

# **1. Ütemterv a Lineáris algebra és Diszkrét Matematika/Algebra M c. tárgyból,**

**2019/2020 I. félév**

(Műszaki informatikai és Villamosmérnök szak, GEMAN102-B,-113B, 1BI1-I2,-I3,-1BVI))

(3 óra előadás +2 óra gyakorlat)

1. Számhalmazok, Halmazok Descartes szorzata,. Koordinátarendszer
2. Kombinatorikai alapfogalmak. Newton Binomiális tétele. Bináris reláció fogalma, Homogén bináris relációk tulajdonságai,
3. Inverz reláció. Relációk szorzata. Függvény fogalma, függvények egyenlősége. Kölsönösen egyértelmű (bijektív) függvények, függvények összetevése, inverz függvény. Egy véges halmaz permutációi.
4. Műveletek permutációkkal. Félcsoport és csoport fogalma – példák. Számítási szabályok félcsoportban és csoportban.
5. Komplex számokkal végzett műveletek algebrai és trigonometria alakban. Binomegyenletek megoldása.
6. Egységgyökök. Polinomokkal végzett műveletek tulajdonságai. Egész számok és polinomok maradékos osztása, Bezout tétele
7. Az algebra alaptétele. Polinomok felbontása  $R$  és  $C$  felett. Mátrixok, mátrixokkal végzett műveletek tulajdonságai. Gyűrű és test fogalma. Determináns induktív definíciója.
8. Determináns tulajdonságai és kiszámítása. Vektorok. Vektorműveletek tulajdonságai. Skaláris szorzat, vektoriális és vegyes szorzat és mértani jelentésük
9.  $n$  - dimenziós Euklidészi vektortér. Ortogonális vektorrendszer. Lineáris tér fogalma, Lineáris altér. Alterek metszete.
10. Generátorrendszerek és lineárisan független elemrendszerek lineáris térben. Bázis és dimenzió. Báziscsere. Lineáris transzformáció fogalma, példák.
11. Lineáris transzformáció mátrixos alakja, lineáris transzformációk összetevése és inverze mátrixos alakban. Képtér, Mátrix rangja.
12. Lineáris funkcionálok. Egyenletrendszerek megoldása Gauss módszerrel. Rangtétel.
13. Sajátérték, sajátvektor. Izomorfizmus algebrai struktúrák között.. Lineáris terek izomorfizmustétele.
14. Számítási szabályok gyűrűben és testben. Maradékosztály-gyűrűk, véges testek.

## **2. Tantárgyi követelmények**

1. A tárgy lezárásának a módja: aláírás + vizsga.
2. A félév elismerésének (az aláírás megszerzésének) feltételei: 1 félévközi zárthelyi dolgozat és egy félévközi teszt legalább elégséges szinten való teljesítése (külön-külön).
3. A dolgozatok időtartama maximum 45 perc, időpontja a 7. és 12. hétre tervezett – a tanulókör kérésére 1 héttel eltolható. Az értékelés módja: az elégséges osztályzat eléréséhez legalább az összpontszám 50%-a szükséges.
4. A sikertelen vagy meg nem írt zárthelyi/teszt pótlása a 14. héten vagy az összes érintett hallgató által kért héten történik, egyéb feltétele a pótlásnak nincs.
5. A vizsgák kötelező írásbeli részből és egy opcionális szóbeli részből állnak. A szóbeli vizsgán csupán a legalább 4-es osztályzatot elért hallgatók vehetnek részt.
6. Az írásbeli vizsga időtartama 1 óra 30 perc. Az elégséges osztályzat megszerzéséhez az írásbeli összpontszámának legalább a 45%-a szükséges.

A tárgy jegyzője: Dr. Radeleczki Sándor

Miskolc, 2019. Szeptember 8.

# Zárthelyi dolgozat

## Lineáris Algebra és Diszkrét Matematika tárgyból

Név:..... Kód:.....

Tankör:.....

1. (a) Adott az  $E(x) = (2x + \frac{1}{\sqrt{x}})^{12}$  kifejezés. Írja fel  $E(x)$  binomiális kifejtésének azt a tagját ami nem tartalmazza  $x$ -et. (3p)
- (b) Hány oldala van annak a konvex sokszögnek amely átlóinak a száma 77? (2p)

2. (a) Számítsa ki a következő komplex számot (3p):

$$z = \frac{(\sqrt{3} + i)^6}{1 + i}$$

- (b) Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán. (5p)

$$x^6 + 7x^3 - 8 = 0$$

- (c) Bontsa fel irreducibilis tényezők szorzatára a  $P(x) = x^6 + 7x^3 - 8$  polinomot  $\mathbb{C}$  felett. (1p)

3. (a) Adott a  $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  permutáció. Számítsa ki a  $\theta^{2016}$  és a  $\theta^{-2}$  hatványait. (2p+2p)

- (b) Írjuk fel az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = 2^{\sqrt[3]{x}}$  függvény inverzfüggvényét. (2p)

- (c) Milyen függvényt nevezünk bijektív függvénynek? (1p)

4. (a) Adottak az  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  és a  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  mátrixok. Számítsa ki az  $S = 2(A^2 + AB + BA + B^2)$  mátrixot (3p)

- (b) Mit értünk félcsoporthoz tartozó alatt? (Írjon rá egy példát is) (2p)

- (c) Igazolja hogy  $(M_{n,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  egy nem kommutatív gyűrű. (3p)

## Teszt Lin. Algebrából és Diszkrét Mat.-ból

Név:..... Kód:.....

1. Adott az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$  mátrix.

(a) Határozza meg úgy az  $a \in \mathbb{R}$  paraméter értékét, hogy  $A$  invertálható legyen. (2p)

(b) Mennyi ekkor az  $A$  mátrix rangja? (1p)

(c) Ha  $a = 10$ , határozza meg  $A$  inverzét. (3p)

2. Adottak az  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(2, 2, 5)$ ,  $C(4, 0, 2)$ ,  $D(1, 1, 0)$  koordinátájú pontok a térben. Számítsa ki:

(a) Az  $BAC$  szög koszinuszát. (2p)

(b) Az  $ABC$  háromszög területét. (3p)

(c) Az  $ABCD$  tetraéder térfogatát. (3p)

3. (a) Írja fel az  $x - y + z = 1$  és az  $x + y + z = 3$  síkok metszéskor keletkező egyenes paraméteres egyenleteit. (3p)

(b) Az  $x - y + z = 1$  sík origótól való távolságát. (2p)

(c) Milyen vektorrendszert nevezünk egy  $V$  vektortér bázisának? Írjon rá egy példát. (2p)

Minta Vizsgázárhelyi dolgozat  
Lin. Algebrából és Diszkrét Matematika I-ből

Név:..... Kód:.....

1. (a) Adott a  $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$  permutáció. Számítsa ki a  $\theta^{2019}$  hatványát. (3p)

(b) Igazolja hogy  $x^2 + 1$  osztja a  $P(x) = (x^2 - x + 1)^{2020} - 1$  polinomot. (3p)

(c) Hány átlója van egy 14 oldalú konvex sokszögnek? (1p)

2. Az  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmazon adott a

$\rho = \{(1, 2); (2, 5); (3, 2); (4, 1); (4, 5); (5, 3); (6, 1)\}$  és az

$R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 6)\}$  bináris reláció.

(a) Adja meg a relációk gráfjait. (1p)

(b) Számítsa ki a  $\rho^2 \cap R^{-1}$  relációt. (3p)

(c) Adott az  $E(x) = (x - \frac{1}{\sqrt{x}})^{13}$  kifejezés. Adja meg  $E(x)$  binomiális kifejtésének azt a tagját ami  $x$ -et az első hatványon tartalmazza. (3p)

3. (a) Határozza meg úgy az  $x \in \mathbb{R}$  számot, hogy az  $\bar{a} = (1, 2, 1)$ ,  $\bar{b} = (3, 0, 4)$ ,  $\bar{c} = (0, 3, 1 + x)$  vektorok  $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$  vektortérnek egy bázisát alkossák. (2p)

(b) Írja fel a  $\bar{v} = (0, 3, -2)$  vektort az  $x = 0$ -ra kapott bázisban. (3p)

(c) Számítsa ki az  $\bar{b}$  és  $\bar{v}$  vektorok által bezárt szög szinuszt. (3p)

4. Adott az

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, L(x, y, z) = (x - 2y + z; y - z; x - 2z)$$

lineáris transzformáció.

(a) Írja fel  $L$ -t mátrixos alakban (1p)

(b) Vizsgálja meg, hogy hány megoldása van az  $L(x, y, z) = (1, 0, 1)$  egyenletnek. (3p)

(c) Számítsuk ki az  $L$  sajátértékeit. (2p)

5. Mátrix inverze: definíció, kiszámítása, egy példa. (3p)

Jawabati di bawah ini!

(1)

1(a)  $E(x) = (2x + x^{-1/2})^{12}$

$$T_{k+1} = 2^{12-k} \binom{12}{k} x^{12 - \frac{3k}{2}} = Ax^0$$

$$12 - \frac{3k}{2} = 0 \Rightarrow k = 8 \quad (2p)$$

$$T_9 = 2^4 \binom{12}{8} x^0 = 16 \binom{12}{4} = 7920 \quad (1p)$$

(b)  $A' \text{ kelas } D. = \binom{4}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow \frac{n(n-3)}{2} = 77, \text{ no } n/$

$$n^2 - 3n - 154 = 0 \rightarrow n_1 = 14 \text{ kelas} - \text{negoroklos} \checkmark$$

$$\rightarrow n_2 = -11 \text{ kelas} - \text{non negoroklos}$$

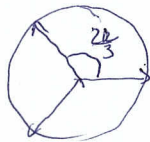
2(a)  $\sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad (1p) \quad z = \frac{[2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)]^6}{1-i}$

$$= \frac{64 (\cos \pi + i \sin \pi) (1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-64(1-i)}{1-(-1)} = 32(1-i) = -32 + 32i \quad (1p)$$

(b)  $6i = x^3, x^2 + 7x - 8 = 0 \rightarrow x_1 = 1 = x^3 = 1 \quad (1p)$

$$\rightarrow x_2 = -8 = x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{1}$$



$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2p)

$$x = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left( \cos \frac{(2k+1)\pi}{3} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{3} \right) \quad k=0,1,2$$

$$x_4 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i, \quad x_5 = -2, \quad x_6 = 1 - \sqrt{3}i$$

(c)  $P(x) = (x-1)(x+2)(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i) \quad (2p)$

3. (a)  $\theta: \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ & \nearrow & \searrow \\ & 4 & 5 \end{matrix} \quad [3,2] = 6, \quad 6^6 = E \quad (1p)$

$$\Theta^{2016} = (\Theta^6)^{336} = E^{336} = E \quad (1)$$

$$\Theta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad y = f(x) = 2\sqrt[3]{x}, \quad \log_2 y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = (\log_2 y)^3 \quad (1)$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = (\log_2 x)^3 \quad (1)$$

$$4(a) \quad S = 2(A+B)^2 \stackrel{(2)}{=} 2 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(c) Ellendörmiss a gróvri axiómát. (3p)

Javítási útmutató / Teszt

$$1.(a) \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = -13 + a \quad \det(A) = 0 \Leftrightarrow a = 13 \quad (1)$$

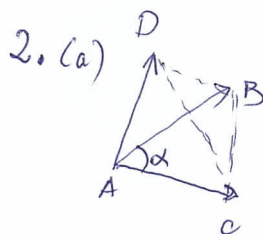
$$\nexists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 13 \quad (1)$$

$$(b) \text{ Ha } a = 13 \text{ akkor } \det(A) = 0, \text{ de } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ ezért } \text{rang}(A) = 2 \quad (1)$$

$$(c) \text{ Ha } a = 10 \text{ akkor } \det(A) = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \quad (1) \quad A^* = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det(A)} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -2 & \frac{2}{3} \\ 2 & -2 & 1 \\ -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1) \quad \text{Ell.: } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_3$$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1, 2, 4) \\ \overrightarrow{AC} &= (3, 0, 1) \\ \overrightarrow{AD} &= (0, 1, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{7}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{10}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{210}} = \frac{7\sqrt{210}}{210} \quad (1) \end{aligned}$$

$$2(b) \quad T_{ABCA} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \textcircled{11}$$

$$= \frac{1}{2} \|(2\vec{i} + 11\vec{j} - 6\vec{k})\| = \frac{1}{2} \sqrt{4+121+36} = \frac{\sqrt{161}}{2} \textcircled{11}$$

$$c) \quad V_{[ABCD]} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-1+6+12| = \frac{17}{6} \textcircled{11}$$

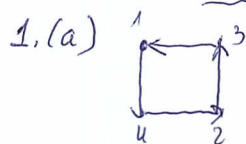
$$4(a) \quad \begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=1-t \\ x+y=3-t \\ z=t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-t \\ y=1 \\ z=t \end{cases} \textcircled{11}$$

$$(c) \text{ generate } \vec{v}(t) = (2-t, 1, t), t \in \mathbb{R} \textcircled{11}$$

$$(b) \quad x-y+z-1=0 \quad d = \left| \frac{0-0+0-1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \textcircled{11}$$

$$(c) \quad \text{PE: } B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

Jawablah ditm. / Virgatha



$$[4, 2] = 4 \Rightarrow G^4 = E \textcircled{11}$$

$$2019: 4 = 54 \text{ sisa } 3$$

$$G^{2019} = G^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \textcircled{11}$$

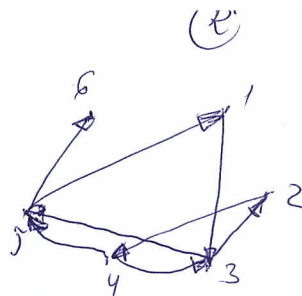
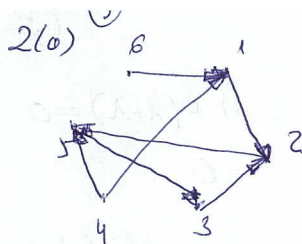
$$(b) \quad x^2+1=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=i \\ x_2=-i \end{cases} \textcircled{11} \quad x^2+1=(x-i)(x+i) \quad P(i)=(-1-i+1)-1=-1-1=-2 \neq 0$$

$$\text{maka } (x-i) \nmid P(x) \textcircled{11}$$

Maka  $-i$  as  $i$  konjugatnya,  $P(i)=0 \Rightarrow P(-i)=0$ , maka  $x+i \mid P(x)$  -et.  
 maka  $(x-i)(x+i) \mid P(x)$  atau  $x^2+1 \mid P(x)$ .  $\textcircled{11}$

$$(c) \quad A' = \frac{n(n-3)}{2} \quad n=14, \text{ maka } A' = \frac{14 \cdot 11}{2} = 77 \textcircled{11}$$





(b)  $\rho^2 = \rho \circ \rho = \{(1,5), (2,3), (3,5), (4,2), (4,3), (5,2), (6,2)\}$  (1)  
 $R^{-1} = \{(3,1), (4,2), (2,3), (5,3), (3,4), (5,4), (1,5), (6,5)\}$  (1)  
 $\rho^2 \cap R^{-1} = \{(1,5), (2,3), (4,2)\}$  (1)

(c)  $E(x) = (x + (-x - \frac{1}{2}))^{13}$   $T_{k+1} = \binom{13}{k} x^{13-k} \cdot (-1)^k x^{-\frac{k}{2}} = Ax^1$  (1)  
 Exert:  $13 - \frac{3k}{2} = 1 \Rightarrow k = 8$  (1)  
 $T_9 = \binom{13}{8} (-1)^8 x = \binom{13}{5} x = 1287x$  (1)

3. (a)  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  bármely  $\Leftrightarrow \{2\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  lin. független  $\Leftrightarrow \det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0$   
 $\det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1+x \end{vmatrix} = 3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$  (1)

$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  lin. független  $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$  (1)

(b)  $B = \{(1, 2, 1), (3, 0, 4), (0, 3, 1)\}$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 0 \\ y + 3t = 3 \\ y + 4z + t = -2 \end{cases}$  (1)

$\begin{cases} y = 3 \\ z = -1 \\ t = -1 \end{cases} \quad \bar{v} = (3, -1, -1)_B$  (2)

(c)  $\cos \alpha = \frac{\bar{b} \cdot \bar{v}}{\|\bar{b}\| \cdot \|\bar{v}\|} = \frac{-8}{5\sqrt{13}}$  (1)  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{261}{325}$

$\alpha \in [0, 180^\circ]$ , ezért  $\sin \alpha > 0$ , így  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{261}{325}}$  (1)

4. (a)  $L(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$   
 $L(0, 1, 0) = (-2, 1, 0)$   
 $L(0, 0, 1) = (1, -1, -2)$   
 $L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  (1)

(b)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(A) = 3$  (1)  $\Rightarrow$  az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. (1)

$$c) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) + (1+\lambda) = 0$$

$$-1 + 4\lambda - \lambda^3 = 0$$

$\lambda^3 - 4\lambda + 1 = 0$  (10) Kvalitatiivne mõistamine negatiivne; esiteks  
võttes negatiivseid on ar. (1,8; 1,9) intervallumid (10)