

ÜTEMTERV – GEMAK122M, GEMAK264B

az **Információelmélet** c. tárgyhoz
mérnök informatikus, programtervező informatikus gazdaságinformatikus,
2. félév, heti 2+2 óra, aláírás+kollokvium.

Előfeltétel: BSc végzettség vagy GEMAK131B vagy GEMAK232B.

Tárgyfelelős: Fegyverneki Sándor

- | | |
|--------|--|
| 1.hét | Kommunikációelmélet. Valószínűségelméleti áttekintés. Az egyirányú hírközlési rendszer általános modellje. |
| 2.hét | Információmennyiség, entrópia. Az entrópia tulajdonságai. |
| 3.hét | Bizonytalanság, a Kullback-Leibler eltérés és tulajdonságai. |
| 4.hét | Feltételes entrópia, kölcsönös információ. McMillan-felbontási tétele |
| 5.hét | Kódoláselméleti alapfogalmak, tételek. |
| 6.hét | Shannon-Fano-, Gilbert-Moore-, Huffman-féle kód. Az optimális kód tulajdonságai. |
| 7.hét | A kódolás hatékonysága. McMillan-dekódolási tétel. |
| 8.hét | Csatornakapacitás: emlékezetnélküli, zajmentes eset, bináris szimmetrikus csatorna. Nem azonos átviteli idő esete. |
| 9.hét | Blokkonkénti kódolás. A zajmentes hírközlés alaptétele, McMillan-felbontási tétel és a zajos kódolás kapcsolata. |
| 10.hét | Zajos, emlékezetnélküli csatorna kapacitása. Shannon-féle alaptétel. |
| 11.hét | Hibajelző és hibajavító kódok általános fogalmai. |
| 12.hét | Csoport kódok. Dekódolás osztályelsőkkel. |
| 13.hét | Az entrópia és kölcsönös információ folytonos esetben. |
| 14.hét | Csatornakapacitás. Gauss források és csatornák. |
| 15.hét | Az Arimoto-Blahut algoritmus és konvergenciája. |

A félévvégi aláírás feltétele: A 6. ill. a 12. héten egy-egy elégséges szintű zárthelyi dolgozat megírása. A zárthelyi időtartama 60 perc, 5 feladatot tartalmaz és a megoldási szint elégséges, ha legalább kettő feladat teljes megoldását tartalmazza. Ha nem sikerül, akkor pótlás az utolsó héten a megfelelő tananyagrészekből.

A kollokvium írásbeli. Kérdezhető elméleti és gyakorlati tananyag, ami az órákon elhangzott. Az írásbeli vizsgán (időtartam 100 perc) 8 elméleti kérdés (1-1 pont) és 4 feladat (2-2 pont) van. Kiértékelés: 0-5 pont (elégtelen), 6-7 pont (elégséges), 8-9 pont (közepes), 10-11 pont (jó), 12-16 pont (jeles), ha az elméleti kérdésekből legalább 4, a feladatokból pedig legalább 2 pontja van, egyébként elégtelen.

Akit a félévközi dolgozatok írásakor, a vizsgán vagy aláírás- (gyakorlati jegy) pótláson nem megengedett eszközök használata miatt felfüggesztenek, az ebből a tantárgyból ebben a félévben csak szóban, a tanszék által kijelölt időpontban, a tanszékvezető által kijelölt bizottság előtt vizgázhat(pótolhat).

Mat. Int.

Név:.....

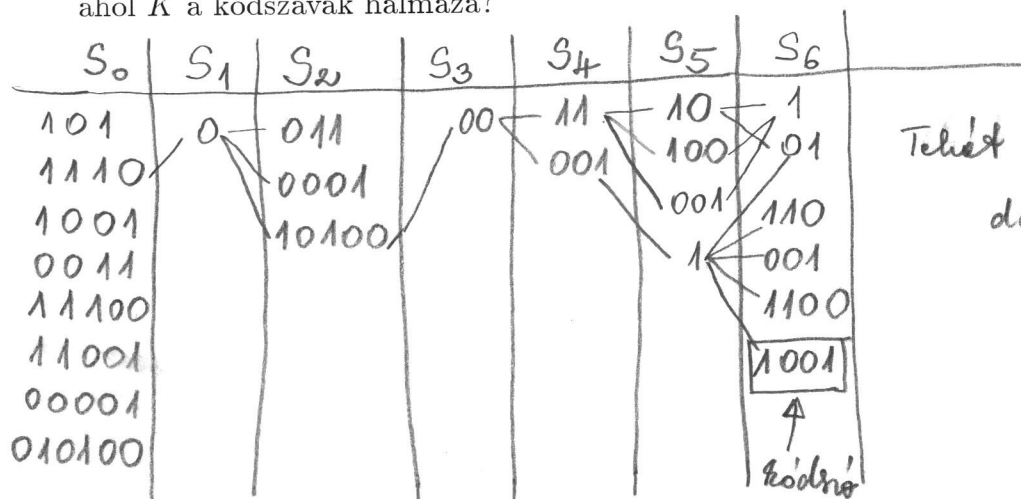
Alk. Mat. Tsz.

Tankör:.....

A

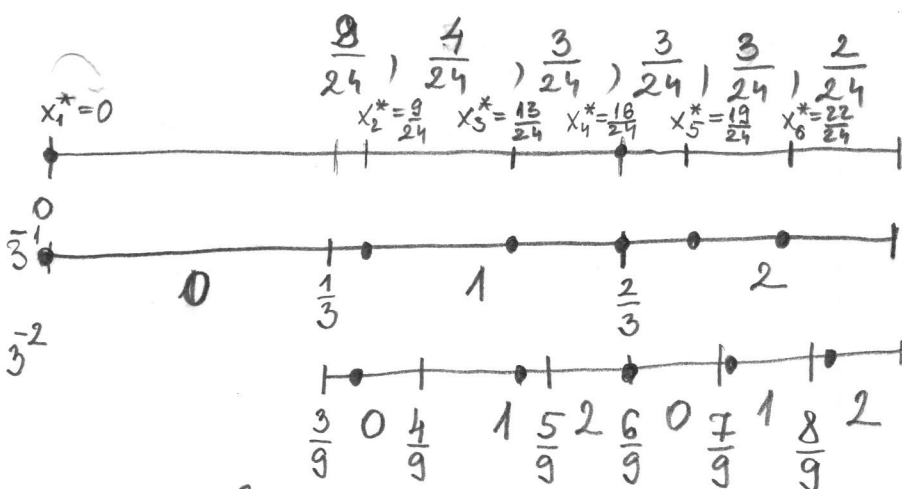
1. Egyértelműen dekódolható-e az alábbi kód:

$$K = \{101, 1110, 1001, 0011, 11100, 11001, 00001, 010100\},$$

ahol K a kódszavak halmaza?

2. A $P = \{\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}\}$ eloszláshoz határozza meg a Shannon-Fano kódot, ha a kódábécé $\{0, 1, 2\}$! Határozza meg a kód hatásfokát!

$$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}, \frac{1}{8} = \frac{3}{24}, \frac{1}{6} = \frac{4}{24}, \frac{1}{8} = \frac{3}{24}, \frac{1}{12} = \frac{2}{24}, \frac{1}{8} = \frac{3}{24}$$



$$L = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{13}{8} = 1.625$$

$$\gamma = \frac{H(P)}{L \cdot \log_2 3} \approx \frac{1.5049}{1.625 \cdot \log_2 3} \approx 0.92609$$

Mat.99-

-ME.

x_1^*	0	$\frac{3}{8}$
x_2^*	10	$\frac{1}{6}$
x_3^*	11	$\frac{1}{8}$
x_4^*	20	$\frac{1}{8}$
x_5^*	21	$\frac{1}{8}$
x_6^*	22	$\frac{1}{12}$

$$H(P) = \frac{31}{12} \log_3 3 - \frac{1}{8}$$

$$\gamma = \frac{62}{39} \log_3 2 - \frac{1}{13}$$

3. Legyen az X forrásábécé eloszlása

$$\mathcal{P} = \{2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-5}\},$$

a kódolása pedig

$$K = \{1, 01, 001, 0001, 00001, 00000\}.$$

Igazolja, hogy egy véletlenszerűen választott közlemény kódolásához felhasznált 0-k és 1-esek számának várható értéke megegyezik!

3 a közleményben az 1-esek száma

$$E(\xi) = K \cdot E(\xi_1) \quad E(\xi_1) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) + 0 \cdot \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

forrásüzemeltetés 1 kódjelenetben a várható egyesek száma

Hasonlóan a 0-k száma:

$$E(\eta) = K \cdot E(\eta_1) \quad E(\eta_1) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{8+8+6+9+5}{32} = \frac{31}{32}$$

4. A Kraft-Fano egyenlőtlenség alapján bizonyítsa be, hogy létezik prefix kód, amelyre az L átlagos kódhossz olyan, hogy

$$L \leq \frac{H(\xi)}{\log_2 s} + 1,$$

ahol $H(\xi)$ a forrásábécé eloszlásának az entrópiája és s a kódábécé elemeinek a száma!

$X = \{x_1, \dots, x_m\}$ és az eloszlás $p_1, \dots, p_m$;

Legyen
$$L_i = \begin{cases} -\frac{\log_2 p_i}{\log_2 s}, & \text{ha egész} \\ \left[-\frac{\log_2 p_i}{\log_2 s}\right] + 1, & \text{egyébként, így} \end{cases}$$

$$\frac{-\log_2 p_i}{\log_2 s} \leq L_i < \frac{-\log_2 p_i}{\log_2 s} + 1 \Rightarrow \text{Szorozzuk meg az egyenlőtlenségeket } p_i\text{-vel és adjuk össze:}$$

$$\frac{H(\xi)}{\log_2 s} \leq L < \frac{H(\xi)}{\log_2 s} + 1.$$

Másrészt

$$-\log_2 p_i \leq L_i, \text{ azaz } s^{-L_i} \leq p_i \Rightarrow \sum_{i=1}^m s^{-L_i} \leq \sum_{i=1}^m p_i = 1,$$

azaz teljesül a Kraft-Fano egyenlőtlenség, így létezik ilyen prefix kód.

Mat. Int.

Név:.....

Alk. Mat. Tsz.

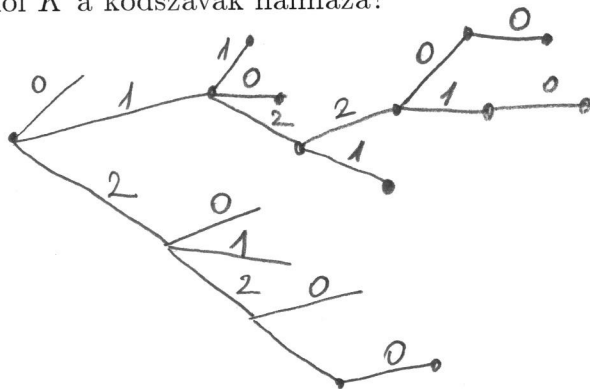
Tankör:.....

B

1. Egyértelműen dekódolható-e az alábbi kód:

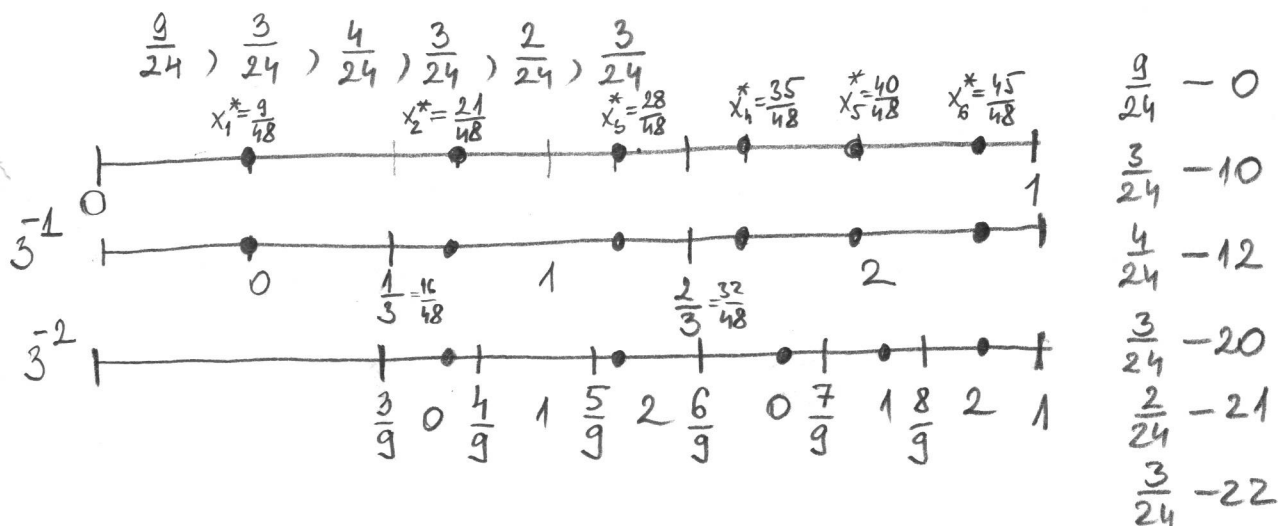
$$K = \{0, 11, 21, 20, 220, 2220, 12200, 12210, 121, 10\},$$

ahol K a kódszavak halmaza?



Prefix kód, így
egyértelműen
dekódolható!

2. A $\mathcal{P} = \{\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}\}$ eloszláshoz határozza meg a Gilbert-Moore kódot, ha a kódábécé $\{1, 2, 3\}$! Határozza meg a kód hatásfokát!



3. Sorolja fel az összes olyan prefix és az összes olyan egyértelműen dekódolható bináris kódot, melyek kódhosszai 1, 2, 3, 3!

Ilyen kód létezik, mert $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = 1$.

0	0
10	11
110	100
111	101

prefix

0	0
01	11
011	001
111	101

egyértelműen dekódolható (hatékony prefix)

+ a 0-k és 1-ek megcseréléséből adódik.

Összesen: 8

4. A Kraft-Fano egyenlőtlenség alapján bizonyítsa be, hogy létezik prefix kód, amelyre az L átlagos kódhossz olyan, hogy

$$L \leq \frac{H(\xi)}{\log_2 s} + 1,$$

ahol $H(\xi)$ a forrásábécé eloszlásának az entrópiája és s a kódábécé elemeinek a száma!

A II.

Név:

Tankör:

1. Adott egy információforrás, amely az $X = \{a, b, c\}$ jeleket állítja elő $\mathcal{P} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\}$ valószínűségekkel. Mennyi lesz az egy betűre jutó átlagos kódhossz 2 hosszúságú blokkok alkalmazása esetén? Milyen blokkhossz esetén lehetséges kompresszió?

2. Bináris szimmetrikus csatorna esetén $p_{0|0} = p_{1|1} = p$ és $p_{0|1} = p_{1|0} = q$. Határozza meg a csatornkapacitást, ha $p = 0.9$ és $q = 0.1$!

3. A hibajavító kód generátormátrixa

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozza meg a hibaátesztelés valószínűségét!

4. Az $Y = \{0, 1, 2\}$ csatornaábécéhez tartozó átviteli idők $T = \{1, 1, 2\}$. Határozza meg a csatornkapacitást! Optimális kódolás esetén határozza meg az átlagos átviteli időt!

B II.

Név:

Tankör:

1. Adott egy információforrás, amely az $X = \{a, b, c\}$ jeleket állítja elő $\mathcal{P} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ valószínűségekkel. Mennyi lesz az egy betűre jutó átlagos kódhossz 2 hosszúságú blokkok alkalmazása esetén? Milyen blokkhossz esetén lehetséges kompresszió?

2. Bináris csatorna esetén $p_{0|0} = 0.9$, $p_{1|1} = 0.8$, $p_{0|1} = 0.1$, $p_{1|0} = 0.2$. Határozza meg a csatornakapacitást!

3. A szisztematikus kód paritásmátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozza meg a hibaáteresztés valószínűségét!

4. Az $Y = \{0, 1, 2\}$ csatornaábécéhez tartozó átviteli idők $T = \{0.5, 1, 1\}$. Határozza meg a csatornakapacitást! Optimális kódolás esetén határozza meg az átlagos átviteli időt!

A II

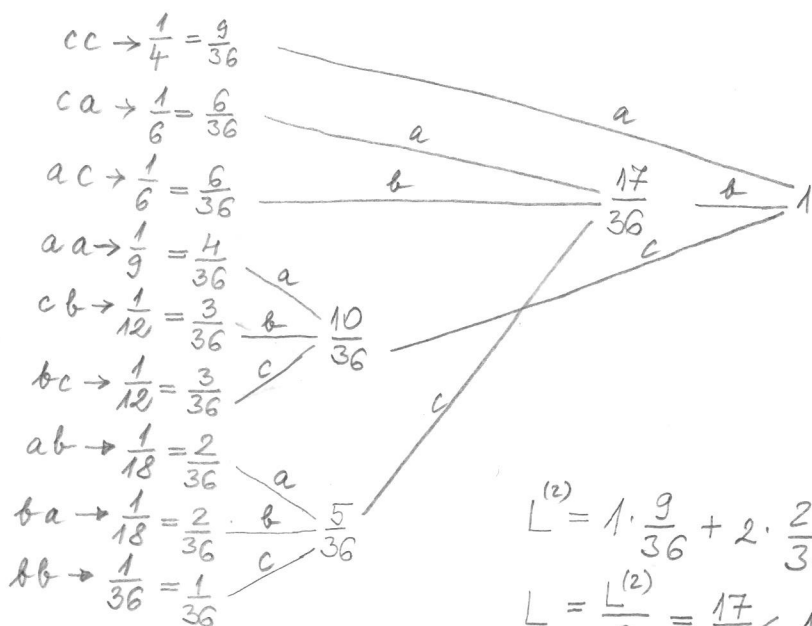
①

$\{a, b, c\}$

$\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\}$

$9 = 3 \cdot 2 + 3$ - Lehetőség teljes Huffman-kódolás.

ebből



$cc \rightarrow a$
 $ca \rightarrow ca$
 $ac \rightarrow cb$
 $aa \rightarrow ba$
 $cb \rightarrow bb$
 $bc \rightarrow bc$
 $ab \rightarrow cca$
 $ba \rightarrow cc b$
 $bb \rightarrow ccc$

$$L^{(2)} = 1 \cdot \frac{9}{36} + 2 \cdot \frac{22}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} = \frac{68}{36} < 2$$

$$L = \frac{L^{(2)}}{2} = \frac{17}{18} < 1 \text{ kompresszió!}$$

Mj.: $H(P) = \frac{1}{3} \log_2 3 + \frac{1}{6} \log_2 6 + \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{2}{3}$

Also határ: $\frac{H(P)}{\log_2 3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3 \log_2 3} \approx 0.9206198 \Rightarrow k \geq 13$ hosszúságú
 blokk elrejtéleg is
 adódik

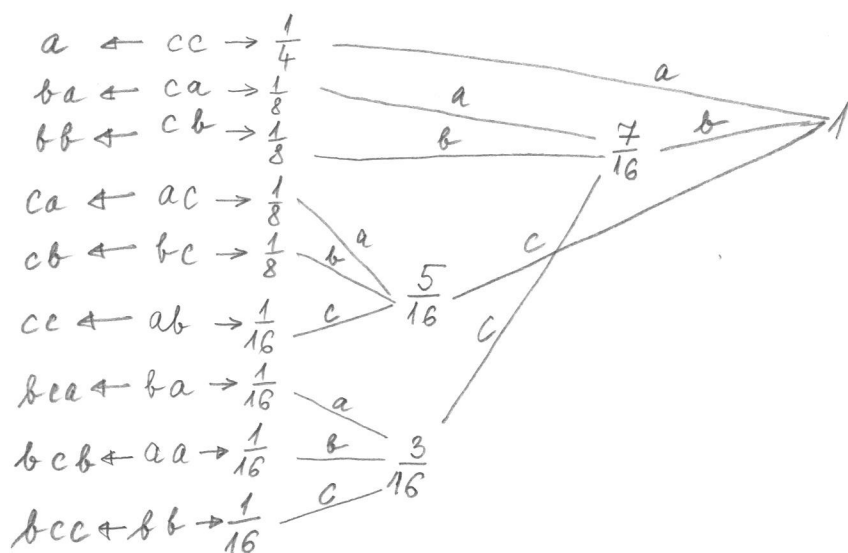
B II

①

$\{a, b, c\}$

$\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$

$9 = 3 \cdot 2 + 3$ - Lehetőség teljes Huffman-kódolás



$$L^{(2)} = 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

$$L = \frac{L^{(2)}}{2} = \frac{31}{32} < 1 \text{ kompresszió}$$

Mj.: $H(P) = \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{2} \log_2 2 = 1.5$

Also határ: $\frac{1.5}{\log_2 3} \approx 0.9463946 \Rightarrow k \geq 20$

AII-BII

- ③ Csoporthód esetén a hibátörlesztés valószínűsége megegyezik a kódzó alorkái hibák valószínűségeinek összegével.

A generátor mátrix alapján látható, hogy ez egy (3,6) kód, így az átküldendő kódok

000
100
010
001
110
101
011
111

Alkalmazzuk G-t

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

000000
100110
010101
001011
110011
101101
011110
111000

lehetőséges hibák

$$4p^3q^3 + 3p^2q^4$$

AII ②

$$r = \max I(\xi, \eta)$$

$$p_i \rightarrow \begin{matrix} p_{ij} \\ \boxed{} \end{matrix} q_j$$

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \tau_{ij} \log_2 \frac{\tau_{ij}}{p_j q_i} = p \cdot p_0 \cdot \log_2 \frac{p}{p_0} + p p_1 \log_2 \frac{p}{p_1} + q p_1 \log_2 \frac{q}{p_0} + q p_0 \log_2 \frac{q}{p_1} =$$

$$\tau_{ij} = p_{ij} \cdot p_j$$

$$q_i = \sum_j p_{ij} \cdot p_j$$

$$= p \underbrace{(p_0 + p_1)}_1 \log_2 p + q \underbrace{(p_0 + p_1)}_1 \log_2 q + \underbrace{(p p_0 + q p_1)}_{p_0} \log_2 \frac{1}{p_0} + \underbrace{(p p_1 + q p_0)}_{p_1} \log_2 \frac{1}{p_1}$$

$$= \underbrace{H(Q)}_{\max \log_2 2} + p \log_2 p + q \log_2 q \leq 1 + p \log_2 p + q \log_2 q$$

$$r = 1 + 0.9 \log_2 0.9 + 0.1 \log_2 0.1$$

B II ② Hasonlóan, mint az A-II ②

$$I(\xi, \eta) = p \log_2 \frac{a}{p} + q \log_2 \frac{b}{q} \leq \log_2(a+b),$$

ahol

$$\log_2 a = 0.9 \log_2 0.9 + 0.1 \log_2 0.1$$

$$\log_2 b = 0.8 \log_2 0.8 + 0.2 \log_2 0.2$$

Egyenlőség $p = \frac{a}{a+b}$, $q = \frac{b}{a+b}$ esetén, így $v = \log_2(a+b)$

Mat. Int.

Név:.....

Alk. Mat. Tsz.

Tankör:.....

ELMÉLETI KÉRDÉSEK

1. Ismertesse az egyedi információmennyiséget meghatározó tulajdonságokat!

2. Definiálja az információ átviteli sebességét!

3. Definiálja a stacionér forrás entrópiáját!

4. Ismertesse az I-divergencia legalább négy tulajdonságát!

5. Ismertesse a zajmentes hírközlés alaptételét!
6. Definiálja a Hamming-féle távolságot!
7. Ismertesse és bizonyítsa a Kraft-Fano egyenlőtlenséget!
8. Igazolja, hogy a szindróma jellemző a mellékosztályra!

FELADATOK

F1. Ismertesse és bizonyítsa a maximum entrópia módszerre vonatkozó tételt várható érték feltételek esetére!

F2. A szisztematikus kód paritásmátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozza meg a javítható hibákat maximum likelihood dekódolás esetén!

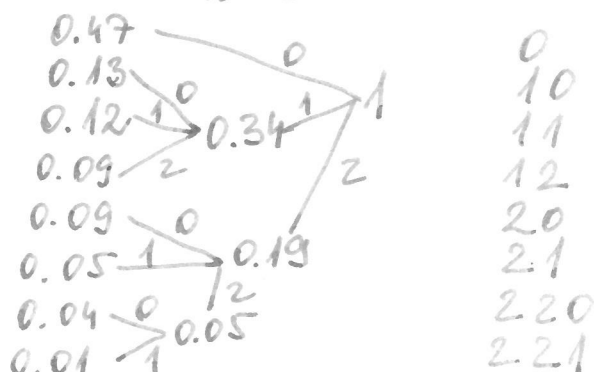
F3. Az $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ csatornaábécéhez tartozó átviteli idők $T = \{1, 1.2, 2.3, 3\}$. Határozza meg a csatornakapacitást! Optimális kódolás esetén határozza meg az átlagos átviteli időt!

4. A $\mathcal{P} = \{0.47, 0.13, 0.12, 0.09, 0.09, 0.05, 0.04, 0.01\}$ eloszláshoz határozza meg az optimális kódot, ha a csatornaábécé $\{0, 1, 2\}$! Határozza meg az átlagos kódhosszt és a hatásfokot!

(F3) $C \approx 1.234104925$ (0.8554163493)
 $\tilde{C} \approx 1.407053514$

$\mu_0 = 0$
 $\mu_1 = 0.739354$
 $\mu_2 = 0.853464$
 $\mu_3 = 0.855415$
 $\mu_4 = 0.855415$

(F4) $H(P) = 2.355263861$
 $n = 8 = 3 \cdot 2 + 2$



$L = 2.05 - 0.47 = \underline{\underline{1.58}}$

$\gamma \approx 0.9405101563$

(F2) (2,5) kód

00 000	01 111	10 110	11 001
00 001	01 110	10 111	11 000
00 010	01 101	10 100	11 011
00 100	01 011	10 010	11 101
01 000	00 111	11 110	10 001
10 000	11 111	00 110	01 001
01 010	00 101	11 100	10 011
01 100	00 011	11 010	10 101

pl. a javitható hibák a H hs.