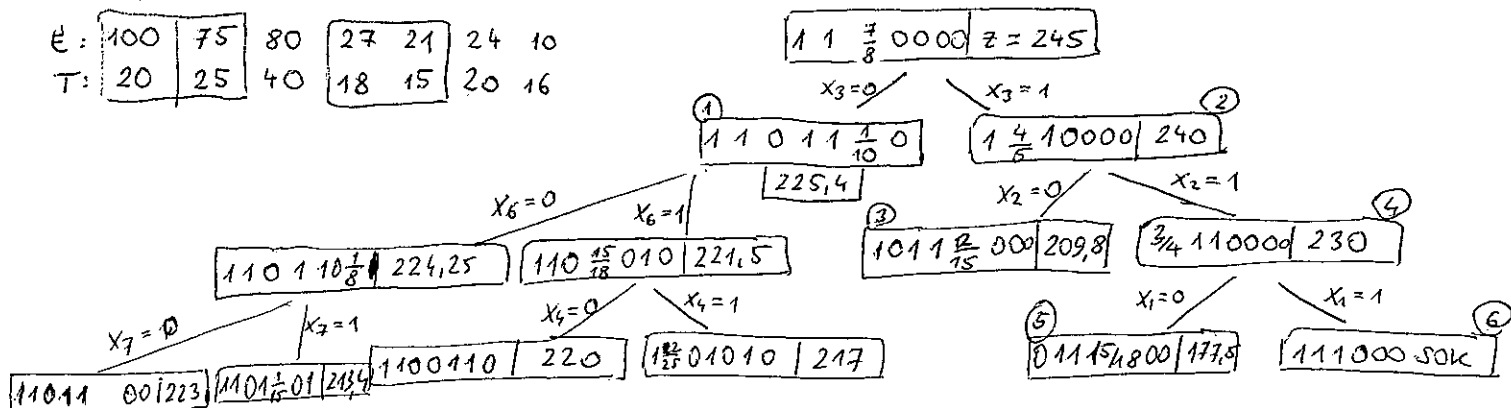
2) Megfelelő megoldás:

E:

100	75	80	27	21	24	10
-----	----	----	----	----	----	----

 T:

20	25	40	18	15	20	16
----	----	----	----	----	----	----



A max érték: $100+75+27+21 = \underline{223}$

3)

	F1	F2	F3	
T1	5	7	1	10
T2	3	2	8	12
T3	M	0	0	8
	8	15	7	

Kérdeti mérték:

8	2	-	10	20
-	12	-	12	0
M	1	7	8	70
8	15	7		
0	13	0		
		0		

	4	6	6
1	8	2	7
-4	-	12	-
-6	M	1	7
	M	0	0

$\bar{c}_{13} = 1-7 = -6$
 $\bar{c}_{21} = 3$
 $\bar{c}_{23} = 8-2 = 6$

x13 helyett x12:

	4	0	
1	8	-	2
	5	7	1
-	12	-	-
2	3	2	8
0	M	3	5
	M	0	0

$c_{12} = 6$
 $c_{21} = -3$
 $c_{23} = 6$

x21 helyett x33 5-el:

1	3	-	7	1	$c_{12} = 3$
-4	5	7	-	-	$c_{23} = 9$
-3	M	8	0	0	$c_{33} = 3$
	M	0	0		

A min. mell. költségek: $3 \cdot 5 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = \underline{51}$

3	-	7
5	7	-
-	8	-

5) $L(x, y, \lambda, \mu) =$

$= 2y^2 + 4x + 3y + \lambda(x + 7y - 25) + \mu(x^2 + y^2 - 25)$

$L'_x = 4 + \lambda + 2\mu x = 0$

$L'_y = 4y + 3 + 7\lambda + 2\mu y = 0$

$\mu(x^2 + y^2 - 25) = 0$

$\mu \geq 0$

$x + 7y = 25$

$x^2 + y^2 \leq 25$

1. eset $\mu = 0 \rightarrow \lambda = -4;$

$y = \frac{25}{7}$ kőnön kívül!

$y = 3; x = 4; y = 4; x = -3$

p(4;3): $4 + \lambda + 8\mu = 0$

$15 + 7\lambda + 6\mu = 0$

$15 + 7(-4 - 8\mu) + 6\mu = 0$

$\mu < 0$ nem KKT.

2. eset $x^2 + y^2 = 25$

$x + 7y = 25$

$(25 - 7y)^2 + y^2 = 25$

$625 - 350y + 50y^2 = 25$

$y^2 - 7y + 12 = 0$


$(y-3)(y-4) = 0$

p(-3;4) $4 + \lambda - 6\mu = 0$

$19 + 7\lambda + 8\mu = 0$

$19 + 7(6\mu - 4) + 8\mu = 0$

$\mu > 0$ (-3;4) KKT

4)  $V = r^2 \pi h = 0,5 \rightarrow h = \frac{0,5}{r^2 \pi}$
 $K = 10r^2 \pi + 4 \cdot 2r \pi h \rightarrow \min$

$K = 10r^2 \pi + 8r \pi \frac{0,5}{r^2 \pi} = 10r^2 \pi + \frac{4}{r}$

$K'(r) = 20r\pi - \frac{4}{r^2} = 0$, ha $20r\pi = \frac{4}{r^2}$

$r^3 = \frac{1}{5\pi}$

$K''(r) = 20\pi + \frac{8}{r^3} > 0$

$r \approx 0,4 \text{ dm}$

érték minimum van!

$h \approx 1 \text{ dm}$

A minimális költség $\approx 15,08$ \$

Feladatok (minden feladat 6 pontot ér)

1. Egy betörő 7 tárgyat talál egy lakásban, melyek tömegei: 40,50,30,10,10,40 és 30 kg értékeik pedig rendre: 40,60,10,10,3,20,60. Összesen 100 kg-nyi tárgyat képes elcipelni. Mennyi lehet a maximális összértéke az eltulajdonított tárgyakkak?

2. Egy üzem kétféle terméket állít elő három erőforrás felhasználásával, amelyek a termékek egy-egy egységébe rendre 3, 4, 2 illetve 2, 0, 4 mennyiségben épülnek be. Az egyes erőforrásokból legfeljebb 18, 16, 24 egységnyi használható fel. A késztermékek egy-egy darabjának az ára 4, illetve 2 pénzegység. Írja fel a feladat modelljét és adja meg azt a termelési programot melynek megvalósításával a lehető legnagyobb árbevétel érhető el!

3. Oldja meg az alábbi hiperbolikus programozási feladatot:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$\frac{2x_1 + x_2 - 2}{x_1 + x_2 + 1} \rightarrow \max$$

4. Oldja meg az alábbi szállítási feladatot, és határozza meg a minimális szállítási költséget! A táblázat belsejében álló számok egységnyi áru szállítási költségét jelentik.

	F1	F2	F3	F4	Készletek
T1	8	2	4	7	30
T2	7	4	3	2	40
T3	2	5	5	9	50
Igények	20	16	42	42	

5. Határozza meg az alábbi NLO feladat összes KKT pontját:

$$x + 2y + 4 \rightarrow \min$$

$$x^2 \leq y$$

$$y \leq 4$$

Elméleti kérdések (minden helyes válasz 2 pontot ér, kivéve a 4. kérdést, ami 4 pontos).

1. Adja meg az \mathbb{R}^n térben a szakasz definícióját!

2. Mi egy erőforrás árnyékárának a gazdasági jelentése?

3. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek lokális minimuma legyen az x_0 pontban?

4. Adja meg az alábbi LP feladat duálisát (nem kell megoldani!):

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ előjelkötetlen}$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 10$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

Értékelés: 0-15:1

16-21:2

22-27:3

28-33:4

34-40:5

OPTIMÁLIZÁCIÓS 2017.05.18. MEGOLDÁS

1) $60x_1 + 60x_2 + 40x_3 + 10x_4 + 20x_5 + 10x_6 + 3x_7 \rightarrow \max$
 $30x_1 + 50x_2 + 40x_3 + 10x_4 + 40x_5 + 30x_6 + 10x_7 \leq 100$

$1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ z=140$

1) $x_3=0$
 $1 \ 1 \ 0 \ 1 \ \frac{1}{4} \ 0 \ 0 \ z=135$

2) $x_3=1$
 $1 \ \frac{3}{5} \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ z=136$

5) $x_5=0$
 $1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \frac{1}{2} \ 0 \ z=133,3$

6) $x_5=1$
 $1 \ \frac{3}{2} \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ z=116$

3) $x_2=0$
 $1 \ 0 \ 1 \ 1 \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ z=120$

4) $x_2=1$
 $\frac{1}{3} \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ z=120$

7) $x_6=0$
 $1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ z=133$

8) $x_6=1$
 $1 \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ z=118$

$z_{\max} = 133$

ELMÉLETI. 4. feladat.
 $y_1 + y_2 \leq 1$
 $10y_1 + 8y_2 \rightarrow \max$
 $y_1 + 3y_2 \leq 2$
 $y_1 \geq 0$
 $4y_1 + y_2 = 1$
 y_2 előjelöttele

2) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
 $4x_1 \leq 16$
 $2x_1 + 4x_2 \leq 24$
 $4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$
 $x_1, x_2 \geq 0$

	x_1	x_2	b	u_2	x_2	b	u_2	u_1	b	
u_1	3	2	18	u_1	$-\frac{3}{4}$	2	x_2	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	3
u_2	4	0	16	x_1	$\frac{1}{4}$	0	x_1	$\frac{1}{4}$	0	4
u_3	2	4	24	u_3	$-\frac{3}{4}$	4	u_3	1	-2	4
$-z$	4	2	0	$-z$	-1	2	$-z$	$-\frac{1}{4}$	-1	-22

OPT. MEGOLDA'S:
 $x_1 = 4; x_2 = 3$
 $z_{\max} = 22$

3) $y_1 + y_2 - 4t \leq 0$
 $y_1 - y_2 - 2t \leq 0$
 $y_1 + y_2 + t = 1$
 $2y_1 + y_2 - 2t \rightarrow \max$

	y_1	y_2	t	b	u_1	y_2	b	u_2	u_1	b
u_1	1	1	-4	0	u_1	5	5	4	4	4
u_2	1	-1	-2	0	u_2	3	1	2	2	2
u_3^*	1	1	1	1	t	1	1	1	1	1
$-z$	2	1	-2	0		4	3	2	2	2
z^*	1	1	1	1		0	0	-1	0	0

OPT. MEGOLDA'S : $x_1=3; x_2=1; z=$

4) $20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 50x_4 \rightarrow \max$
 $10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 25x_4 \leq 80$
 $5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 20x_4 \leq 40$
 $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 16$
 $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$u_1 + v_1 = 8$
 $u_1 + v_2 = 2$
 $u_2 + v_2 = 4$
 $u_2 + v_3 = 3$
 $u_3 + v_3 = 5$
 $u_3 + v_4 = 9$
 $u_4 = 0; v_1 = 8; v_2 = 2$
 $u_2 = 2; v_3 = 1; v_4 = 4$
 $v_4 = 5$

$C_{13} = 4 - 0 - 1 = 3$
 $C_{14} = 7 - 0 - 5 = 2$
 $C_{21} = 7 - 2 - 8 = -3$
 $C_{24} = 2 - 2 - 5 = -5$
 $C_{31} = 2 - 4 - 8 = -10$
 $C_{32} = 5 - 4 - 2 = -1$
 x_{31} kell a bázisba!
 $u_1 + v_1 = 8$
 $u_1 + v_2 = 2$
 $u_2 + v_3 = 3$
 $u_3 + v_3 = 2$
 $u_3 + v_4 = 5$
 $u_4 = 0$
 $v_1 = 8$
 $v_2 = 2$
 $u_3 = 6$
 $v_3 = 11$
 $v_4 = 15$
 $u_2 = -8$
 $C_{13} = 4 - 0 - 11 = -7$
 $C_{14} = 7 - 0 - 15 = -8$
 $C_{21} = 7 + 8 - 8 = 7$
 $C_{22} = 4 + 8 - 2 = 10$
 $C_{24} = 2 + 8 - 15 = -5$
 $C_{32} = 5 + 6 - 2 = 9$
 x_{14}
 Ezután x_{24} :
 $-16 - 14$
 -40
 $20 - 2 \ 28$
 Ezután x_{13} :
 $-16 - 14$
 $-12 \ 28$
 $20 - 30 -$

5) $F(x, y, \mu_1, \mu_2) = x + 2y + 4 + \mu_1(x^2 - y) + \mu_2(y - 4)$

$F'_x = 1 + 2\mu_1 x = 0$
 $F'_y = 2 - \mu_1 + \mu_2 = 0$
 $\mu_1(x^2 - y) = 0$
 $\mu_2(y - 4) = 0$
 $\mu_1, \mu_2 \geq 0$
 $x^2 \leq y$
 $y \leq 4$

1. eset: $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0 \rightarrow$ nem lehet
 2. eset: $\mu_1 = 0, y = 4$ nem lehet
 3. eset: $x^2 = y, \mu_2 = 0 \rightarrow \mu_1 = 2, x = -\frac{1}{4}$
 $y = \frac{1}{16} \rightarrow$ KKT pont: $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$; $z = \frac{31}{8}$
 4. eset: $y = 4; x^2 = y$ azaz $x = \pm 2$
 $\mu_1 = -\frac{1}{2x} \ x = -2 \rightarrow \mu_1 = \frac{1}{4}$, de akkor $\mu_2 < 0 \rightarrow$ nem KKT

MEGOLDA'S:
 MIN KTSZ: 364
 $-16 \ 12 \ 2$
 -40
 $20 - 30 -$
 KKT