

GEMAK321-B

ME Matematikai Intézet

Név:

Alkalmazott Matematikai Tansz.

Neptun-kód:

Dátum:

Pót-zárthelyi dolgozat ALKALMAZOTT LINEÁRIS ALGEBRA c. tantárgyból
BSC GAZDASÁGI INFORMÁTIKUS szakos nappali hallgatók részére

Minden számítást 4-tizedes pontossággal végezzen!

Csak a logikai menetnek és a kért módszernek a pontos követése
esetén értékelhető a feladat, különben nem ér pontot.

Akkor szerez gyakorlati jegyet a hallgató, ha minimum 1 elméleti kérdés és 1
gyakorlati feladatot végeredményig megold. A gyakorlati jegy a jól megválaszolt
feladatok számának és az 5-nek a minimuma.

- E1. Mondja ki és bizonyítsa be a bázis transzformációról szóló tételt!
- E2. Mondja ki a lineáris algebra alaptételét!
- E3. Bizonyítsa be, hogy ha egy vektor előáll lineárisan független vektorok lineáris kombinációjaként, akkor az előállítás egyértelmű!
- F1. Határozza meg az alábbi mátrix valamennyi sajátértékét, valamint a hozzájuk tartozó sajátvektort! A mátrix sorai rendre a következők: $[1, 0, 0]$, $[-8, 4, -6]$ és $[8, 1, 9]$.
- F2. Egy autószalón 3-típusú luxus autót értékesít (A_1, A_2, A_3). A hét első három napján eladott autók eloszlása a következő:

	A_1	A_2	A_3
hétfő:	2	1	1
kedd:	1	2	1
szerda:	3	2	2

és a napi bevétel rendre: 11, 9, 19. Határozza meg az egységárvektor!

- F3. Egy háromszektoros gazdaságban a közvetlen ráfordításmátrix, az új értékek és a nettó kibocsátás vektora rendre a következők:

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,9 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Határozza meg a gazdaság pénzügyi ágazati kapcsolatokat mérlegét!

[E1.]

Tétel: l. $b_1, \dots, b_{k-1}, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$ teljes
bázis és $c \in \mathbb{R}^n$ $c = \sum_{i=1}^n c_i b_i$ azaz
 c az adott bázis c szerint koordinátái
 $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots, c_n$.

Ha $c_k \neq 0 \Rightarrow$

$b_1, \dots, b_{k-1}, c, b_{k+1}, \dots, b_n$
vektorrendszer is bázist alkot.

Biz: legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda \in \mathbb{R}$ /

$$0 = \lambda_k c + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i b_i$$

$$c = c_k b_k$$

$$c = c_k b_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n c_i b_i$$

behelyettesítve
és átalakítva

$$0 = \lambda_k c_k b_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\lambda_k c_i + \lambda_i) b_i$$

Mivel $b_1, \dots, b_n$ bázis ezért

$$\lambda_k c_k = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0, \text{ mert } c_k \neq 0$$

$$\lambda_k c_i + \lambda_i = 0 \quad (\forall i \neq k)$$

$$\text{adódik } \lambda_i = 0 \quad (i \neq k)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0. \text{ Tehát az}$$

felhasznál.

n újrandz. bázis

E2)

$(n+1)$ -db n -dimenziós vekt.
lin. összefüggő.

E3) Biz:

l. $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^m$ lin. ~~független~~ vekt. rendszer, és $x = \sum_{k=1}^n x_k b_k$.

t.f. $x = \sum_{k=1}^n y_k b_k$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n x_k b_k = \sum_{k=1}^n y_k b_k$$

$$0 = \sum_{k=1}^n x_k b_k - \sum_{k=1}^n y_k b_k$$

$$0 = \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) b_k$$

mivel $b_1, \dots, b_n$ bázis ezért

$$x_k - y_k = 0 \quad (k=1:n)$$

$$\text{azaz } x_k = y_k \quad (k=1:n)$$

Kész.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -8 & 4-\lambda & -6 \\ 8 & 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 1 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) [(4-\lambda)(9-\lambda) + 6] = (1-\lambda) (\lambda^2 - 13\lambda + 42) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-7)(\lambda-6) \end{aligned}$$

$\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 7; \lambda_2 = 6; \lambda_3 = 1$

$\lambda_1 = 7$ -hez tartozó saj. vekt.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & -6 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & -6 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\lambda_2 = 6$ -hoz tartozó saj. vekt.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & -6 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & -6 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\lambda_3 = 1$ -hez tartozó saj. vekt.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & -6 \\ 8 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -8 & -2 & -6 \\ 8 & 1 & 8 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9.374 \\ 0 & 1 & 0.11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -0.9374 \\ -0.11 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

F2)

1. x az egységár-vekt és b a napi bevétel.

$$b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ a forgácsoló-} \\ \text{mátrix.}$$

Matematikai modell:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 19 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{G.J.}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,9 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}; m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{r}.$$

$$T = (I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 80 & 180 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$q = Tr = \begin{bmatrix} 270 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}; p = T^T \cdot m = \begin{bmatrix} 10 \\ 90 \\ 210 \end{bmatrix}$$

$$\langle p \rangle B \langle q \rangle = \begin{bmatrix} 2430 & 240 & 20 \\ 0 & 2430 & 180 \\ 0 & 0 & 1890 \end{bmatrix}$$

$$\langle p \rangle q = \begin{bmatrix} 2700 \\ 2700 \\ 2100 \end{bmatrix}; \langle p \rangle r = \begin{bmatrix} 10 \\ 90 \\ 210 \end{bmatrix}$$

$$z^T = m^T \langle q \rangle = [270, 30, 10]$$

$$\begin{array}{c|c|c} \langle p \rangle q & \langle p \rangle B \langle q \rangle & \langle p \rangle r \\ \hline & z^T & \end{array}$$

2700	2430	240	20	10
2700	0	2430	180	90
2100	0	0	1890	210
	270	30	10	

a keresett ÁKM-Példában.