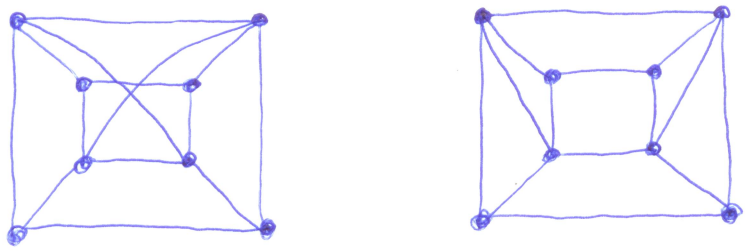
GEMAN116-B
Ütemterv a Diszkrét Matematika II. BSc. tárgyból (2019/2020)
(Programozó informatikus, Gazdaság informatikus és Villamosmérnök szak)
(2 óra előadás+2 óra gyakorlat)

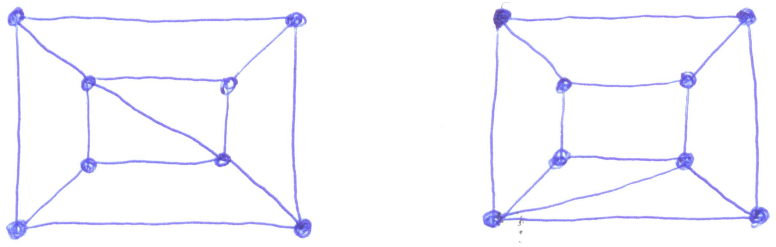
1. Rendezési relációk: láncok, antiláncok, Dilworth tétele.
2. Rendezési relációk: antiláncok a véges hatvány halmazban, Sperner tétele.
3. Rendezési relációk: lineáris kiterjesztések és azok metszete, Szpilrajn tétele.
4. Hálók: a kétféle értelmezés ekvivalenciája.
5. Moduláris és disztributív hálók, komplementer elem, Boole-hálók.
6. Algebrai struktúrák: félcsoport, csoport, gyűrű, test.
7. Csoportok: részcsoport, normális részcsoport, mellékosztályok, Lagrange tétele.
8. Gráfok: fokszám, csatlakozó élsorozat, út, kör, összefüggő komponensek, részgráfok, komplementer, izomorfia.
9. Gráfok: fa és erdő, faváz, súlyozott élek, mohó algoritmus.
10. Gráfok: kromatikus szám, kétrészes gráfok jellemzése.
11. Gráfok: párosítás, teljes párosítás, König-Hall tétel, Tutte tétele.
12. Gráfok: Hamilton kör, Dirac és Ore tételei.
13. Gráfok: Euler séta, Euler körséta.
14. Gráfok: síkba rajzolható gráfok, Kuratowski tétele, Euler féle poliéder tétel.

Tantárgyi követelmények
A tárgy lezárásának a módja: aláírás + vizsga.
A félév elismerésének (az aláírás megszerzésének) feltételei: kettő félévközi zárthelyi dolgozat legalább elégséges szinten való teljesítése (külön-külön).
A dolgozatok időtartama maximum 70 perc, időpontja a 7. és 12. hétre tervezett – a tanulókör kérésére 1 héttel eltolható. Az értékelés módja: az elégséges osztályzat eléréséhez legalább az összpontszám 40 százaléka szükséges.
A sikertelen vagy meg nem írt zárthelyi/teszt pótlása a 14. héten vagy az összes érintett hallgató által kért héten történik, egyéb feltétele a pótlásnak nincs.
A vizsgák kötelező írásbeli részből és egy opcionális szóbeli részből állnak. A szóbeli vizsgán csupán a legalább 4–es osztályzatot elért hallgatók vehetnek részt.
Az írásbeli vizsga időtartama 70 perc. Az elégséges osztályzat megszerzéséhez az írásbeli összpontszámának legalább a 40 százaléka szükséges.
A tárgy jegyzője: Szigeti Jenő

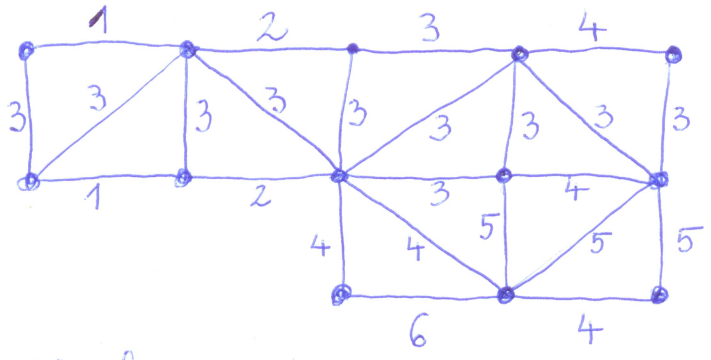
1. Izomorfak-e az alábbi gráfok?



2. Izomorfak-e az alábbi gráfok?

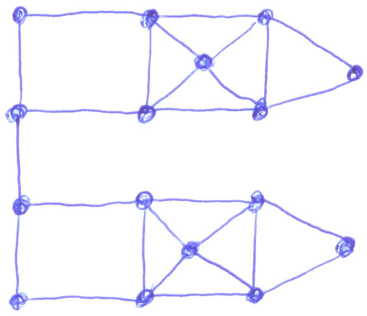


3. Keressünk minimális költségű feszítőfát az alábbi gráfban a mohó algoritmussal.



4. Adjunk meg olyan síkba rajzolható gráfot, amelyben
(1) minden csúcs fokszáma 3,
(2) minden csúcs fokszáma 4,
(3) minden csúcs fokszáma 5.
Létezik-e olyan síkba rajzolható gráf, amelyben minden csúcs fokszáma 6?

5. (1) Létezik-e teljes párosítás az alábbi gráfban?
(2) Létezik-e Hamilton kör az alábbi gráfban?



6. Adjuk meg az

$$(x_1x_2 + x_3)^2(x_2+x_3)(3x_1x_2 + x_3^2)$$

szorzat polinom lexikografikusan első (legnagyobb) monomját.

7. Adjuk meg az

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2)^3 + (x_1+x_3)^3 + (x_2+x_3)^3$$

szimmetrikus polinomot az elemi szimmetrikus polinomokkal (azok polinomjaként)

A. Teljes párosítás.
B. Gráfok izomorfizmusa.
C. Dirac tétele.
D. Hilbert nullhely tétele.
E. Kuratowski tétele a síkba rajzolhatóságról.

1. Az öt nevezetes klón.

   Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan klón, amely tartalmazza az $f(x, y, z) = 1 + xyz$ háromváltozós Boole függvényt. Igazoljuk, hogy $\mathcal{C}$ tartalmazza az összes Boole függvényt.

2. A projekció fogalma.

   Igazoljuk, hogy két klón közös része (metszete) is klón. Miben különbözik egymástól $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{M}$ és $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{M}$.

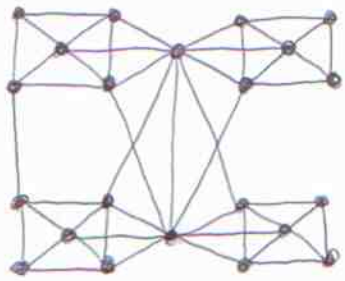
3. Boole függvény Zsegalkin polinomja.

   Adjuk meg azon háromváltozós Boole függvények számát, amelyekre $f(x, y, z) = f(z, y, x)$ teljesül tetszőleges $x, y, z \in \{0, 1\}$ esetén. Hogyan nézhet ki egy ilyen Boole függvény Zsegalkin polinomja?

4. A csúcsok V halmazán adott $\Gamma_1 = (V, E_1)$ és $\Gamma_2 = (V, E_2)$ kétrészes gráfokra igazoljuk, hogy a belőlük az élek uniójával képzett $\Gamma = (V, E_1 \cup E_2)$ gráf kromatikus száma legfeljebb négy.

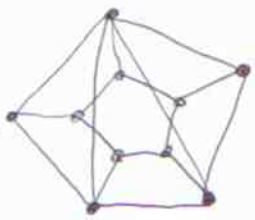
5. Teljes párosítás.

   Létezik-e teljes párosítás az alábbi gráfban?



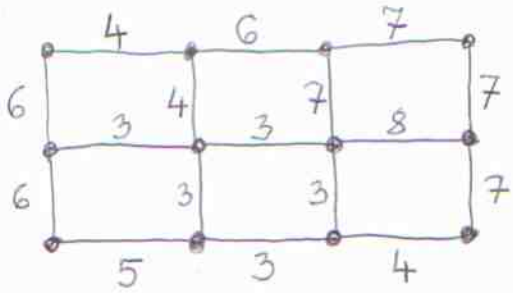
6. Topológikusan izomorf gráfok.

   Síkba rajzolható-e az alábbi gráf?



7. A mohó algoritmus.

   Adjuk meg az összes minimális feszítő fát az alábbi gráfban.



A

1. Adjuk meg az $f(x,y,z) = x \vee y \vee z$ Boole függvény Zsegalkin polinom alakját. Vizsgáljuk meg az f „nevezetes" tulajdonságait.

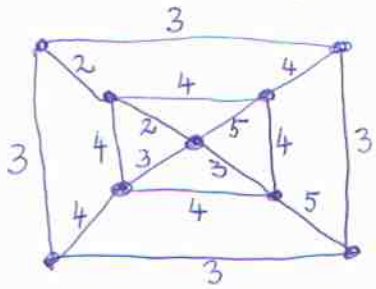
2. Hány eleme van az $\mathcal{L}^{(n)} \cap \mathcal{P}_0^{(n)}$ halmaznak?

3. Igazoljuk, hogy $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_0 = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_1$.

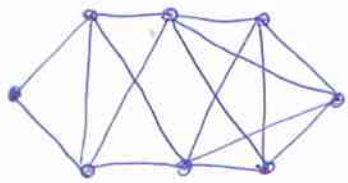
4. Igazoljuk, hogy ha $|E| \geq |V|$, akkor a $\Gamma = (V, E)$ gráfban van kör.

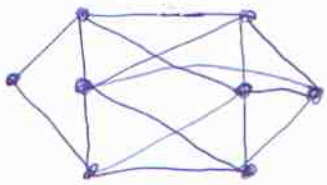
5. Igazoljuk, hogy ha $\Gamma = (V, E)$ gráf nem tartalmaz K_6-ot, akkor $|E| \leq \frac{2}{5}|V|^2$ (azt már tudjuk, hogy $K_5 \not\subseteq \Gamma$ esetén $|E| \leq \frac{3}{8}|V|^2$).

6. Keressünk minimális költségű feszítő-fát az alábbi gráfban.



7. Izomorfak-e az alábbi gráfok?





A

1. Lineáris Boole függvény.

Az $f(x,y,z)$ és $g(x,y,z)$ háromváltozós lineáris Boole függvények szorzata mikor lehet lineáris?

2. Monoton Boole függvény.

Adjuk meg $M^{(3)} \cap L^{(3)}$ elemeit, azaz a háromváltozós monoton és lineáris Boole függvényeket.

3. Önduális Boole függvény.

Önduális-e az $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ ötváltozós Boole függvény?

4. Komplementer gráf.

Lehet-e egy gráf izomorf a saját komplementerével?

5. Összefüggő komponens gráfban.

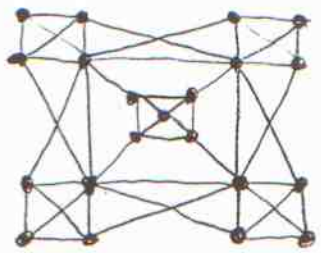
Igazoljuk, hogy egy összefüggő gráfból egy élnek az elhagyásával olyan gráfot kapunk, amelyben az összefüggő komponensek száma legfeljebb kettő.

6. Kromatikus szám.

A csúcsok V halmazán adott a $\Gamma_1 = (V, E_1)$ és $\Gamma_2 = (V, E_2)$ kétrészes gráf. Igazoljuk, hogy a $\Gamma = (V, E_1 \cup E_2)$ gráf kromatikus száma legfeljebb 4.

7. Út és kör gráfban.

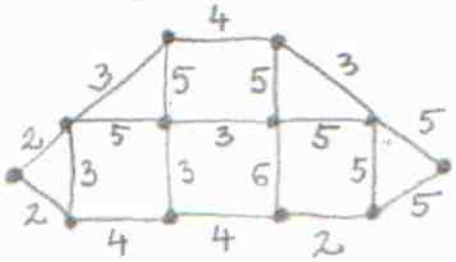
Létezik-e Hamilton kör az alábbi gráfban?



B

1. Izomorfak-e az alábbi gráfok?

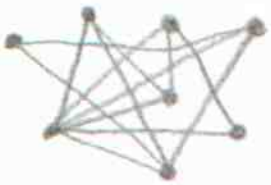
2. Adjuk meg az összes minimális súlyú feszítőfát.



3. Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 15$ és $|E| \geq 57$. Igazoljuk, hogy Γ kromatikus száma legalább 3.

4. Létezik-e teljes párosítás az alábbi gráfban?

5. Síkba rajzolható-e az alábbi gráf?



6. Adjuk meg a Zsegalkin polinomját annak az $f(x,y,z)$ Boole függvénynek, amelyre $f(0,1,0)=0$ és a függvényértéke minden más helyen 1.

7. Adjuk meg az n-változós lineáris Boole függvények számát.

1. Vizsgáljuk meg az $f(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ Boole függvény „nevezetes" tulajdonságait.

2. Határozzuk meg az $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ elemeit, azaz adjuk meg az összes olyan Boole függvényt, amely lineáris és monoton.

3. Igazoljuk, hogy ha egy kétváltozós f Boole függvényre az

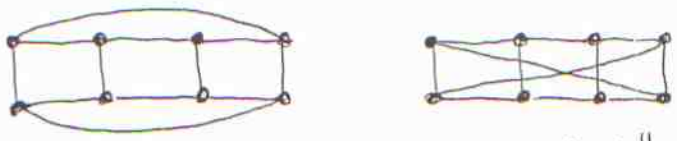
$$f(x,y) + f(\bar{x},y) + f(x,\bar{y}) + f(\bar{x},\bar{y}) = 1$$

egyenlőség teljesül minden $x,y \in \{0,1\}$ esetén, akkor f nem lehet önduális. Hány ilyen f Boole függvény van?

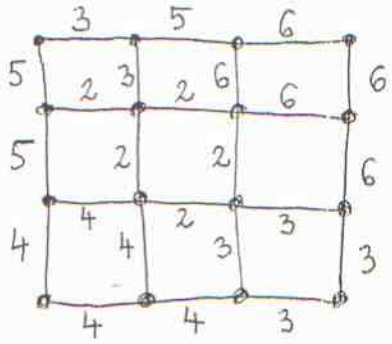
4. Hány éle van a $K_{4,6,6,16}$ teljes négyrészes gráfnak? Létezik-e Hamilton kör ebben a gráfban?

5. A K_n teljes gráf minden élének adunk egy irányítást (nyilat helyezünk az élre). Igazoljuk, hogy az így keletkezett irányított gráfban létezik olyan irányított út, ami az összes csúcsot tartalmazza.

6. Izomorfak-e az alábbi gráfok?



7. Keressünk minimális „költségű" feszítő fát az alábbi gráfban.

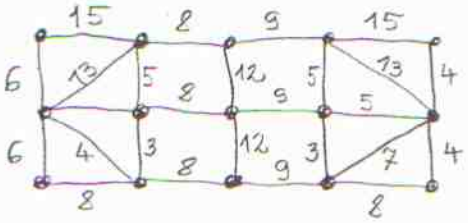


B

1. Az alábbi gráfok között vannak-e egymással izomorfak és nem izomorfak.

2. Létezik-e a $K_{10,15,25,25}$ teljes négyrészes gráfban Hamilton kör? Létezik-e teljes párosítás?

3. Adjuk meg az összes minimális költségű feszítőfát.



4. Adjuk meg a háromváltozós 1-őrző és önduális Boole függvények számát.

5. Az $f(x_1,x_2,x_3)$ háromváltozós Boole függvényt a következő módon adjuk meg: $f(0,0,0)=f(0,1,0)=f(1,1,0)=1$ és $f(x,y,z)=0$ minden más helyen. Adjuk meg ennek a Boole függvénynek a nevezetes tulajdonságait.

6. Igazoljuk, hogy a négyváltozós monoton Boole függvények száma legalább 2^6.

D1 Az Euler kör.

D2 Ore tétele.

D3 Az összefüggő gráf.

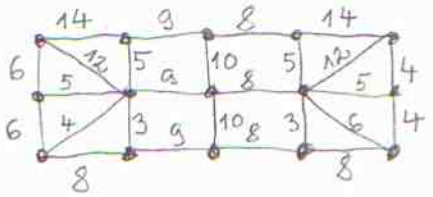
D4 A monoton Boole függvény.

(A)

(1.) Az alábbi gráfok között vannak-e egymással izomorfak és nem izomorfak.

(2.) Létezik-e a $K_{10,15,20,25}$ teljes négyrészes gráfban Hamilton kör? Létezik-e teljes párosítás?

(3.) Adjuk meg az összes minimális költségű feszítőfát.



(4.) Adjuk meg a háromváltozós 0-őrző és önduális Boole függvények számát.

(5.) Az $f(x_1, x_2, x_3)$ háromváltozós Boole függvényt a következő módon adjuk meg: $f(0,0,0) = f(0,1,0) = f(1,1,0) = 0$ és $f(x,y,z) = 1$ minden más helyen. Adjuk meg ennek a Boole függvénynek a nevezetes tulajdonságait.

(6.) Igazoljuk, hogy a négyváltozós monoton Boole függvények száma legalább 2^6.

(D1) A Hamilton kör.

(D2) König-Hall tétel.

(D3) A kromatikus szám.

(D4) Az önduális Boole függvény.

B

1. Az $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ halmazon adottak az

$\alpha = \{(4,5),(2,4),(4,3),(5,2),(1,2)\}$ és a

$\beta = \{(2,5),(5,4),(4,3),(1,3),(3,2)\}$ bináris relációk.

Adjuk meg α és β gráfjait.

Számoljuk ki az $\alpha \cap (\beta \circ \beta)$ relációt.

2. A $\Gamma = (V, E)$ egyszerű gráfban $|V| = 8$ és $|E| = 19$.

Igazoljuk, hogy Γ nem páros (kétrészes) gráf.

Összefüggő-e a Γ gráf?

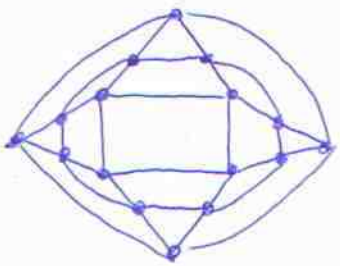
3. Létezik-e Hamilton kör a $K_{9,9,10,10}$ teljes négyrészes gráfban?

4. Létezik-e az alábbi gráfban

a) Euler séta vagy körséta?

b) Hamilton út vagy kör?

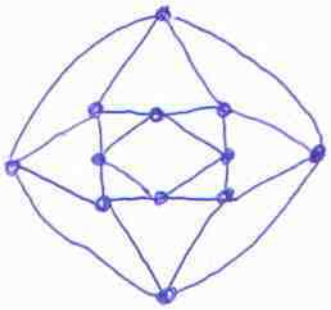
Páros (kétrészes) gráf-e az alábbi.



A

1. Az $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ halmazon adottak az
$\alpha=\{(5,4),(4,2),(3,4),(2,5),(2,1)\}$ és a
$\beta=\{(5,2),(4,5),(3,4),(3,1),(2,3)\}$ bináris relációk.
Adjuk meg α és β gráfjait.
Számoljuk ki az $\alpha\cap(\beta\circ\beta)$ relációt.

2. A $\Gamma=(V,E)$ egyszerű gráfban $|V|=8$ és $|E|=19$.
Igazoljuk, hogy Γ-ban van egy legalább 5-öd fokú csúcs. Igazoljuk, hogy Γ nem síkba rajzolható.

3. Létezik-e Hamilton kör a $K_{8,8,20}$ teljes háromrészes gráfban?

4. Létezik-e az alábbi gráfban
a) Euler séta vagy körséta?
b) Hamilton út vagy kör?
Páros (kétrészes) gráf-e az alábbi?