

Szigorlat 2018.06.28
A csoport

Név:..... NEPTUN KÓD:.....
Aláírás:.....

1) Adjuk meg az alábbi képleteket! [20p]

a) Adjuk meg az alábbi függvények deriváltját!

$$(\arccos x)' = \quad, (\operatorname{ch} x)' =$$

b) Adjuk meg az inverz függvény differenciálási szabályát!

c) Hogyan számítjuk ki a

$$\iint_T f(x, y) dx dy =$$

kettős integrált, ha a T tartomány $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$?

d) $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítés esetén mivel egyenlő

$$dx = \quad \cos x = \quad ?$$

e) Adjuk meg a Newton-Leibniz formulát!

f) Ha a görbe polárkoordinátás egyenlete $r = r(\varphi)$ és $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, akkor hogyan számítjuk ki a görbe ívhosszát?

$$s =$$

g) Írja fel az elliptikus kúp egyenletét!

h) Hogyan térünk át gömbi koordináta-rendszerre? Mennyi a Jacobi determináns értéke az áttéréskor?

$$\begin{array}{ll} x = & y = \\ z = & J = \end{array}$$

i) Milyen helyettesítéssel lehet szétválaszthatójú differenciálegyenletté visszavezetni az $y' = f(ax + by + c)$ differenciálegyenletet?

j) Mit értünk egy $v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$ vektor-vektor függvény divergenciáján?

- 2) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét! Ellenőrizzük le, hogy a kapott mátrix valóban az A mátrix inverze! [14p]

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 10 & 3 & -10 \\ -8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

5) Számítsuk ki az alábbi felületek által közrezárt rész térfogatát! [16p]

$$z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = x^2 + y^2, z \geq 0$$

6) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen! [16p]

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

Név:..... NEPTUN KÓD:.....
Aláírás:.....

3) Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat! [20p]

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx =$$

$$\int x \cdot \cos x dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \operatorname{tg} x dx =$$

$$\int (5x+3)^8 dx =$$

$$\int \frac{3}{x \cdot \ln x} dx =$$

4) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! [14p]

$$y'' - 4y' + 13y = \cos x$$

31p Eredő 14⁰⁰

Szigorlat 2018.06.28
A csoport

Név: NEPTUN KÓD:
Aláírás:

1) Adjuk meg az alábbi képleteket! [20p]

a) Adja meg az alábbi függvények deriváltját!

(1p) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{sh} x$ (1p)

b) Adja meg az inverz függvény differenciálási szabályát!

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ (2p)

c) Hogyan számítjuk ki a

$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$ (2p)

kettős integrált, ha a T tartomány $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$?

d) $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítés esetén mivel egyenlő

$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$? (1p)

e) Adja meg a Newton-Leibniz formulát!

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ vagy $[F(x)]_a^b$ ahol $F'(x) = f(x)$ $[a, b]$ -n (2p)

f) Ha a görbe polárkoordinátás egyenlete $r = r(\varphi)$ és $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, akkor hogyan számítjuk ki a görbe ívhosszát?

$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$ (2p)

g) Írja fel az elliptikus kúp egyenletét!

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (2p)

h) Hogyan térünk át gömbi koordináta-rendszerre? Mennyi a Jacobi determináns értéke az áttéréskor?

$x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \cos \theta \sin \varphi$, $z = r \sin \theta$, $J = r^2 \cos \theta$ (2p)

i) Milyen helyettesítéssel lehet szétválaszthatójú differenciálegyenletté visszavezetni az $y' = f(ax + by + c)$ differenciálegyenletet?

$u = ax + by + c$ (2p)

j) Mit értünk egy $v : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$ vektor-vektor függvény divergenciáján?

$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$ (2p)

- 2) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét! Ellenőrizzük le, hogy a kapott mátrix valóban az A mátrix inverze! [14p]

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 10 & 3 & -10 \\ -8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(2₁)

	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$
$\bar{e}_1$	3	1	-4	1	0	0
$\bar{e}_2$	10	3	-10	0	1	0
$\bar{e}_3$	-8	-2	5	0	0	1
$\bar{a}_2$	3	1	-4	1	0	0
$\bar{e}_2$	1	0	2	-3	1	0
$\bar{e}_3$	-2	0	-3	2	0	1
$\bar{a}_2$	0	1	-10	10	-3	0
$\bar{a}_1$	1	0	2	-3	1	0
$\bar{e}_3$	0	0	1	-4	2	1
$\bar{a}_2$	0	1	0	-30	17	10
$\bar{a}_1$	1	0	0	5	-3	-2
$\bar{a}_3$	0	0	1	-4	2	1
$\bar{a}_1$	1	0	0	5	-3	-2
$\bar{a}_2$	0	1	0	-30	17	10
$\bar{a}_3$	0	0	1	-4	2	1

Ell

	3	1	-4
	10	3	-10
	-8	-2	5
5 -3 -2	1	0	0
-30 17 10	0	1	0
-4 2 1	0	0	1

(2₁)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -30 & 17 & 10 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2_1)$$

Név:..... NEPTUN KÓD:.....
Aláírás:.....

3) Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat! [20p]

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx = \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$$

(4r)

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow A = -1 \quad B = 2$$

$A+B=1$
 $2A+B=2$

$$\int x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} f(u)=x & f'(u)=1 \\ g(u)=\cos u & g'(u)=-\sin u \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx$$
$$= x \sin x + \cos x + C \quad (4r)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \operatorname{tg} x dx = \operatorname{tg} x + 2 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \ln|\cos x| + C$$

(4r)

$$\int (5x+3)^8 dx = \frac{(5x+3)^9}{9 \cdot 5} + C \quad (4r)$$

$$\int \frac{3}{x \cdot \ln x} dx = 3 \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = 3 \ln|\ln x| + C$$

(4r)

4) Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet! [14p]

$$y'' - 4y' + 13y = \cos x$$

homogén rész $y'' - 4y' + 13y = 0$ (1p)

v.e. $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ (1p)

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} \begin{cases} 2+3i \\ 2-3i \end{cases} \quad (2p)$$

$$y_{\text{hom}} = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x \quad (2p)$$

$$y_p = A \cos x + B \sin x \quad (1p)$$

$$y_p' = -A \sin x + B \cos x \quad (1p)$$

$$y_p'' = -A \cos x - B \sin x \quad (1p)$$

$$-A \cos x - B \sin x + 4A \sin x - 4B \cos x + 13A \cos x + 13B \sin x = \cos x$$

$$(12A - 4B) \cos x + (12B + 4A) \sin x = \cos x \quad (1p)$$

$$\begin{cases} 12A - 4B = 1 \\ 12B + 4A = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = -\frac{1}{40} \\ A = \frac{3}{40} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1p) \\ (1p) \end{array}$$

$$y_p = \frac{3}{40} \cos x - \frac{1}{40} \sin x \quad (1p)$$

$$y_{\text{által}} = y_p + y_{\text{hom}} = \frac{3}{40} \cos x - \frac{1}{40} \sin x + C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x \quad (1p)$$

5) Számítsuk ki az alábbi felületek által közrezárt rész térfogatát! [16p]

$$z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = x^2 + y^2, z \geq 0$$

$$z = 6 - x^2 - y^2$$

$$z = x^2 + y^2$$



$$V = \iint_T (6 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)) dx dy$$

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$$

$$\iint_T (6 - 2(x^2 + y^2)) dx dy = \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ r = r \end{cases} \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (6 - 2r^2) r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (6r - 2r^3) dr = 2\pi \left[3r^2 - \frac{2r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\pi \left(9 - \frac{9}{2} \right) = \frac{9\pi}{2}$$

6) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen! [16p]

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad (1p)$$

$$R_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{e} \right\} \quad (1p)$$

$$ZH \quad x=0 \quad (1p)$$

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x} \quad (1p)$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \quad (1p)$$

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$	+	0	-
	st.m nö	lok max	st.m csökks.

(2p)

$$f''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x} \quad (1p)$$

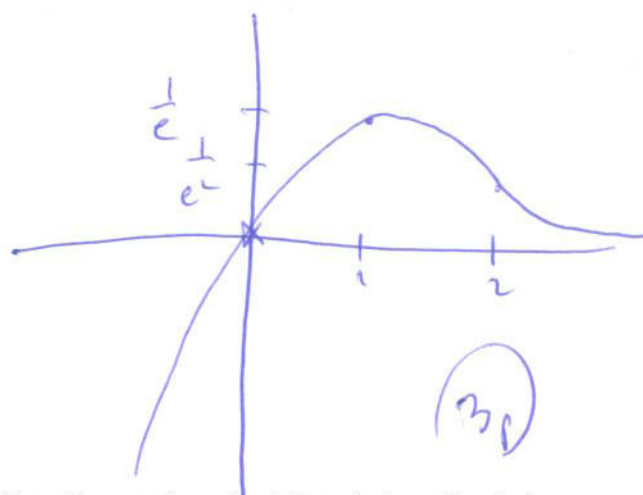
$$f''(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad (1p)$$

	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f''(x)$	-	0	+
	konvex	inf. pont	konvex

(2p)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad (1p)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty \quad (1p)$$



(3p)

Akinek az 1)-es feladatban nincs meg a 10 pontja, annak a szigorlati eredménye elégtelen!
Értékelés: 0p-49p elégtelen; 50p-61p elégséges; 62p-74p közepes; 75p-88p jó; 89p-100p jeles