GEMAN112-B
Ütemterv a Diszkrét Matematika I. BSc. tárgyból (2019/2020)
(Programozó informatikus, Gazdaság informatikus és Villamosmérnök szak)
(2 óra előadás+2 óra gyakorlat)

1. Halmazok és műveletek, a Descartes szorzat, relációk és függvények.
2. Relációk: részben rendezés és ekvivalencia.
3. Kombinatorikai alapfogalmak. Newton binomiális tétele.
4. Permutációk: ciklusok, tipus, szorzás, konjugálás, paritás.
5. Komplex számok: műveletek, trigonometrikus alak, számtestek.
6. Egyváltozós polinomok: művletek, gyökök, maradékos osztás.
7. Polinomok legnagyobb közös osztója, Euklidészi algoritmus.
8. Polinomok irreducibilis tényezőkre való felbontása, a Schönemann-Eizenstein kritérium, Gauss lemma.
9. Az algebra alaptétele és következményei.
10. Többváltozós polinomok, a szimmetrikus polinomok alaptétele.

Tantárgyi követelmények
A tárgy lezárásának a módja: aláírás + vizsga.
A félév elismerésének (az aláírás megszerzésének) feltételei: kettő félévközi zárthelyi dolgozat legalább elégséges szinten való teljesítése (külön-külön).
A dolgozatok időtartama maximum 70 perc, időpontja a 7. és 12. hétre tervezett – a tanulókör kérésére 1 héttel eltolható. Az értékelés módja: az elégséges osztályzat eléréséhez legalább az összpontszám 40 százaléka szükséges.
A sikertelen vagy meg nem írt zárthelyi/teszt pótlása a 14. héten vagy az összes érintett hallgató által kért héten történik, egyéb feltétele a pótlásnak nincs.
A vizsgák kötelező írásbeli részből és egy opcionális szóbeli részből állnak. A szóbeli vizsgán csupán a legalább 4–es osztályzatot elért hallgatók vehetnek részt.
Az írásbeli vizsga időtartama 70 perc. Az elégséges osztályzat megszerzéséhez az írásbeli összpontszámának legalább a 40 százaléka szükséges.
A tárgy jegyzője: Szigeti Jenő

DISZKRÉT MATEMATIKA első félév (70 perc)

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében (itt $|z|$ a z komplex szám abszolut értékét és $\overline{z}$ a konjugáltat jelöli):

$$|z|^2 + 2\overline{z} = 16 - 4i$$

2. Számoljuk ki az x együtthatóját az alábbi szorzat polinomban.

$$(1+x)^{13}(1-x)^{13}$$

3. Határozzuk meg az

$$f(x) = x^5 - 5x + 4 \text{ és } g(x) = x^3 - 2x + 1$$

polinomok legnagyobb közös osztóját.

4. Az $f(x) = x^8 - 9x^2$ polinomnak adjuk meg az irreducibilis tényezőkre való szorzattá alakítását $\mathbb{Q}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben.

5. Adjuk meg az $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 1 & 8 & 7 & 2 & 9 & 4 & 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ permutáció előjelét. Adjuk meg α-nak transzpozíciók szorzataként való előállítását.

6. Hány olyan S_{10}-beli π permutáció van, amelynek tipusa $(6,4)$?

MEGOLDÁSOK

1. $z = a + bi$ esetén $|z|^2 = a^2 + b^2$ és $\overline{z} = a - bi$. Az egyenlet

$$a^2 + b^2 + 2a - 2bi = 16 - 4i$$

alakot ölt, ahonnan $a^2 + b^2 + 2a = 16$ és $-2b = -4$ adódik. A megoldás $b = 2$ és $a^2 + 4 + 2a = 16$, ahonnan $a^2 + 2a - 12 = 0$. Két értéket kapunk

$$z_1 = \sqrt{13} - 1 + 2i \text{ és } z_2 = -\sqrt{13} - 1 + 2i.$$

2. $(1 + x)^{13}(1 - x)^{13} = (1 - x^2)^{13}$

3. Az Euklidészi algoritmust használjuk.

1.lépés

$x^5 - 5x + 4 : x^3 - 2x + 1 = x^2 + 2$

$\underline{-(x^5 - 2x^3 + x^2)}$

$2x^3 - x^2 - 5x + 4$

$\underline{-(2x^3 - 4x + 2)}$

$-x^2 - x + 2 = r_2(x)$

2.lépés

$x^3 - 2x + 1 : -x^2 - x + 2 = -x + 1$

$\underline{-(x^3 + x^2 - 2x)}$

$-x^2 + 1$

$\underline{-(-x^2 - x + 2)}$

$x - 1 = r_3(x)$

3.lépés

$-x^2 - x + 2 : x - 1 = -x - 2$

$\underline{-(-x^2 + x)}$

$-2x + 2$

$\underline{-(-2x + 2)}$

$0 = r_4(x)$

Tehát

$$\text{lnko}(x^5 - 4x + 3, x^3 - 2x + 1) = r_3(x) = x - 1.$$

4. $f(x) = x^8 - 9x^2 = x^2(x^6 - 9) = x^2(x^3 - 3)(x^3 + 3)$

   $\mathbb{Z}[x]$-ben x^3-3 és x^3+3 irreducibilisek a Schönemann-Eisenstein kritérium alapján

   (mindkét polinomra a $p = 3$ prímszámmal lehet alkalmazni a kritériumot). Így $\mathbb{Q}[x]$-ben is irreducibilisek az előbbi harmadfokú polinomok. Tehát $f(x) = xx(x^3 - 3)(x^3 + 3)$ irreducibilis felbontás $\mathbb{Z}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben is. További felbontást kapunk $\mathbb{R}[x]$-ben az

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ és } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

   azonosságokat használva:

$$x^3 - 3 = (x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2}),$$
$$x^3 + 3 = (x + \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2}).$$

   Itt az $x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2}$ és az $x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2}$ másodfokú polinomoknak nincs valós gyöke, tehát ezek irreducibilisek $\mathbb{R}[x]$-ben.

   Az

$$f(x) = xx(x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2})(x + \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2})$$

   felbontás irreducibilis tényezőkből áll $\mathbb{R}[x]$-ben.

   Az $x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2} = 0$ egyenlet megoldásai

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \text{ és } \alpha_2 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

   Az $x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2} = 0$ egyenlet megoldásai

$$\beta_1 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \text{ és } \beta_2 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

   Az

$$f(x) = xx(x - \sqrt[3]{3})(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x + \sqrt[3]{3})(x - \beta_1)(x - \beta_2)$$

   felbontás irreducibilis tényezőkből áll $\mathbb{C}[x]$-ben.

5. $\alpha = (1,5,2)(3,8,6,9)(4,7)(10)$ a páronként diszjunkt ciklusokra való felbontás. Mivel a ciklusok között két páros hosszúságú van, ezért

$$\mathrm{sgn}(\alpha) = (-1)^{\text{páros ciklusok száma}} = (-1)^2 = 1.$$

A transzpozíciók szorzatára való felbontást

$$(1,5,2) = (1,5)(5,2) \text{ és } (3,8,6,9) = (3,8)(8,6)(6,9)$$

alapján kapjuk

$$\alpha = (1,5)(5,2)(3,8)(8,6)(6,9)(4,7).$$

6. A 6 hosszúságú ciklus elemeit $\binom{10}{6}$-féleképpen választhatjuk ki az $\{1,2,\ldots,10\}$ halmazból, de ekkor a másik 4 hosszúságú ciklus elemeit is megadtuk. Mindkét ciklus elemeit a benne található legkisebb számmal indulva kezdjük felsorolni. Így látható, hogy a kérdéses permutációk száma

$$\binom{10}{6} \cdot 5! \cdot 3!$$

DISZKRÉT MATEMATIKA első félév (70 perc)

1. Megoldható-e az alábbi egyenletet a komplex számok körében (itt $\overline{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelöli):

$$z^3 + (\overline{z})^3 = 16 - 2i$$

2. Határozzuk meg az

$$f(x) = x^6 - 4x^3 + 3 \text{ és } g(x) = x^4 - 4x + 3$$

polinomok legnagyobb közös osztóját.

3. Az $f(x) = x^7 + 27x$ polinomnak adjuk meg az irreducibilis tényezőkre való szorzattá alakítását $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben.

4. Adjuk meg az S_9-beli $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 2 & 9 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ permutáció előjelét és transzpozíciók szorzataként való előállítását.

5. Adjuk meg az összes olyan S_7-beli π permutációt, amelyre

$$\pi^{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Csoportot alkotnak-e a 2×2-es invertálható valós mátrixok (azaz a $GL_2(\mathbb{R})$ halmaz) az $A * B = AVB$ módon értelmezett $*$ szorzásra nézve? A definícióban az A, V és B mátrixok vannak összeszorozva, ahol $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ és $V \in GL_2(\mathbb{R})$ az alábbi

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elméleti kérdések

E1) Adjuk meg a binomiális formulát.
E2) Adjuk meg a komplex számokon a konjugálás műveleti tulajdonságait.
E3) A legnagyobb közös osztó értelmezése polinomokra.
E4) Az alternáló csoport definíciója.

DISZKRÉT MATEMATIKA első félév (70 perc)

1. Megoldható-e az alábbi egyenletet a komplex számok körében (itt $\overline{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelöli):

$$z^3 - (\overline{z})^3 = 16 - 2i$$

2. Határozzuk meg az

$$f(x) = x^6 - 2x^5 + 1 \text{ és } g(x) = x^4 - 2x^3 + 1$$

polinomok legnagyobb közös osztóját.

3. Az $f(x) = x^7 + 8x$ polinomnak adjuk meg az irreducibilis tényezőkre való szorzattá alakítását $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben.

4. Adjuk meg az S_9-beli $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 8 & 2 & 1 & 9 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ permutáció előjelét és transzpozíciók szorzataként való előállítását.

5. Adjuk meg az összes olyan S_7-beli π permutációt, amelyre

$$\pi^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Csoportot alkotnak-e a 2×2-es invertálható valós mátrixok (azaz a $GL_2(\mathbb{R})$ halmaz) az $A * B = AWB$ módon értelmezett $*$ szorzásra nézve? A definícióban az A, W és B mátrixok vannak összeszorozva, ahol $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ és $W \in GL_2(\mathbb{R})$ az alábbi

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elméleti kérdések

E1) Adjuk meg a három halmaz uniójának a számosságára vonatkozó szita formulát.

E2) Adjuk meg a primitív n-edik egység-gyököket $\mathbb{C}$-ben.

E3) Az irreducibilis polinomok leírása $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben.

E4) A permutáció tipusának a definíciója.

DISZKRÉT MATEMATIKA első félév (70 perc)

A

1. Hányféleképpen lehet egy lottószelvényt úgy kitölteni, hogy a megjelölt számok között van öttel osztható szám? (szokásos módon az első 90 természetes számból 5-öt jelölünk meg)

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében

$$z^7 + (2\sqrt{3} + 2i)z = 0.$$

3. Határozzuk meg az $x^5 + x + 2$ és az $x^4 + x$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

4. Irreducibilis-e a $\frac{3}{7}x^5 + \frac{8}{11}x^4 + \frac{6}{7}x^2 - \frac{6}{35}$ polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben?
   Irreducibilis-e a $\frac{3}{7}x^5 + \frac{8}{11}x^4 + \frac{6}{7}x^2 - \frac{6}{35}$ polinom $\mathbb{R}[x]$-ben?

5. Adjuk meg a $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ permutáció inverzióit. Adjuk meg γ-nak transzpozíciók szorzataként való előállítását.

6. Igazoljuk, hogy ha az $\alpha, \beta \in S_{10}$ permutációkra $\alpha^3 = \beta^3$ és $\alpha^5 = \beta^5$, akkor $\alpha = \beta$. Adjunk példát olyan α és β permutációkra, amelyekre $\alpha^5 = \beta^5$ és $\alpha \neq \beta$.

Elméleti kérdések

E1) Adjuk meg a teljes indukciós bizonyítás lépéseit.
E2) Polinomok maradékos osztása.
E3) Mit nevezünk egy permutáció inverziójának?
E4) A csoport definíciója.

Osztályzat:
3 feladat=aláírás
3 feladat+2 elmélet=2-es
4 feladat+2 elmélet=3-as
5 feladat+2 elmélet=4-es
6 feladat+2 elmélet=5-ös

DISZKRÉT MATEMATIKA első félév (70 perc)

B

1. Hányféleképpen lehet egy lottószelvényt úgy kitölteni, hogy a megjelölt számok között van hárommal osztható szám? (szokásos módon az első 90 természetes számból 5-öt jelölünk meg)

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében
$$z^6 - (2\sqrt{3} + 2i)z = 0.$$

3. Határozzuk meg az $x^5 + x^2$ és az $x^4 + x^2 - 2$ polinomok legnagyobb közös osztóját.

4. Irreducibilis-e a $\frac{2}{7}x^5 + \frac{9}{11}x^4 + \frac{6}{7}x^2 - \frac{6}{35}$ polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben?
   Irreducibilis-e a $\frac{2}{7}x^5 + \frac{9}{11}x^4 + \frac{6}{7}x^2 - \frac{6}{35}$ polinom $\mathbb{R}[x]$-ben?

5. Adjuk meg a $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ permutáció inverzióit. Adjuk meg γ-nak transzpozíciók szorzataként való előállítását.

6. Igazoljuk, hogy ha az $\alpha, \beta \in S_{10}$ permutációkra $\alpha^3 = \beta^3$ és $\alpha^7 = \beta^7$, akkor $\alpha = \beta$. Adjunk példát olyan α és β permutációkra, amelyekre $\alpha^7 = \beta^7$ és $\alpha \neq \beta$.

Elméleti kérdések

E1) Adjuk meg a komplex szám trigonometrikus alakjának az értelmezését.
E2) Adjuk meg a primitív n-edik egység-gyököket $\mathbb{C}$-ben.
E3) Az Euklidészi algoritmus polinomokra.
E4) A permutáció előjelének a definíciója.

Osztályzat:
3 feladat=aláírás
3 feladat+2 elmélet=2-es
4 feladat+2 elmélet=3-as
5 feladat+2 elmélet=4-es
6 feladat+2 elmélet=5-ös

MEGOLDÁSOK (A)

A1.) 1-től 90-ig 18 darab öttel osztható és $90-18=72$ darab öttel nem osztható szám van, ezért a válasz

$$\binom{90}{5}-\binom{72}{5}.$$

A2.) Ha $z^7+(2\sqrt{3}+2i)z=0$, akkor vagy $z=0$, vagy

$$z^6+(2\sqrt{3}+2i)=0.$$

Tehát

$$z=\sqrt[6]{-2\sqrt{3}-2i}=\sqrt[6]{4(\cos 210^\circ+\sin 210^\circ)}=$$

$$\sqrt[6]{4}(\cos(35^\circ+k\cdot 60^\circ)+\sin(35^\circ+k\cdot 60^\circ)),\ \ k=0,1,2,3,4,5$$

A3.)

$$\begin{array}{l}
x^5+x+2:x^4+x=x \\
\underline{-(x^5+x^2)} \\
-x^2+x+2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x^4+x:-x^2+x+2=-x^2-x-3 \\
\underline{-(x^4-x^3-2x^2)} \\
x^3+2x^2+x \\
\underline{-(x^3-x^2-2x)} \\
3x^2+3x \\
\underline{-(3x^2-3x-6)} \\
6x+6
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-x^2+x+2:6x+6=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{3} \\
\underline{-(-x^2-x)} \\
2x+2 \\
\underline{-(2x+2)} \\
0
\end{array}$$

Az utolsó nem zérus maradék a legnagyobb közös osztó:

$$\text{lnko}(x^5+x+2,x^4+x)=6x+6\sim x+1$$

A4.) Az $f(x) = \frac{3}{7}x^5 + \frac{8}{11}x^4 + \frac{6}{7}x^2 - \frac{6}{35}$ polinom pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, amikor a

$$g(x) = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot f(x) = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot x^5 + 8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^4 + 6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot x^2 - 6 \cdot 11$$

polinom. Mivel $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $g(x)$-re alkalmazható a Schönemann-Eisenstein kritérium a $p = 2$ prímszámmal, ezért $g(x)$ irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben. Így a Gauss lemma szerint $g(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben is. Tehát $f(x)$ is irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben. Mivel $\deg(f(x)) = 5 > 2$, ezért $f(x)$ nem irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben.

A5.) Az inverziók halmaza

$$\mathrm{Inv}(\gamma) = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le 6 \text{ és } \gamma(j) < \gamma(i)\} =$$

$$\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}.$$

$$\gamma = (1,5,2,6) \circ (3,4) = (1,5) \circ (5,2) \circ (2,6) \circ (3,4).$$

A6.) $\alpha^3 = \beta^3$ következménye

$$\alpha^6 = \left(\alpha^3\right)^2 = \left(\beta^3\right)^2 = \beta^6$$

és $\alpha^5 = \beta^5$ következménye

$$\alpha^{-5} = \left(\alpha^5\right)^{-1} = \left(\beta^5\right)^{-1} = \beta^{-5}.$$

Tehát

$$\alpha = \alpha^6 \circ \alpha^{-5} = \beta^6 \circ \beta^{-5} = \beta.$$

Az $\alpha = (1,2,3,4,5) \in S_{10}$ ciklikus permutációra $\alpha^5 = \beta^5$ és $\alpha \neq \beta$, ahol $\beta = 1$ az identikus permutáció.

MEGOLDÁSOK (B)

B1.) 1-től 90-ig 30 darab hárommal osztható és $90 - 30 = 60$ darab hárommal nem osztható szám van, ezért a válasz

$$\binom{90}{5} - \binom{60}{5}.$$

B2.) Ha $z^7 - (2\sqrt{3} + 2i)z = 0$, akkor vagy $z = 0$, vagy

$$z^6 - (2\sqrt{3} + 2i) = 0.$$

Tehát

$$z = \sqrt[6]{2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt[6]{4(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ)} =$$

$$\sqrt[6]{4}(\cos(5^\circ + k \cdot 60^\circ) + \sin(5^\circ + k \cdot 60^\circ)),\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

B3.)

$$\begin{array}{l} x^5 + x^2 : x^4 + x^2 - 2 = x \\ \underline{-(x^5 + x^3 - 2x)} \\ -x^3 + x^2 + 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^4 + x^2 - 2 : -x^3 + x^2 + 2x = -x - 1 \\ \underline{-(x^4 - x^3 - 2x^2)} \\ x^3 + 3x^2 - 2 \\ \underline{-(x^3 - x^2 - 2x)} \\ 4x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x^3 + x^2 + 2x : 4x^2 + 2x - 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{8} \\ \underline{-(-x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x)} \\ \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \\ \underline{-(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4})} \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4x^2 + 2x - 2 : \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = \frac{16}{3}x - \frac{8}{3} \\ \underline{-(4x^2 + 4x)} \\ -2x - 2 \\ \underline{-(-2x - 2)} \\ 0 \end{array}$$

Az utolsó nem zérus maradék a legnagyobb közös osztó:

$$\text{lnko}(x^5 + x^2, x^4 + x^2 - 2) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \sim x + 1$$

B4.) Az $f(x) = \frac{2}{7}x^5 + \frac{9}{11}x^4 + \frac{6}{7}x^2 - \frac{6}{35}$ polinom pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, amikor a

$$g(x) = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot f(x) = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot x^5 + 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^4 + 6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot x^2 - 6 \cdot 11$$

polinom. Mivel $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $g(x)$-re alkalmazható a Schönemann-Eisenstein kritérium a $p = 3$ prímszámmal, ezért $g(x)$ irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben. Így a Gauss lemma szerint $g(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben is. Tehát $f(x)$ is irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben. Mivel $\deg(f(x)) = 5 > 2$, ezért $f(x)$ nem irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben.

B5.) Az inverziók halmaza

$$\mathrm{Inv}(\gamma) = \{(i, j) \mid 1 \le i < j \le 7 \text{ és } \gamma(j) < \gamma(i)\} =$$

$\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),$
$(4,5),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)\}$.

$$\gamma = (1,6,2,7) \circ (3,5) = (1,6) \circ (6,2) \circ (2,7) \circ (3,5).$$

B6.) $\alpha^3 = \beta^3$ következménye

$$\alpha^{-6} = \left(\alpha^3\right)^{-2} = \left(\beta^3\right)^{-2} = \beta^{-6}$$

és $\alpha^7 = \beta^7$. Tehát

$$\alpha = \alpha^7 \circ \alpha^{-6} = \beta^7 \circ \beta^{-6} = \beta.$$

Az $\alpha = (1,2,3,4,5,6,7) \in S_{10}$ ciklikus permutációra $\alpha^7 = \beta^7$ és $\alpha \neq \beta$, ahol $\beta = 1$ az identikus permutáció.