Szigorlat 2018.06.28
A csoport

Név:................................ NEPTUN KÓD:..........................
Aláírás:..............................

1) Adjuk meg az alábbi képleteket! [20p]

a) Adja meg az alábbi függvények deriváltját!

$(\arccos x)' =$ $\qquad\qquad$ $, (\operatorname{ch} x)' =$

b) Adja meg az inverz függvény differenciálási szabályát!

c) Hogyan számítjuk ki a

$$\iint_T f(x,y)\mathrm{dxdy} =$$

kettős integrált, ha a T tartomány $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\right\}$?

d) $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítés esetén mivel egyenlő

$dx =$ $\qquad\qquad$ $\cos x =$ $\qquad\qquad$?

e) Adja meg a Newton-Leibniz formulát!

f) Ha a görbe polárkoordinátás egyenlete $r = r(\varphi)$ és $\alpha \le \varphi \le \beta$, akkor hogyan számítjuk ki a görbe ívhosszát?

$s =$

g) Írja fel az elliptikus kúp egyenletét!

h) Hogyan térünk át gömbi koordináta-rendszerre? Mennyi a Jacobi determináns értéke az áttéréskor?

$x =$ $\qquad\qquad$ $y =$

$z =$ $\qquad\qquad$ $J =$

i) Milyen helyettesítéssel lehet szétválaszthatójú differenciálegyenletté visszavezetni az $y' = f(ax + by + c)$ differenciálegyenletet?

j) Mit értünk egy $v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $v(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ vektor-vektor függvény divergenciáján?

2) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét! Ellenőrizzük le, hogy a kapott mátrix valóban az A mátrix inverze! [14p]

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 10 & 3 & -10 \\ -8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

5) Számítsuk ki az alábbi felületek által közrezárt rész térfogatát! [16p]

$$z = 6 - x^2 - y^2, \qquad z = x^2 + y^2, z \geq 0$$

6) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen![16p]

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

Akinek az 1)-es feladatban nincs meg a 10 pontja, annak a szigorlati eredménye elégtelen!
Értékelés: 0p-49p elégtelen; 50p-61p elégséges; 62p-74p közepes; 75p-88p jó; 89p-100p jeles

Szigorlat 2018.06.28
pótlap

Név:. . . . . NEPTUN KÓD:. . . . .
Aláírás:. . . . .

3) Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat! [20p]

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx =$$

$$\int x \cdot \cos x dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \mathrm{tg} x dx =$$

$$\int (5x+3)^8 dx =$$

$$\int \frac{3}{x \cdot \ln x}dx =$$

4) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! [14p]

$$y'' - 4y' + 13y = \cos x$$

31 fő Eredeti 14^{00}

Szigorlat 2018.06.28
A csoport

Név:................................. NEPTUN KÓD:...........................
Aláírás:...............................

1) Adjuk meg az alábbi képleteket! [20p]

a) Adja meg az alábbi függvények deriváltját!

1p $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{ch} x)' =$ sh x 1p

b) Adja meg az inverz függvény differenciálási szabályát!

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ 2p

c) Hogyan számítjuk ki a

$$\iint_T f(x,y)\mathrm{dxdy} = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$ 2p

kettős integrált, ha a T tartomány $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$?

d) $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítés esetén mivel egyenlő

$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ 1p $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ 1p ?

e) Adja meg a Newton-Leibniz formulát!

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ vagy $[F(x)]_a^b$ ahol $F'(x) = f(x)$ $[a,b]$-n 2p

f) Ha a görbe polárkoordinátás egyenlete $r = r(\varphi)$ és $\alpha \le \varphi \le \beta$, akkor hogyan számítjuk ki a görbe ívhosszát?

$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$ 2p

g) Írja fel az elliptikus kúp egyenletét!

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 2p

h) Hogyan térünk át gömbi koordináta-rendszerre? Mennyi a Jacobi determináns értéke az áttéréskor?

$x = r\cos\vartheta\cos\varphi$ $\quad y = r\cos\vartheta\sin\varphi$ 2p
$z = r\sin\vartheta$ $\quad J = r^2\cos\vartheta$

i) Milyen helyettesítéssel lehet szétválaszthatójú differenciálegyenletté visszavezetni az $y' = f(ax + by + c)$ differenciálegyenletet?

$u = ax + by + c$ 2p

j) Mit értünk egy $v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $v(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ vektor-vektor függvény divergenciáján?

$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$ 2p

2) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét! Ellenőrizzük le, hogy a kapott mátrix valóban az A mátrix inverze! [14p]

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 10 & 3 & -10 \\ -8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

		$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$
	$\bar{e}_1$	3	$\boxed{1}$	-4	1	0	0
2p	$\bar{e}_2$	10	3	-10	0	1	0
	$\bar{e}_3$	-8	-2	5	0	0	1
	$\bar{a}_2$	3	1	-4	1	0	0
2p	$\bar{e}_2$	$\boxed{1}$	0	2	-3	1	0
	$\bar{e}_3$	-2	0	-3	2	0	1
	$\bar{a}_2$	0	1	-10	10	-3	0
2p	$\bar{a}_1$	1	0	2	-3	1	0
	$\bar{e}_3$	0	0	$\boxed{1}$	-4	2	1
	$\bar{a}_2$	0	1	0	-30	+17	10
2p	$\bar{a}_1$	1	0	0	5	-3	-2
	$\bar{a}_3$	0	0	1	-4	2	1
	$\bar{a}_1$	1	0	0	5	-3	-2
2p	$\bar{a}_2$	0	1	0	-30	17	10
	$\bar{a}_3$	0	0	1	-4	2	1

Ell

			3	1	-4
			10	3	-10
			-8	-2	5
5	-3	-2	1	0	0
-30	17	10	0	1	0
-4	2	1	0	0	1

2p

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -30 & 17 & 10 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ 2p

Szigorlat 2018.06.28
pótlap

Név:................................ NEPTUN KÓD:...........................
Aláírás:..............................

3) Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat! [20p]

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx = \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{2}{x+2}dx = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$$

4p

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow A=-1 \quad B=2$$

$A+B=1$
$2A+B=0$

$$\int x \cdot \cos x dx = \begin{vmatrix} f(x)=x & f'(x)=1 \\ g'(x)=\cos x & g(x)=\sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

4p

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \operatorname{tg} x dx = \operatorname{tg} x + 2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \ln|\cos x| + C$$

4p

$$\int (5x+3)^8 \cancel{x} dx = \frac{(5x+3)^9}{9 \cdot 5} + C$$

4p

$$\int \frac{3}{x \cdot \ln x}dx = 3\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx = 3\ln|\ln x| + C$$

4p

4) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! [14p]

$$y'' - 4y' + 13y = \cos x$$

homogén rész $\quad y'' - 4y' + 13y = 0 \quad$ (1p)

k.e $\quad \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \quad$ (1p)

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} \begin{cases} 2+3i \\ 2-3i \end{cases} \quad (2p)$$

$$y_{hom} = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x \quad (2p)$$

$$y_p = A\cos x + B \sin x \quad (1p)$$

$$y_p' = -A \sin x + B \cos x \quad (1p)$$

$$y_p'' = -A\cos x - B \sin x \quad (1p)$$

$$-A\cos x - B\sin x + 4A \sin x - 4B\cos x + 13A\cos x + 13B\sin x = \cos x$$

$$(12A - 4B)\cos x + (12B + 4A)\sin x = \cos x \quad (1p)$$

$$\left.\begin{aligned} 12A - 4B &= 1 \\ 12B + 4A &= 0 \end{aligned}\right\} \quad B = -\frac{1}{40} \quad A = \frac{3}{40}$$

(1p) (1p)

$$y_p = \frac{3}{40}\cos x - \frac{1}{40}\sin x$$

(1p)

$$y_{ált} = y_p + y_{hom} = \frac{3}{40}\cos x - \frac{1}{40}\sin x + C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$$

(1p)

5) Számítsuk ki az alábbi felületek által közrezárt rész térfogatát! [16p]

$$z = 6 - x^2 - y^2, \qquad z = x^2 + y^2, z \geq 0$$

$z = 6 - x^2 - y^2$

$z = x^2 + y^2$

$$V = \iint_T 6 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)\,dx\,dy \quad \text{ahol} \quad T = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$$

4p

$$\iint_T 6 - 2(x^2+y^2)\,dx\,dy = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ y = r\sin\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J = r & \end{array} \right| =$$

3p

$$= \int_{r=0}^{\sqrt{3}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (6 - 2r^2)\, r\,dr\,d\varphi = 2\pi \int_{r=0}^{\sqrt{3}} 6r - 2r^3\,dr = 2\pi \left[3r^2 - 2\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3}} =$$

3p 2p 2p

$$= 2\pi \left(9 - \frac{9}{2} \right) = 9\pi$$

2p

6) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen![16p]

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$D_f = \mathbb{R}$ (1p)

$R_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le \frac{1}{e}\}$ (1p)

ZH $x=0$ (1p)

$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$ (1p)

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ (1p)

	$x<1$	$x=1$	$1<x$
$f'(x)$	+	0	−
	szig.m nő	lok max	szig.m csökk.

(2p)

$f''(x) = \frac{-e^x-(1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}$ (1p)

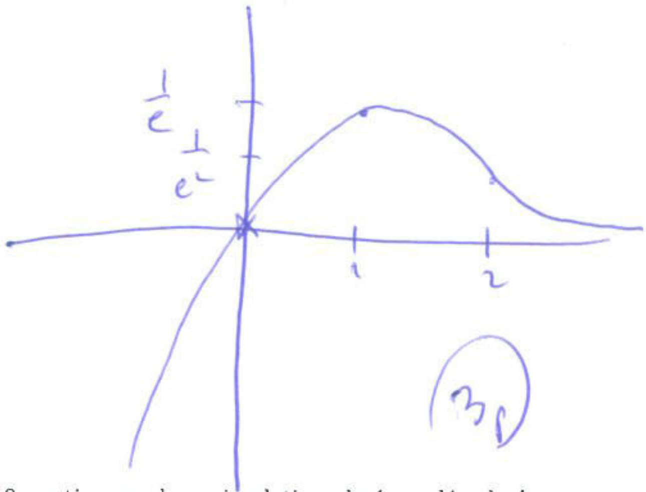
$f''(x)=0 \Rightarrow x=2$ (1p)

	$x<2$	$x=2$	$2<x$
$f''(x)$	−	0	+
	konkáv	inf. pont	konvex

(2p)

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ (1p)

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$ (1p)



(3p)

Akinek az 1)-es feladatban nincs meg a 10 pontja, annak a szigorlati eredménye elégtelen!
Értékelés: 0p-49p elégtelen; 50p-61p elégséges; 62p-74p közepes; 75p-88p jó; 89p-100p jeles