Analízis I

<table>
<tr><td>Tárgynév:</td><td colspan="8">Analízis I</td></tr>
<tr><td>Rövid név:</td><td colspan="4">Analízis I</td><td colspan="2">Kód:</td><td colspan="2">GEMAN114-B</td></tr>
<tr><td>Angol név:</td><td colspan="8">Analysis I</td></tr>
<tr><td>Tanszék:</td><td colspan="8">Analízis Tanszék</td></tr>
<tr><td>Tárgyfelelős:</td><td colspan="8">Rakaczki Csaba</td></tr>
<tr><td>Előtanulmányok:</td><td colspan="4"></td><td colspan="2">Kódja:</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Kredit:</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Követelmény:</td><td colspan="4">aláírás+kollokvium</td></tr>
<tr><td>Heti óraszámok:</td><td>Előadás:</td><td colspan="2">2</td><td>Gyakorlat:</td><td>2</td><td colspan="2">Labor:</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Oktatási cél:</td><td colspan="8">A matematika alapjainak elsajátítása.</td></tr>
<tr><td>Tárgy tartalom:</td><td colspan="8">Halmazelmélet, relációk, függvények, értelmezési tartomány, értékkészlet, sorozatok, sorozatok határértéke, egyváltozós valós függvények határértéke, folytonossága, nevezetes görbék, differenciálszámítás és alkalmazásai, függvényvizsgálat, határozatlan integrálszámítás, integrálási szabályok. A határozott integrál és alkalmazásai, impropius integrál.</td></tr>
<tr><td>Irodalom:</td><td colspan="8">Dr. Szarka Zoltán-Dr. Raisz Péterné Dr. Matematika I (egyetemi tankönyv)
Dr. Szarka Zoltán-Dr. Raisz Péterné Dr. Matematika II (egyetemi tankönyv)
Dr. Szarka Zoltán-Dr. Kovács Béla Matematika Példatár I (egyetemi tankönyv)
Dr. Szarka Zoltán-Dr. Kovács Béla Matematika Példatár II (egyetemi tankönyv)</td></tr>
<tr><td colspan="9"></td></tr>
<tr><td colspan="9">Jellemző oktatási módok:</td></tr>
<tr><td>Oktatási nyelv:</td><td colspan="8">Magyar</td></tr>
<tr><td>Előadás:</td><td colspan="8">Minden hallgatónak előadás, tábla használatával</td></tr>
<tr><td>Gyakorlat:</td><td colspan="8">Tantermi gyakorlatok, táblahasználat</td></tr>
<tr><td>Labor:</td><td colspan="8">-</td></tr>
<tr><td>Évközi feladatok, zárthelyik:</td><td colspan="8">Egy évközi zárthelyi dolgozat.</td></tr>
<tr><td>Lezárási feltételek:</td><td colspan="8">Gyakorlatokon aktív részvétel; az évközi zárthelyi dolgozat eredményes (legalább 50%) megírása. A zárthelyi dolgozatok csak feladatokat tartalmaznak. A vizsga írásbeli lesz. A dolgozat az előadásokon elhangzott matematikai képletek számonkérésével kezdődik, a dolgozatokat csak akkor javítjuk ki, ha az első feladatban megkérdezett képletek legalább 50%-a helyes!!! A gyakorlati aláírás feltétele, hogy a hallgató legfeljebb három előadásról hiányozhat!!!</td></tr>
</table>

Ütemterv

1. hét	Halmazok, halmazelméleti alapfogalmak, műveletek halmazokkal, De Morgan-féle azonosságok. Descartes szorzat, Relációk, értelmezési tartomány, értékkészlet. Inverz reláció. Függvények.
2. hét	Teljes indukció példákkal. Számtani és mértani közepek, a köztük lévő egyenlőtlenség bizonyítással, sorozatok definíciója, monotonitása, korlátossága példákkal.
3. hét	Sorozat határértékének definíciója, küszöbszám keresés. Műveletek konvergens sorozatokkal, határérték kapcsolata a korlátossággal és monotonitással, rendőr-elv, nevezetes sorozatok határértéke.
4. hét	Egyváltozós valós függvények, függvények tulajdonságai, valós függvények határértéke (véges pontban, a végtelenben). Műveletek és a határérték. Nevezetes határértékek.
5. hét	Valós függvények folytonossága, folytonosság és a műveletek kapcsolata, összetett függvény, összetett függvény folytonossága, függvények differenciahányadosa és differenciálhányadosa, az érintő egyenes egyenlete, deriválási szabályok (összeg, különbség, szorzat, hányados, összetett függvények).
6. hét	x hatvány, konstans függvény, szinusz, koszinusz, tangens, kotangens függvények deriváltjai. Inverz függvény definíciója, grafikonja az eredeti függvény grafikonjából, inverz függvény deriválási szabálya.
7. hét	Exponenciális függvény és inverze, trigonometrikus függvények és inverzeik, valamint ezen függvények deriváltjai, hiperbolikus függvények és deriváltjuk, arkusz függvények és deriváltjaik.
8. hét	Area függvények és deriváltjaik. Valós függvények helyi minimuma, maximuma, szélsőérték helyeik. Valós függvények monotonitása, konvexitása, inflexiós pontja. Monotnitás és a derivált kapcsolata, szélsőérték hely és a derivált kapcsolata.
9. hét	Magasabb rendű deriváltak, lehetséges inflexiós pontok, konvexitás kapcsolata a második deriváltakkal. Teljes függvényvizsgálat példákkal. Szöveges szélsőérték feladatok.
10.hét	A differenciálszámítás középértéktételei (Rolle, Lagrange, Cauchy) L'Hospital szabályok és az ilyen típusú határértékekre visszavezethető függvények határértékei példákkal. Primitív függvény definíciója, függvény határozatlan integrálja, összeg, különbség, függvény konstans szorosának határozatlan integrálja.
11. hét	Alapintegrálok, integrálási szabályok, parciális integrálás, helyettesítéses integrálás példákkal, linearizáló formulák trigonometrikus és hiperbolikus függvények esetén, néhány irracionális függvény integrálása.
12. hét	f(cos(x))sin(x), f(sin(x))cos(x), $\sin^{(2k+1)}(x)$, $\cos^{(2k+1)}(x)$ alakú integrálok, racionális törtfüggvények, racionális törtfüggvények parciális törtekre való felbontása, a parciális törtek integrálása.
13. hét	e^x racionális törtfüggvényeinek, cos(x), sin(x) racionális törtfüggvényeinek integrálása. A határozott integrál fogalmának bevezetése, definíciója, kiszámítása a Newton-Leibniz formulával.
14. hét	A határozott integrál és a műveletek, parciális és helyettesítéses integrál határozott integrálok esetén, a határozott integrál alkalmazásai: terület, két görbe által közrezárt rész területe, Forgástest térfogatának, felszínének számítása határozott integrállal, görbe ívhosszának számítása integrálszámítással. Improprius integrálok.

Miskolc, 2019. szeptember 5.

Dr. Rakaczki Csaba

1.

Analízis I
2018.12.20

Név:................................ NEPTUN KÓD:..........................
Aláírás:..............................

1) Adjuk meg az alábbi képleteket! [16p]

a) Definiálja egy $f \subset A \times B$ reláció értelmezési tartományát!

$$D_f =$$

b) Adja meg a parciális integrálás szabályát határozatlan integrálokra vonatkozóan!

c) Adja meg az inverz függvény differenciálási szabályát!

$$\left(f^{-1}(x)\right)' =$$

d) Adjuk meg az alábbi nevezetes határértékeket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \qquad , \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x =$$

e) Adja meg az alábbi függvények grafikonját!

$$f(x) = \arcsin(x), \qquad g(x) = \mathrm{cth}(x)$$

f) Adja meg az alábbi integrálási szabályt!

$$\int f(\cos x)\sin x dx =$$

g) Adja meg az alábbi alapintegrálokat!

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \qquad , \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

h) Adja meg az alábbi függvények deriváltját!

$$(\log_a x)' = \qquad , (2^x)' =$$

2) Legyen $x > 0$ valós szám. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy bármely n természetes szám esetén

$$x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0 \quad ! \quad [14p]$$

3) Számítsuk ki az alábbi deriváltakat! [16p]

$$(2 \cdot \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{cth}x)' =$$

$$((x+1)^x)' =$$

$$\left(\frac{\mathrm{ctg}x}{3^x + 2}\right)' =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \mathrm{tg}x\right)' =$$

5) Számítsuk ki az alábbi határértékeket! [18p]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 3x} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{5x}\right)^x =$$

$$\lim_{x\to 0+0} x \cdot \ln x =$$

6) Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat! [20p]

$$\int \frac{1}{\sin x} dx =$$

$$\int (\cos x)^2 dx =$$

$$\int \frac{x-11}{(x+1)(x-3)} dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13} dx =$$

$$\int \frac{2}{x \cdot \ln x} dx$$

Akinek az 1)-es feladatban nincs meg 8 pontja, annak a vizsgája elégtelen! Értékelés: 0p-49p elégtelen; 50p-61p elégséges; 62p-74p közepes; 75p-88p jó; 89p-100p jeles

1.

Analízis I
pótlap

Név:.................................. NEPTUN KÓD:............................
Aláírás:..............................

4) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen! [16p]

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3}$$

31p

EREDMÉNYHIRDETÉS 12^{30}

1.

Analízis I
2018.12.20

Név:............................... NEPTUN KÓD:..........................
Aláírás:..............................

1) Adjuk meg az alábbi képleteket! [16p]

a) Definiálja egy $f \subset A \times B$ reláció értelmezési tartományát!

$D_f = \{ x \in A \mid \exists\, y \in B$ úgy, hogy $(x,y) \in f \}$ (2p)

b) Adja meg a parciális integrálás szabályát határozatlan integrálokra vonatkozóan!

$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$ (2p)

c) Adja meg az inverz függvény differenciálási szabályát!

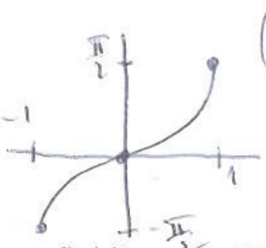
$(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ (2p)

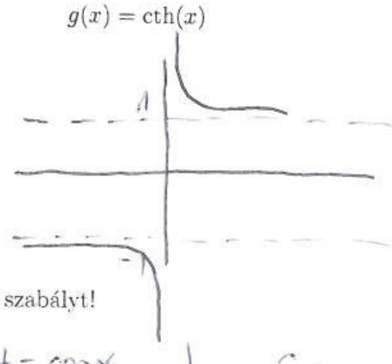
d) Adjuk meg az alábbi nevezetes határértékeket:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (1p), $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$ (1p)

e) Adja meg az alábbi függvények grafikonját!

$f(x) = \arcsin(x)$, (1p) $g(x) = \mathrm{cth}(x)$ (1p)





f) Adja meg az alábbi integrálási szabályt!

$\int f(\cos x)\sin x\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ \frac{dt}{dx} = -\sin x \end{array} \right| = \int f(t)(-1)\,dt$ (2p)

g) Adja meg az alábbi alapintegrálokat!

$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \mathrm{arch}\, x + C$, $\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \mathrm{arsh}\, x + C$ (1p)

h) Adja meg az alábbi függvények deriváltját!

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ (1p), $(2^x)' = 2^x \ln 2$ (1p)

2) Legyen $x > 0$ valós szám. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy bármely n természetes szám esetén

$$x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0 \quad ! \quad [14p]$$

$n=1$ esete $\quad x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ (2p)

IF T/h valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $\quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$ (2p) $\quad / \cdot x$

$x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx \geq 0$ (2p)

$n+1$ esete

? $\quad x^{n+2} - (n+1)x + n+1 \geq 0$ (2p)

$x^{n+2} - (n+1)x + n+1 = x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx + (n+1)x^2 - nx - (n+2)x + n+1 =$ (2p)

$= x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx + (n+1)(x^2 - 2x + 1)$ (2p)

$= \underbrace{x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx}_{\text{IF } \geq 0} + \underbrace{(n+1)(x-1)^2}_{\geq 0}$ (2p)

3) Számítsuk ki az alábbi deriváltakat! [16p]

$(2 \cdot \text{ch}x \cdot \text{cth}x)' = \quad 2\,\text{sh}x \cdot \text{cth}x + 2\,\text{ch}x \left(-\frac{1}{\text{sh}^2 x}\right)$ (4p)

$((x+1)^x)' = \quad (x+1)^x \left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right)$ (4p)

$h(x) := (x+1)^x \quad / \ln$

$\ln(h(x)) = x \ln(x+1) \Rightarrow \frac{1}{h(x)} h'(x) = \ln(x+1) + x \frac{1}{x+1}$

$\left(\frac{\text{ctg}x}{3^x + 2}\right)' = \quad \dfrac{-\frac{1}{\sin^2 x}(3^x + 2) - \text{ctg}x \cdot 3^x \ln 3}{(3^x+2)^2}$ (4p)

$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \text{tg}x\right)' = \quad \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} - \text{tg}x\right)' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2} - \frac{1}{\cos^2 x}$

(4p)

1.

Analízis I
pótlap

Név:.............................. NEPTUN KÓD:..........................
Aláírás:..............................

4) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen! [16p]

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$D_f = \mathbb{R}$ (1p)

$R_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{96} \}$ (1p)

ZH $x^3\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) = 0$ Y tengely $f(0)=0$ -ban (1p)

$x = 0 \quad x = \frac{2}{3}$ (1p)

$f'(x) = \frac{4}{2}x^3 - \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = 2x^3 - x^2$ (1p) $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(2x-1) = 0$

$x = 0 \quad x = \frac{1}{2}$ (1p)

	$x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
	Sz. m. ↘		Sz. m. ↘	lok. min	Sz. m. ↗

(2p)

$f''(x) = 6x^2 - 2x$ (1p) $f''(x) = 0 \quad 2x(3x-1)$

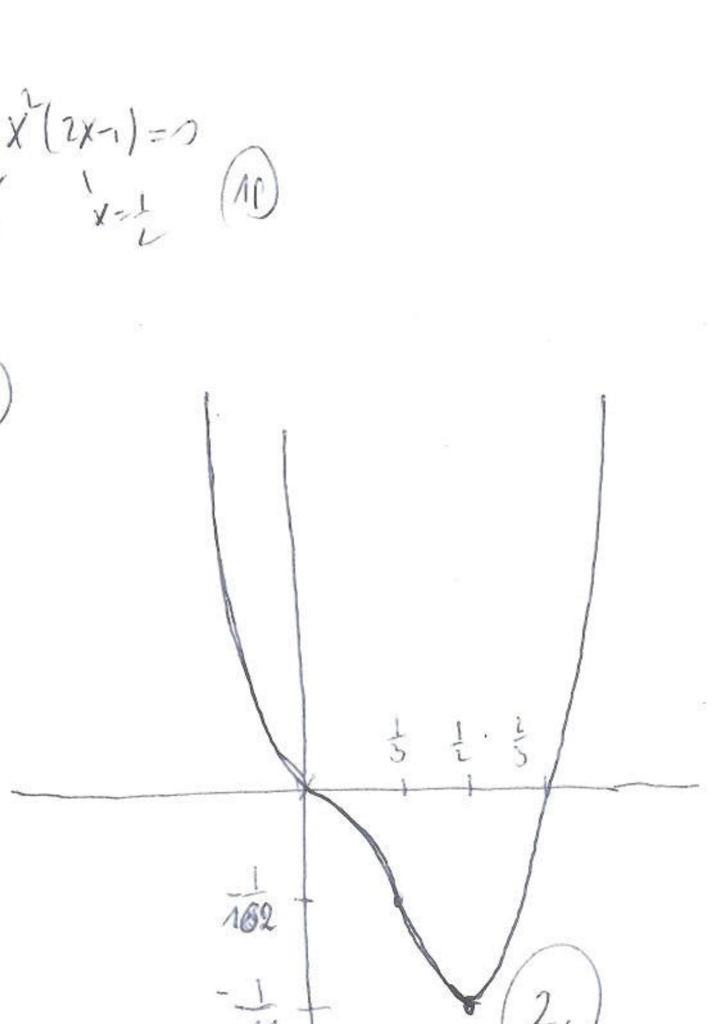
$x = 0 \quad x = \frac{1}{3}$ (1p)

	$x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{1}{3}$	$x=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	KONVEX	INF PONT	KONKÁV	INF PONT	KONVEX

(2p)

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (1p)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (1p)



5) Számítsuk ki az alábbi határértékeket! [18p]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}$$ 3,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{-x^2+3x} = \lim_{x\to 3}\frac{2x-5}{-2x+3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$ 3,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^{-2}} = e^{+3}$$ 3,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1+0 = 1$$ 3,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{5x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-\frac{3}{5}}{x}\right)^x = e^{-\frac{3}{5}}$$ 3,

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} -x = 0$$ 3,

6) Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat! [20p]

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \left| \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & \end{array} \right| = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt =$$

4p

$$= \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int (\cos x)^2 dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + C$$ 4p

$$\int \frac{x-11}{(x+1)(x-3)}dx = \int \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-3}dx = 3\ln|x+1| - 2\ln|x-3| + C$$ 4p

$$\frac{x-11}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(A+B)x - 3A + B}{(x+1)(x-3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ -3A+B=-11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4A=12 \\ A=3 \\ B=-2 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+9}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}dx = \left| \begin{array}{ll} t = \frac{x+2}{3} & \frac{dx}{dt} = 3 \\ x = 3t-2 & \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{t^2+1}3dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C$$ 4p

$$\int \frac{2}{x \cdot \ln x}dx$$

$$= 2\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = 2\ln|\ln x| + C$$

4p

Akinek az 1)-es feladatban nincs meg 8 pontja, annak a vizsgája elégtelen! Értékelés: 0p-49p elégtelen; 50p-61p elégséges; 62p-74p közepes; 75p-88p jó; 89p-100p jeles