

Numerikus módszerek (GEMAK531B)

Ütemterv:

1. A klasszikus és a lebegőpontos hibaanalízis elemei.
2. Mátrixok, vektorok, normák, kondíciós szám.
3. Lineáris egyenletrendszerek megoldása. A Gauss-módszer.
4. LU-felbontás, Cholesky-felbontás.
5. Lineáris egyenletrendszerek megoldása iterációval.
6. Lineáris egyenletrendszerek hibaanalízise.
7. Legkisebb négyzetes közelítések.
8. Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek numerikus megoldása.
9. Interpoláció. Lagrange-interpoláció, szplájn függvények.
10. Numerikus deriválás és integrálás.
11. Differenciálegyenletek közelítő megoldásai.
12. Zárthelyi dolgozat.
13. A sajátérték-sajátvektor probléma. A hatványmódszer.
14. Ortogonalizálási eljárások. A QR-módszer.

Követelmények:

Aláírás+kollokvium

Az aláírás megszerzésének feltétele:

Két zárthelyi dolgozat legalább elégséges szintű teljesítése.

A vizsga 90 perces írásbeli dolgozat. Értékelés: 30 pont szerezhető. 0-14: elégtelen; 15-17: elégséges; 18-20: közepes; 21-23: jó; 24-30: jeles.

A vizsgakérdések az előadások és a gyakorlatok anyagát tartalmazzák. Lehetnek elméleti kérdések (definíciók, tételek, bizonyítások, algoritmusok), számpéldák és programozási feladatok.

Irodalom:

1. Galántai Aurél, Jeney András: Numerikus módszerek, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc 2005
2. Jeney, A.: Bevezetés a numerikus módszerekbe (elektronikus jegyzet), a www.gepesz.uni-miskolc.hu/hefop/ oldalról letölthető
3. Stoyan G., Takó G.: Numerikus módszerek I.-II.-III., Typotex, Budapest, 1993, 1995. 1997
4. MATLAB, szerk. Stoyan Gisbert, Typotex, Budapest 2005
5. Gergő Lajos: Numerikus módszerek-Kidolgozott példák, feladatok, ELTE, Eötvös Kiadó Kft, 2010.

(Dr. Körei Attila)
a tárgy jegyzője

ME Matematikai Intézet

Név:

Alkalmazott Matematikai Int. Tsz.

Neptun-kód:

NUMERIKUS MÓDSZEREK

Minden számítást 4-tizedesjegy pontossággal végezzen!

Minden jól megoldott feladat egy pontot ér.

Feladatok

- 1.) Adja meg az alábbi A mátrix $\|A\|_1$, $\|A\|_F$, $\|A\|_\infty$ normáit, valamint a $v \cdot A^T$ vektor 1-es, 2-es és végtelen normáját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad v = [1 \quad 1 \quad -1]$$

- 2.) Oldja meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval, részleges főelemkiválasztással!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- 3.) Intervallumfelező módszerrel adjon közelítést az alábbi függvény zérushelyére a $[0, 1]$ intervallumon! A közelítést $\varepsilon = 0.06$ pontossággal végezze! A módszer alkalmazása előtt ellenőrizze a feltételek teljesülését!

$$f(x) = e^x - 4x^2$$

- 4.) Közelítse az alábbi integrál értékét összetett Simpson formulával úgy, hogy az intervallumot nyolc részre bontja! Adja meg az így kapott közelítés hibáját!

$$\int_{0.5}^{4.5} \ln(2x) dx$$

- 5.) Határozza meg az alábbi pontokra illeszkedő harmadfokú Lagrange-interpolációs polinomot, és ennek segítségével közelítse az $f(0.2)$ értéket!

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

- 6.) Írja fel az abszolút és relatív hibakorlát képleteit a négy alapműveletre vonatkozóan! Milyen kapcsolat van az abszolút és relatív hibakorlát között? Határozza meg a $\Delta(a^2)$, azaz az a^2 abszolút hibakorlátjára vonatkozó képletet!

Regoldokulor

1. $\|A\|_1 = \max\{6; 1; 3\} = 6$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2 + 5^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max\{4; 6\} = 6$$

2. $v \cdot A^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\|v \cdot A^T\|_1 = |4| + |4| = 8$$

$$\|v \cdot A^T\|_2 = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5,6569$$

$$\|v \cdot A^T\|_\infty = \max\{|4|; |4|\} = 4$$

2.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

$$-4x_3 = 4$$

$$x_3 = -1$$

$$-2x_2 - 4x_3 = 2$$

$$-2x_2 + 4 = 2$$

$$-2x_2 = -2$$

$$x_2 = 1$$

$$2x_1 + 0x_2 + 4x_3 = -2$$

$$2x_1 + 0 \cdot 1 + 4(-1) = -2$$

$$2x_1 - 4 = -2$$

$$2x_1 = 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. $f(x)$ folytonos

$$f(0) = e^0 - 4 \cdot 0^2 = 1 > 0$$

$$f(1) = e^1 - 4 \cdot 1^2 = -1,2817 < 0$$

a végpontokban az előjelek különböznek

$$c = 0,06$$

$$\frac{1-0}{2^k} < 0,06$$

$$\frac{1}{0,06} < 2^k$$

$$16,6667 < 2^k$$

$$4,0589 < k$$

$$\Rightarrow k = 5$$

	+	-	x_k	
	alsó vp.	felső vp.	felosztópont	$f(x_k)$ előjele
1	0	1	0,5	+ 0,5487
2	0,5	1	0,75	- 0,1330
3	0,5	0,75	0,625	+ 0,3057
4	0,625	0,75	0,6875	+ 0,0981
5	0,6875	0,75	0,7188	

$$4. \frac{4,5 - 0,5}{8} = 0,5$$

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
f(x)	0	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972

$$S_8 = \frac{9^5}{3} (0 + 4 \cdot 0,6931 + 2 \cdot 1,0986 + 4 \cdot 1,3863 + 2 \cdot 1,6094 + 4 \cdot 1,7918 + 2 \cdot 1,9459 + 4 \cdot 2,0794 + 2,1972) = \underline{\underline{5,1804}}$$

közelítő hibájához $S_4 = \frac{1}{3} (0 + 4 \cdot 1,0986 + 2 \cdot 1,6094 + 4 \cdot 1,9459 + 2,1972) = \underline{\underline{5,8647}}$

$$E = |5,1804 - 5,8647| = 0,3157$$

5. $g_1 = 0 \Rightarrow l_1$ értékét nem fontos meghatározni

$$l_2(x) = \frac{x - (-1)}{0 - (-1)} \cdot \frac{x - 1}{0 - 1} \cdot \frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{1}{2} (x^3 - 2x^2 - x + 2)$$

$g_3 = 0 \Rightarrow l_3$ értékét nem szükséges meghatározni

$$l_4(x) = \frac{x - (-1)}{2 - (-1)} \cdot \frac{x - 0}{2 - 0} \cdot \frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{1}{6} (x^3 - x)$$

$$f(0,2) \approx p(0,2) = 0 \cdot l_1(0,2) + 1 \cdot l_2(0,2) + 0 \cdot l_3(0,2) + 2 \cdot l_4(0,2) \\ = 1 \cdot \frac{1}{2} (0,2^3 - 2 \cdot 0,2^2 - 0,2 + 2) + 2 \cdot \frac{1}{6} (0,2^3 - 0,2) = \underline{\underline{0,8}}$$

6. Abszolút hibakorlát:

$$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$$

$$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$$

$$\Delta(a \cdot b) = \Delta a \cdot |b| + \Delta b \cdot |a|$$

$$\Delta(a/b) = \frac{\Delta a \cdot |b| + \Delta b \cdot |a|}{b^2}$$

Kapcsolat: $\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|}$; $\Delta a = \delta a \cdot |a|$

$$\Delta(a^2) = \Delta(a \cdot a) = \Delta a \cdot |a| + \Delta a \cdot |a| = 2|a| \cdot \Delta a$$

Relatív hibakorlát:

$$\delta(a+b) = \max\{\delta a, \delta b\}$$

$$\delta(a-b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a-b|}$$

$$\delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b$$

$$\delta(a/b) = \delta a + \delta b$$

ME Matematikai Intézet

Név:

Alkalmazott Matematikai Int. Tsz.

Neptun-kód:

NUMERIKUS MÓDSZEREK

Minden jól megoldott feladat egy pontot ér.

Feladatok

- 1.) Írjon olyan Matlab függvényt, mely három számról eldönti, pitagoraszai számhármask-e!
- 2.) Írjon olyan Matlab függvényt Seidel-iterációra, mely addig fut, amíg az utolsó két iterációban kapott közelítés első koordinátái négy tizedes pontossággal megegyeznek!
- 3.) Intervallumfelező módszerrel közelítse az alábbi függvény zérushelyét a $[-10, 10]$ intervallumon! A közelítést $\varepsilon = 0.0001$ pontossággal végezze!

$$f(x) = \ln x + 2x^2$$

- 4.) Közelítse az alábbi integrál értékét összetett trapéz formulával $h = 0.01$ lépésközzel!

$$\int_{0.5}^{4.5} \ln(2x^2) dx$$

- 5.) Legkisebb négyzetek módszerével határozza meg az alábbi pontokra illeszkedő $f(x) = a + b \cdot 2^x + c \cdot x^3$, és ennek segítségével közelítse az $f(1.4)$ értéket!

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	24	15	8	3	0	0	1	7	16	31	56

- 6.) Írjon Matlab függvényt inverz hatványmódszerre, ami megadott n lépésben közelíti minden A abszolútértékben legkisebb sajátértékének abszolútértékét és a hozzá tartozó sajátvektort!

1. a) Legyen $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Oldja meg Gauss módszerrel az $Ax = e_2$ egyenletrendszert! (3 pont)

b) Mi a jelentése általában az $Ax = e_i$ egyenletrendszer megoldásának? (1 pont)

c) Megoldható-e az egyenletrendszer a tanult iteratív módszerek valamelyikével? (Indoklás!) (1 p)

2. Oldja meg Newton módszerrel az $x^3 - \cos x = 0$ egyenletet a $[0.5; 1]$ intervallumon. Vizsgálja meg, hogy teljesülnek-e a megoldhatóság feltételei, és az intervallum megfelelő végpontjából indítva az iterációt, számítsa ki a megoldáshoz konvergáló sorozat további három tagját 6 tizedesjegy pontossággal! Radiánban számoljon! (5 pont)

3. Az $f(x)$ függvényről rendelkezésre áll az alábbi táblázat:

x	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$f(x)$	0.33	0.47	0.50	0.42	0.32	0.25

a) Trapézformulával számítsa ki $\int_2^3 f(x) dx$ lehető legpontosabb közelítését! (2 pont)

b) Mennyi a közelítés hibája, ha tudjuk, hogy $|f''(x)| \leq 4.2$, $x \in [2; 3]$ esetén? (2 pont)

4. Az előző feladat táblázatának adatait felhasználva adja meg a legkisebb négyzetek módszerével a pontokhoz illeszkedő egyenes egyenletét! (4 pont)

5. a) Adja meg az $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix sajátértékének és a hozzá tartozó sajátvektorának definícióját! (2 pont)

b) Mi az összefüggés egy mátrix sajátértékei és a mátrix invertálhatósága illetve pozitív definitisége között? (2 pont)

c) Milyen feladatra és hogyan alkalmazzuk az inverz hatványinódszert? (2 pont)

6. a) Adja meg a $q = \frac{ab}{c-d}$ mennyiség abszolút és relatív hibakorlátját, ha

$$a = 20 \pm 0.5; b = 8 \pm 0.1; c = 60 \pm 0.2, d = 10 \pm 0.1 \quad (4 \text{ pont})$$

b) Adja meg a gépi epsilon definícióját! (2 pont)

A számítások végeredményét tizedestörtben, 4 tizedesjegy pontossággal adja meg, ha nem kér más a feladat!

Értékelés: 0-11 pont: elégtelen; 12-16 pont: elégséges; 17-21 pont: közepes; 22-26 pont: jó; 27-30 pont: jeles.

- 1) a) $x = \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0,25 \\ -0,15 \end{bmatrix}$ b) A inverzenek i -dik oszlopa
 c) Nem, mert az együtthatómátrix a sorok átrendezésével sem lehet diagonálisan dominánsa.

2) $\left. \begin{array}{l} f(0,5) < 0 \\ f(1) > 1 \end{array} \right\} f \text{ folytonos, van megoldás. } f \in C^2[0,5;1]; \quad f'(x) = 3x^2 + \sin x \neq 0,$
 $f''(x) = 6x - \cos x \neq 0, \text{ ha } x \in [0,5;1]. \quad f''(1) > 0, \quad x_0 = 1.$
 $x_1 = 0,880333; \quad x_2 = 0,865684; \quad x_3 = 0,865474$

3) a) $\overline{T}_5(f) = \frac{0,2}{2} (0,33 + 2(0,47 + 0,5 + 0,42 + 0,32) + 0,25) = \underline{\underline{0,4}}$

b) $\frac{M_2 (b-a)^3}{12n^2} = \frac{4,2 \cdot 1}{12 \cdot 5^2} = \underline{\underline{0,014}}$

4) $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 38,2 \end{bmatrix} \quad A^T y = \begin{bmatrix} 2,29 \\ 5,632 \end{bmatrix} \quad \text{Megoldás: } y = 0,7138 - 0,1329x$

5) a) $\lambda \in \mathbb{C}$ és $v \in \mathbb{C}^n$ ($v \neq 0!$) hogy $Av = \lambda v$

b) A invertálható $\Leftrightarrow$ nincs 0 sajátérték

A pozitív definit $\Leftrightarrow$ minden sajátérték pozitív

c) A legkisebb abszolútértékű sajátértékének előállítására,
 úgy, hogy A inverzenek meghatározását a domináns sajátértéket, majd vesszük a reciprokát.

6) a) $\Delta q = \frac{160 \cdot 0,3 + (20 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,5) \cdot 50}{50^2} = 0,1392$

$q \approx \frac{20 \cdot 8}{60 - 10} = 3,2$

$\sigma_q \approx \frac{0,1392}{3,2} = 0,0435$

b) A_2 1 és az utána következő legkövetkező szám távolsága.

$(\varepsilon_1 = a^{1-t})$.