Optimalizálás (GEMAK 541B)

Ütemterv:

1. Történeti áttekintés. Optimalizálási modellek osztályozása.
2. Lineáris algebrai összefoglaló, pivotálás, bázistranszformáció. Konvex halmazok.
3. A lineáris programozás alapfeladata. Grafikus megoldási módszer.
4. A szimplex módszer.
5. Dualitási problémakör. Érzékenységvizsgálat.
6. Hiperbolikus programozási feladat megoldása szimplex módszerrel.
7. Egészértékű lineáris programozás. Első zárthelyi megírása.
8. Nevezetes integer programozási feladatok.
9. Hálózati folyamok.
10. Szállítási feladat, hozzárendelési probléma.
11. Bevezetés a nemlineáris optimalizálásba.
12. Feltétel nélküli optimalizálás. Második zárthelyi.
13. Feltételes optimalizálás. Karush-Kuhn-Tucker feltételek.
14. Pótzárthelyi.

Követelmények:

aláírás+vizsga

Az aláírás feltétele a zárthelyik legalább elégséges szintű (40 %-ot meghaladó) megírása.

A vizsga 90 perces írásbeli dolgozat. Értékelés: 40 pont szerezhető. 0-19: elégtelen; 20-23: elégséges; 24-27: közepes; 28-31: jó; 32-40: jeles.

Irodalom:

Dr. Nagy Tamás: Operációkutatás, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1998.

Dr. Házy Attila: Nemlineáris optimalizálás. (elektronikus jegyzet)

Ferenczi Zoltán: Operációkutatás. (elektronikus jegyzet)

Optimalizálás, 1. zárthelyi 2019.03.20. Név, Neptun kód:

1. Bázistranszformációval határozza meg az $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

2. Írja fel az alábbi feladat modelljét és oldja meg szimplex módszerrel:

Egy üzemben kétféle terméket gyártanak, az első termék darabját 500, a második termék darabját 600 dollárért lehet értékesíteni a piacon. Az első termék egy darabjának elkészítéséhez 3 óra esztergálásra és 3 óra csiszolásra van szükség, míg a második termék egy egységének esetén 4 óra esztergálásra és 2 óra csiszolásra van szükség. Az esztergagép heti kapacitása 52 óra, a csiszológépé 38 óra. Milyen termékösszetétel adja heti lebontásban a maximális nyereséget? Mennyi a maximális nyereség?

3. Egy normál LP-feladat optimális táblája a következő:

	x_2	u_2	u_3	b
u_1	0	2	0.5	4
x_1	-6	-1	3	3
x_3	5	1	-1	5
-z	-2	-3	-1	-120

a) Adja meg a primál és duál feladatok optimális megoldását, az optimumértékekkel együtt!

b) Végezzen érzékenységvizsgálatot a primál feladat második feltételére vonatkozóan!

c) Ha két egységgel növeljük a primál feladat második feltételének jobb oldalán álló értéket, mennyivel változik meg az új optimális megoldásban a célfüggvény értéke?

4. Adja meg az alábbi LP-feladat duálisát (nem kell megoldani):

$$x_1 \geq 0, x_2 \; előjelkötetlen, x_3 \leq 0$$

$$3\,x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 7$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6$$

$$2\,x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \to max$$

5. Oldja meg az alábbi hiperbolikus programozási feladatot:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$\frac{2x_1 + x_2 - 2}{x_1 + x_2 + 1} \to max$$

6. Grafikus módszerrel igazolja, hogy az alábbi LP feladatnak végtelen sok megoldása van:

$x \leq 4$

$y \leq 5$

$3x + 2y \leq 16$

$x, y \geq 0$

$6x + 4y \to max$

MEGOLDÁS 2019. 03. 20.

1)

4

	a_1	a_2	a_3
e_1	-1	1	2
e_2	-2	1	-3
e_3	$\boxed{1}$	0	4

	e_3	a_2	a_3
e_1	1	1	6
e_2	2	$\boxed{1}$	5
a_1	1	0	4

	e_3	e_2	a_3
e_1	-1	-1	$\boxed{1}$
a_2	2	1	5
a_1	1	0	4

	e_3	e_2	e_1
a_3	-1	-1	1
a_2	7	6	-5
a_1	5	4	-4

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 5 \\ -5 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4p.

2) x_1 első termékből
6 x_2 második termékből
gyártandó mennyiség.

E: $3x_1 + 4x_2 \leq 52$

CS: $3x_1 + 2x_2 \leq 38$

2p.

$x_1, x_2 \geq 0$

$500x_1 + 600x_2 \rightarrow max$

	x_1	x_2	b
u_1	3	$\boxed{4}$	52
u_2	3	2	38
$-z$	+5	+6	0

	x_1	u_1	b
x_2	3/4	1/4	13
u_2	$\boxed{6/4}$	-2/4	12
$-z$	2/4	-6/4	-78

	u_2	u_1	b
x_2			7
x_1	4/6	-2/6	8
$-z$	-2/3	-1/6	-82

3p

optimális megoldás:

$x_1 = 8$; $x_2 = 7$

$Z_{max} = 8200$

1p.

3) a) primál: $x_1 = 3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 5$; $z_{max} = 120$

6 duál: $y_1 = 0$; $y_2 = 3$; $y_3 = 1$; $z_{min} = 120$

b)
$$\left.\begin{array}{l} 4 + 2\lambda \geq 0 \rightarrow \lambda \geq -2 \\ 3 - \lambda \geq 0 \rightarrow \lambda \leq 3 \\ 5 + \lambda \geq 0 \rightarrow \lambda \geq -5 \end{array}\right\} -2 \leq \lambda \leq 3$$

$x_1 = 3 - \lambda$

$x_2 = 0$

$x_3 = 5 + \lambda$

$z = 120 + 3\lambda$

c) $\lambda = 2 \in [-2; 3]$, így 3λ-val vagyis 6-tal nő a célfgv. értéke.

4) $3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1$

6 $-2y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 3$

$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 1$

$7y_1 + 6y_2 + 10y_3 \rightarrow min$

$y_1 \geq 0$; $y_2 \leq 0$; y_3 előjelkötetlen

5) $y_1 + y_2 - 4t \leq 0$

$y_1 - y_2 - 2t \leq 0$

6 $y_1 + y_2 + t = 1$

$2y_1 + y_2 + 2t \rightarrow max$

	y_1	y_2	t	b
u_1	1	1	-4	0
u_2	1	-1	-2	0
u_3^*	1	1	$\boxed{1}$	1
$-z$	2	1	-2	0
z^*	1	1	1	1

	y_1	y_2	u_3^*	b
u_1	5	$\boxed{5}$	4	4
u_2	3	1	2	2
t	1	1	1	1
$-z$	4	3	2	2
z^*	0	0	-1	0

	y_1	u_1	b
y_2	1	1/5	4/5
u_2	$\boxed{2}$	-1/5	8/5
t	0	-1/5	1/5
$-z$	1	-3/5	-2/5

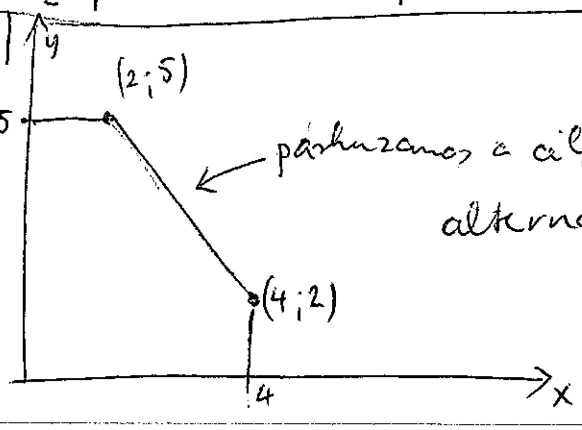
	u_2	u_1	b
y_2			1/
y_1			3/
t			1/
$-z$	-1/2	-1/2	-

opt: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $z = 1$

6)

4

Σ 32 pont



párhuzamos a célfgv. egyenesével

alternatív optimum, értéke: 32

Optimalizálás 2.zh

Név:

Neptun-kód:

1. Egy vásározó a hétköznapokon különböző városokban árulja a portékáját. Az alábbi táblázat megmutatja, hogy átlagosan mennyi bevételt (10000 Ft-ban) ér el az egyes városokban az adott napokon.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Miskolc	5	6	10	8	4
Ózd	5	6	8	7	3
Ónod	6	3	8	9	3
Szerencs	7	9	8	9	6
Nyíregyháza	6	4	5	9	2

Adja meg a városok és napok közötti optimális hozzárendelést, úgy. hogy a vásározó maximális haszonra tegyen szert!

2 Egy hátizsák teherbírása 80 kg, a berakásra váró dolgok tömegeit és értékeit adja meg az alábbi táblázat:

tömeg (kg)	40	25	20	20	18	16	15
érték ($)	80	75	100	24	27	10	21
	2	3	5	1,2	1,5	0,6	1,4

Mennyi a maximális összértéke a zsákba beférő tárgyaknak?

3. Oldja meg az alábbi szállítási feladatot, melyben kikötjük, hogy az F1 fogyasztó igényét mindenképpen ki kell elégíteni. Mennyi a szállítási összköltség minimuma?

	F1	F2	F3	készletek
T1	5	7	1	10
T2	3	2	8	12
igények	8	15	7	

4. Egy felül nyitott, henger alakú pohár űrtartalma 0.5 liter. A pohár alja fémből készül 10 dollár/négyzetdeciméter áron, az oldala üvegből, 4 dollár/ négyzetdeciméter áron. Milyen méretek mellett kell a legkevesebbet fizetni a pohár elkészítéséért?

5. Határozza meg a KKT pontokat az alábbi NLO feladatban:

$$2y^2 + 4x + 3y \to min$$

$$x + 7y = 25$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

OPT. 2. ZH. 2019. 05. 08.

1)

$$\begin{bmatrix}5&4&0&2&6\\5&4&2&3&7\\4&7&2&1&7\\3&1&2&1&4\\4&6&5&1&8\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}5&4&0&2&6\\3&2&0&1&5\\3&6&1&0&6\\2&0&1&0&3\\3&5&4&0&7\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}3&4&0&2&3\\1&2&0&1&2\\1&6&1&0&3\\0&0&1&0&0\\1&5&4&0&4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2&3&0^*&2&2\\0^*&1&0&1&1\\0&5&1&0^*&2\\0&0&2&1&0\\0&4&4&0&3\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2&2&0^*&2&1\\0&0^*&0&1&0\\0^*&4&1&0&1\\1&0&3&2&0^*\\0&3&4&0^*&2\end{bmatrix}$$

A max haszon: $10+6+6+6+9=\underline{37}$

2) Megfelelő sorrend:

É:	100	75	80	27	21	24	10
T:	20	25	40	18	15	20	16

$\boxed{1\ 1\ \tfrac{7}{8}\ 0\ 0\ 0\ 0 \mid z=245}$

$x_3=0$ → ① $\boxed{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ \tfrac{1}{10}\ 0}$ $\boxed{225{,}4}$

$x_3=1$ → ② $\boxed{1\ \tfrac{4}{5}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \mid 240}$

① $x_6=0$: $\boxed{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \tfrac{1}{8} \mid 224{,}25}$

① $x_6=1$: $\boxed{1\ 1\ 0\ \tfrac{15}{18}\ 0\ 1\ 0 \mid 221{,}5}$

$x_7=0$: $\boxed{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \mid 223}$

$x_7=1$: $\boxed{1\ 1\ 0\ 1\ \tfrac{1}{5}\ 0\ 1 \mid 213{,}4}$

$x_4=0$: $\boxed{1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \mid 220}$

$x_4=1$: $\boxed{1\ \tfrac{12}{25}\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \mid 217}$

② $x_2=0$ → ③ $\boxed{1\ 0\ 1\ 1\ \tfrac{12}{15}\ 0\ 0 \mid 209{,}8}$

② $x_2=1$ → ④ $\boxed{\tfrac{3}{4}\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \mid 230}$

④ $x_1=0$ → ⑤ $\boxed{0\ 1\ 1\ 1\ \tfrac{15}{48}\ 0\ 0 \mid 177{,}5}$

④ $x_1=1$ → ⑥ $\boxed{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \text{ SOK}}$

A max érték: $100+75+27+21=\underline{223}$

3)

	F_1	F_2	F_3	
T_1	5	7	1	10
T_2	3	2	8	12
T_3	M	0	0	8
	8	15	7	

Kezdeti szállítás:

8	2	–	~~10~~ ~~2~~ 0
–	12	–	~~12~~ 0
M	1	7	~~8~~ ~~7~~ 0
~~8~~ 0	~~15~~ ~~13~~ ~~1~~ 0	~~7~~ 0	

	4	6	6
1	8 (5)	2 (7)	– (1)
−4	– (3)	12 (2)	– (8)
−6	M	1 (0)	7 (0)

$\bar{c}_{13}=1-7=-6$

$\bar{c}_{21}=3$

$\bar{c}_{23}=8-2=6$

~~x_{13}~~ helyett x_{12}:

	4	0	0
1	8 (5)	– (7)	2 (1)
2	– (3)	12 (2)	– (8)
0	M	3 (0)	5 (0)

$c_{12}=6$

$c_{21}=-3$

$c_{23}=6$

x_{21} helyett x_{33} 5-el:

	~~4~~	3	0
1	3 (5)	– (7)	7 (1)
−4	5 (3)	7 (2)	– (8)
−3	M	8 (0)	~~0~~ (0)

$c_{12}=3$

$c_{23}=9$

$c_{33}=3$

A min száll. költség: $3\cdot5+7\cdot1+5\cdot3+7\cdot2=\underline{51}$

3	–	7
5	7	–
–	8	–

4)

$V=r^2\pi h=0{,}5 \to h=\frac{0{,}5}{r^2\pi}$

$K=10r^2\pi+4\cdot2r\pi h\to\min$

$K=10r^2\pi+8\cancel{r\pi}\frac{0{,}5}{r^{\cancel{2}}\cancel{\pi}}=10r^2\pi+\frac{4}{r}$

$K'(r)=20r\pi-\frac{4}{r^2}=0$, ha $20r\pi=\frac{4}{r^2}$

$r^3=\frac{1}{5\pi}$

$r\approx0{,}4\,dm$

$h\approx1\,dm$

$K''(r)=20\pi+\frac{8}{r^3}>0$

ezért minimum van!

A minimális összeg $\approx 15{,}08$ \$

5) $L(x,y,\lambda,\mu)=$

$=2y^2+4x+3y+\lambda(x+7y-25)+\mu(x^2+y^2-25)$

$L'_x=4+\lambda+2\mu x=0$

$L'_y=4y+3+7\lambda+2\mu y=0$

$\mu(x^2+y^2-25)=0$

$\mu\geq0$

$x+7y=25$

$x^2+y^2\leq25$

1. eset $\mu=0$, $\to\lambda=-4$; $y=\frac{25}{4}$ kívül!

2. eset $x^2+y^2=25$, $x+7y=25$

$(25-7y)^2+y^2=25$

$625-350y+50y^2=25$

$y^2-7y+12=0$

$(y-3)(y-4)=0$

$y=3$; $x=4$ $\quad y=4$; $x=-3$

$P(4;3)$: $4+\lambda+8\mu=0$

$15+7\lambda+6\mu=0$

$15+7(-4-8\mu)+6\mu=0$

$\mu<0$ nem KKT.

$P(-3;4)$: $4+\lambda-6\mu=0$

$19+7\lambda+8\mu=0$

$19+7(6\mu-4)+8\mu=0$

$\mu>0$ $\underline{(-3;4)\text{ KKT}}$

Optimalizálás vizsgazárthelyi 2017.05.25.

1. Az alábbi táblázat egy egyperiódusos befektetési modell adatait tartalmazza (millió Ft-ban). Melyik beruházásokat válasszuk a maximális összhozam érdekében, ha összesen 62 millió Ft áll a rendelkezésünkre? Használja a korlátozás és szétválasztás algoritmusát!

Beruházás jele	B1	B2	B3	B4	B5	B6
Befektetendő összeg	15	12	9	27	15	8
Hozam a periódus végén	30	19	13	38	20	8

2. Oldja meg az alábbi lineáris programozási feladatot! (Útmutatás: a duális feladatot könnyebb megoldani.)

$$y_1, y_2, x_3 \geq 0$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1 + y_2 - y_3 \geq 3$$

$$-y_1 + 2y_3 \geq 2$$

$$10y_1 + 6y_2 + 16y_3 \to min$$

3. Egy háromváltozós normál LP feladat optimális szimplex táblája az alábbi:

	u_1	u_3	x_3	b
x_1	3	-1	4	3
u_2	-4	1	-3	3
x_2	-2	1	-2	2
-z	-3	-2	-5	-39

a) Határozza meg a primál és a duál feladat optimális megoldását a táblázat alapján!

b) Végezzen érzékenységvizsgálatot a normál feladat első két feltételére!

4. Adott 5 elvégzendő feladat (F1, ..., F5), és a feladatok elvégzésére képes 6 munkás (M1, ..., M6). Az alábbi táblázat megadja, hogy az egyes munkások hány perc alatt végzik el az egyes feladatokat. Adja meg, hogy az egyes munkásoknak melyik feladatot kell kiadni (legfeljebb egyet), úgy, hogy összességében a lehető legkevesebb idő alatt végezzenek! Melyik munkás nem kap feladatot és mennyi a minimális idő?

	F1	F2	F3	F4	F5
M1	10	12	8	7	8
M2	11	10	12	8	10
M3	9	12	15	10	8
M4	9	15	11	12	10
M5	8	11	9	10	12
M6	7	9	8	10	10

5. Adjon meg 3 pozitív számot úgy, hogy összegük a lehető legnagyobb, reciprokaik összege pedig 1 legyen. Használja Lagrange módszerét!

Elméleti kérdések

1. Adja meg az R^n térben a konvex halmaz definícióját!

2. Mikor nevezünk egy vektorrendszert lineárisan függetlennek?

3. Adja meg az NLO feladatok általános alakját!

4. Hogy kezeljük a szállítási feladatban az egyedi tiltások esetét?

5. Egy standard LP feladat célfüggvénye: $x_1 - x_2$, extrémális irányait az (1;2) és (2;3) vektorok jelölik ki. Állapítsa meg, van-e a feladatnak véges optimuma! (Indoklással!)

Értékelés: a feladatok 6 pontot, az elméleti kérdések 2 pontot érnek.

0-15: elégtelen; 16-21: elégséges; 22-27: közepes; 28-33: jó; 34-40: jeles

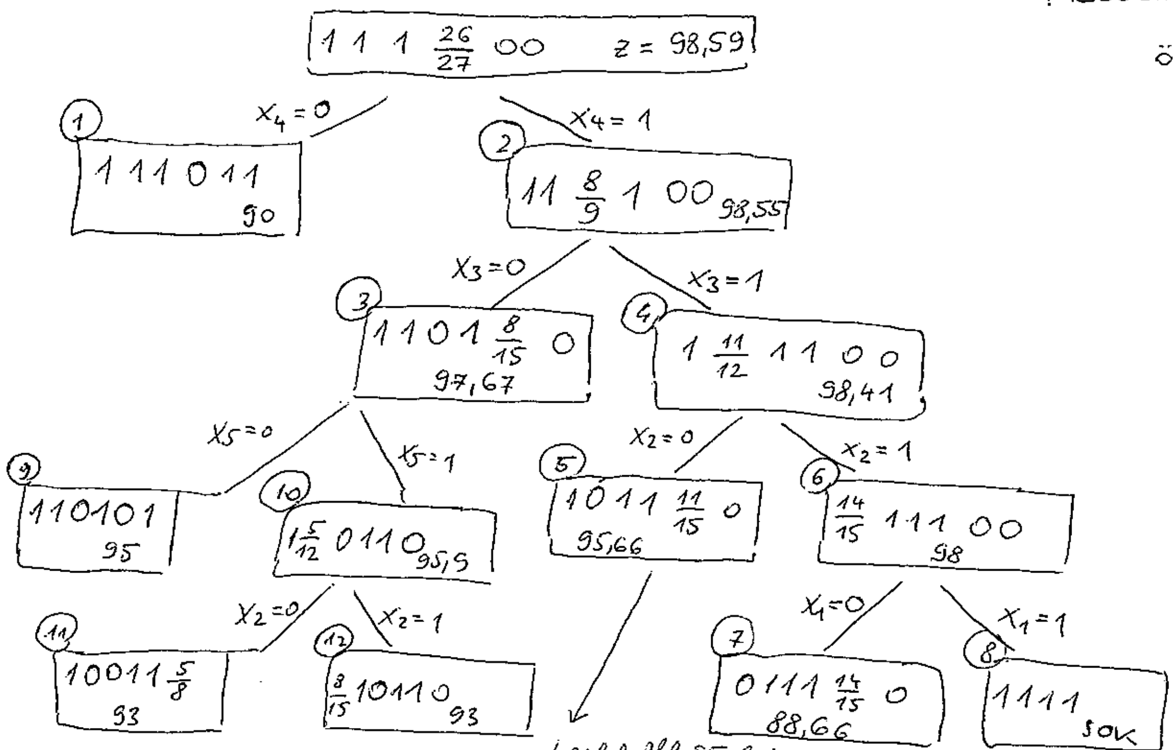
MEGOLDÁS 2017.05.25.

1) $30x_1+19x_2+13x_3+38x_4+20x_5+8x_6 \to max$

$15x_1+12x_2+9x_3+27x_4+15x_5+8x_6 \le 62$

MEGOLDÁS: B1, B2, B4, B6

összhozam: 95



Legfeljebb 95 lehet, ilyen egész megoldás pedig már van.

2) A duális feladat:

$2x_1+x_2-x_3 \le 10$

$x_1+x_2 \le 6$

$-x_2+2x_3 \le 16$

$x_1+3x_2+2x_3 \to max$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

	x_1	x_2	x_3	b
u_1	2	1	-1	10
u_2	1	$\boxed{1}$	0	6
u_3	0	-1	2	16
$-z$	1	3	2	0

	x_1	u_2	x_3	b
u_1	1	-1	-1	4
x_2	1	1	0	6
u_3	1	1	$\boxed{2}$	22
$-z$	-2	-3	2	-18

	x_1	u_2	u_3	b
u_1	3/2	-1/2	+1/2	15
x_2	1	1	0	6
x_3	1/2	1/2	1/2	11
$-z$	-3	-4	-1	-40

PRIMÁL MEGOLDÁS

$y_1=0;$

$y_2=4$ $z_{min}=40$

$y_3=1$

3) PRIMÁL: $x_1=3;\ x_2=2;\ x_3=0,\ z=39$

DUÁL: $y_1=3;\ y_2=0;\ y_3=2;\ z=39$

Első feltétel:

$3+3\lambda \ge 0$ $\lambda \ge -1$

$3-4\lambda \ge 0$ $\lambda \le 3/4$

$2-2\lambda \ge 0$ $\lambda \le 1$

$-1 \le \lambda \le \frac{3}{4}$

$x_1=3+3\lambda$

$x_2=2-2\lambda$

$x_3=0$

$z=-39-3\lambda$

Második feltétel: $3+\lambda \ge 0$ $\lambda \ge -3$

is változatlan a megoldás

4)

10	12	$\boxed{8}$	7	8	0
11	10	12	$\boxed{8}$	10	0
9	12	15	10	$\boxed{8}$	0
9	15	11	12	10	$\boxed{0}$
$\boxed{8}$	11	9	10	12	0
7	$\boxed{9}$	8	10	10	0
-7	-9	-8	-7	-8	

3	3	0	0	1	1
3	0	3	0	2	0
1	2	6	2	0	0
1	5	2	4	2	0
0	1	0	2	4	0
0	0	0	3	3	1
6	5	4	3	2	1

3	3	0	0	0	0
4	1	4	1	2	0
2	3	7	3	0	0
2	6	3	5	2	0
1	2	1	3	4	0
0	0	0	3	2	0

A minimális idő: 41 perc

M4 nem kap feladatot.

5) $x+y+z \to max$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

$F(x,y,z)=x+y+z+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)$

$F'_x=1-\frac{\lambda}{x^2}=0$

$F'_y=1-\frac{\lambda}{y^2}=0$

$F'_z=1-\frac{\lambda}{z^2}=0$

$x^2=y^2=z^2 \to x=y=z$

mindegyik 3

$F'_\lambda: \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$