

GEMAKK629M

ME Matematikai Intézet

Név:

Matematikai Intézet

Neptun-kód:

Dátum:

Zárthelyi dolgozat VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA c. tantárgyból
MSC GÉPÉSZMÉRNÖK szakos nappali hallgatók részére

Akkor szerez aláírást a hallgató, ha minimum 1 elméleti kérdésre hiánytalanul jól válaszol és 1 gyakorlati feladatot végeredményig megold. Aki az aláírás feltételének teljesítésén túl legalább 1 kérdést helyesen megválaszol, annak lehetősége van megajánlott vizsgajegyet szerezni.

Minden számítást 4-tizedes pontossággal végezzen!

Csak a logikai menetnek és a kért módszernek a pontos követése esetén értékelhető a feladat, különben nem ér pontot.

- E1. Bizonyítsa be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$ tetszőleges x valós szám esetén, ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvényt jelöli!
- E2. Vezesse le a σ -algebra fogalmát!
- E3. Definíálja Poisson eloszlású valószínűségi változót!
- F1. Az alábbi táblázat ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlásának adatait tartalmazza.

(X, Y)	2	3	4
1	0,12	0,04	0,04
2	0,56	0,16	0,08

Számítsa ki az $E(Z)$ várható értéket, valamint $D(Z)$ szórását, ahol $Z = \frac{X}{Y}$!

- F2. Legyen X valószínűségi változó Poisson-eloszlású $\theta \in (0, \infty)$ paraméterrel.

- (i.) Határozza meg a paramétere maximum likelihood becslést!
- (ii.) Számítsa ki a kapott becslésnek várható értékét!

- F3. Egy automatagép 200-mm hosszúságú pálcikákat készít. A pálcikák hossza normális eloszlású μ várható értékkel és $\sigma = 2$ szórással, melyre az alábbi mintát vettek.

201	196	193	198	195	204	196	198	200	203
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- (a.) Határozza meg a várható értékre egy konfidencia intervallumot 0,999 megbízhatósági szinten!
- (b.) Az $\alpha = 0,001$ elsőfajú hiba esetén elfogadható-e, hogy az egész sokaságban a várható érték $m_0 = 200$ milliméter? Hozza meg a döntését P -érték, valamint a kritikus tartomány meghatározásával!

[F1]

$$Z = \frac{X}{Y}$$

$$E(Z) = \frac{1}{2} \cdot 0,12 + \frac{1}{3} \cdot 0,04 + \frac{1}{4} \cdot 0,04 + \\ + \frac{2}{2} \cdot 0,56 + \frac{2}{3} \cdot 0,16 + \frac{2}{4} \cdot 0,08 = 0,79$$

$$E(Z^2) = 0,68806$$

$$D(Z) = \sqrt{0,68806 - 0,79^2} = \underline{\underline{0,2529}}$$

$$P(X=x) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}, \quad x=0,1,2,\dots$$

$X: X_1, \dots, X_n$ minta

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta}$$

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) &= \sum_{i=1}^n [x_i \ln \theta - \ln(x_i!) - \theta] = \\ &= (\ln \theta) \cdot n \bar{X} - \sum_{i=1}^n \ln x_i! - n\theta \end{aligned}$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \theta^{-1} n \bar{X} - n$$

$$\theta^{-1} n \bar{X} - n = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X}.$$

$$\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2} = -\theta^{-2} n \bar{X} \Rightarrow -\frac{\bar{X} n}{\bar{X}^2} = -\frac{n}{\bar{X}} < 0$$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X}$ aq MLB.

$$\begin{aligned} \textcircled{b} \quad E(\hat{\theta}) &= E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot m = m, \text{ ahol} \\ &\quad \underbrace{m = \theta} \end{aligned}$$

m a közös várható érték, ami egyenlő θ -val mert Poisson eloszlás várható ~~megyege~~ ~~megyegezik~~ a paraméterével!

$$\bar{x} = 198,4$$

$$n = 3$$

l. a sokaság
várható értéke.

a) $1 - \alpha = 0,999 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0005$
 $z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(0,9995) = 3,32$

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

$$196,3 \leq \mu \leq 200,5$$

$$196,3 \leq \mu \leq 200,5$$

b) $H_0: \mu = 200$

$H_1: \mu \neq 200$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$z_{sz} = \frac{198,4 - 200}{2 / \sqrt{10}} = -2,5298$$

b/1: $K = (-\infty; -3,32) \cup (3,32; \infty)$

mivel $z_{sz} = -2,5298 \notin K \Rightarrow$ elfogadjuk
 a H_0 -t.

b/2 P -érték $= 2 [1 - \Phi(|z_{sz}|)] =$
 $= 2 [1 - \Phi(2,5298)]$

Lagrange interpolációval: $\Phi(2,5298) \approx 0,9943$

P -érték $= 0,011408$

mivel P -érték $= 0,011408 > 0,0001 = \alpha$
 ezért elfogadjuk a H_0 hipotézist!

$$\boxed{E1}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad [t \approx -y]$$

$$= - \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} dt = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

$$= 1 - \Phi(x)$$

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = \Phi(x) + (1 - \Phi(x)) = 1.$$

[E2]

l. $\Omega \neq \emptyset$ halmaz és $\mathcal{F}$ az Ω részhalmazai közül egy halmaz.

Akkor $\mathcal{F}$ σ -algebrának nevez., ha

1.) $\Omega \in \mathcal{F}$

2.) Ha $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

$$\bar{A} := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}.$$

3.) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

E3

A φ v.v. λ -paraméterű ($\lambda > 0$)
~~u.v.~~ Poisson eloszlású, ha

1.) $\varphi(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, k, \dots\} = \mathbb{Z}^+$

azaz a lehetséges értékek: $0, 1, 2, 3, \dots$

2.) eloszlása:

$$p(\varphi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, (k = 0, 1, 2, \dots)$$