Lineáris Algebra

Tárgynév:	Lineáris Algebra				
Rövid név:	Lineáris Algebra		*Kód:*	GEMAN153-B	
Angol név:	Linear Algebra				
Tanszék:	Analízis Tanszék				
Tárgyfelelős:	Varga Peter				
Előtanulmányok:	-		*Kódja:*	-	
Kredit:	5	*Követelmény:*	aláírás és kollokvium		
Heti óraszámok:	*Előadás:* 2	*Gyakorlat:*	2	*Labor:*	-
Oktatási cél:	A lineáris algebra alapjainak elsajátítása.				
Tárgy tartalom:	Valós, komplex, véges test folotti vektortér, vektoralgebra, egyenes és sík egyenletei, vektorterek, lineáris függőség, függetlenség, bázis, dimenzió, komplex számok, művelet, polinomok, műveletek gyöktényezős alak, mátrixok, mátrix műveletek, mátrix rangja, determináns, mátrix inverze, bázistranszformáció, homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek, megoldhatóság, megoldási módszerek, lineáris leképezések, karakterisztikus polinom, sajátvektor, sajátérték, diagonalizálhatóság, a valós szám n-esek terek. Komputergrafika, kvantumkomputerek, stb. motíválta illusztrácók.				
Irodalom:	Dr. Szarka Zoltán-Dr. Raisz Péterné Dr. Matematika I (egyetemi tankönyv) Wettl Ferenc - Lineáris algebra - BME Freud Róbert: Lináris Algebra Obádovics J. Gyula: Lineáris Algebra példákkal http://zeus.nyf.hu/~kovacsz/linalg1.pdf				

Jellemző oktatási módok:	
Oktatási nyelv:	Magyar
Előadás:	Minden hallgatónak előadás, tábla használatával
Gyakorlat:	Tantermi gyakorlatok, táblahasználat
Labor:	-
Évközi feladatok, zárthelyik:	2 évközi zárthelyi dolgozat. A zárthelyi dolgozatot a gyakorlaton kell megírni.
Lezárási feltételek:	Gyakorlatokon aktív részvétel; az évközi zárthelyi dolgozat eredményes (legalább 50%) megírása. A tárgy lezáráshoz írásbeli vizsgát kell tenni, amely elméleti és gyakorlati feladatokból áll. A gyakorlati aláírás feltétele, hogy a hallgató legfeljebb három előadásról hiányozhat!!!

Ütemterv

1-2. hét	A 3-dimenziós valós vektortér, vektorok, vektorok közötti műveletek, összeadás, kivonás, skalárral való szorzás, a műveletek tulajdonságai, Descartes koordinátarendszer és koordináták, számolás koordinátákkal, skaláris szorzás. A skaláris szorzat tulajdonságai és kiszámítása koordinátákkal, vektorok merőlegessége, egy vektornak egy másikra vonatkozó merőleges vetületi vektora.
3. hét	Vektor hossza, vektorok szögének kiszámítása koordinátákból, vektorok által kifeszített paralelogramma és háromszög területe. Vektoriális szorzás, vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal.
4. hét	Vektorok vegyes szorzata, vektorok által kifeszített hasáb térfogata. A 3-dimenziós valós vektortér egyeneseinek, síkjainak egyenletei, irányvektor, normálvektor fogalma.
5. hét	Valós vektortér definíciója, példák vektorterekre. Lineáris kombináció definíciója, lineáris függőség, függetlenség, generátorrendszer, bázis, természetes bázis, dimenzió. Maximálisan független vektorrendszer, minimális generátorrendszer. Kicserélési tétel.
6. hét	Pivotálási tecnika és alkalmazásai. R^n-ben megadott vektorrendszer lineáris függetlenségének megállapítása, az adott vektorrendszer bázist alkot-e. Adott vektor előállítása pivotálással egy vektorrendszer lineáris kombinációjaként. A valós szám n-esek vektortere, skaláris szorzás, norma. Cauchy-Schwarz-Bunyakowszkij egyenlőtlenség, Minkowski egyenlőtlenség
7. hét	ZH.
8. hét	R^n vektorainak távolsága, szöge, merőlegessége. Mátrixok, mátrixok összeadása, skalárral való szorzása, mátrixok szorzása, a műveletek tulajdonságai, mátrix inverze, az inverz kiszámítása pivotálással. Példa mátrix inverzére.
9. hét	Lineáris egyenletrendszer definíciója, vektoros alakja, mátrixos alakja, megoldhatósága, pontosan egy, végtelen sok megoldás. A megoldás menete pivotálással, a megoldhatóság eldöntése, a megoldások leolvasása a pivot táblából.
10-11. hét	Determinánsok, a determináns függvény, determinánsok tulajdonságai, kiszámítása pivotálással. Determináns kifejtése sor, illetve oszlop szerint, ferde kifejtési tétel, mátrix inverzének kiszámítása adjungált algebrai aldeterminánsokkal.
12. hét	Komplex számok, algebrai alak, trigonometrikus alak, műveletek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) algebrai és trigonometrikus alakokban. n-edik hatvány kiszámolása, n-edik gyök kiszámolása a trigonometrikus alak felhasználásával
13. hét	Polinomok, összeadás, szorzás, maradékos osztás, egész együtthatós polinomok egész és racionális gyökeinek meghatározása, Horner-elrendezés.
14. hét	Polinomok maradékos osztása, az Algebra alaptétele, polinomok gyökszerkezete, racionális gyökkel rendelkező harmadfokú egyenlet megoldása,

Varga Peter

4. (3+3+4 pont) ZH1 2018 Lin.Alg.
A) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}.$$

Adj meg egy olyan skaláris egyenletrendszert, aminek az egyértelmű megoldása x, y, u, v !

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & -\sqrt{24/25} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{24/25} & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?

C) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $(A^{-1})_{23}$, ha az indexálás 1-től kezdődik?
1. ((2+1+1)+(1+2)+2 pont)
A) Legyen $f : ((x, y)) \to (y - x,\ 2x - 3y,\ x)$ és $g : ((x, y)) \to (y,\ y - 2x)$.
a) Ird fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(AB + (B + 2E))$?

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E + B)A + 2A$?

C) Ha egy ortonormált bázisban $\bar{a} = (-1, x, 2)$, $\bar{a} = (2, x, -1)$ merőleges egymásra, akkor mennyi lehet x ?
2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x, y)^T$ es az $(x, y, z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!
A) $\mathbb{R}^2$-ben:
a) az $x + y = 0$ egyenesre való merőleges vetítés, **b)** az $x + y = 0$ egyenesre való merőleges tükrözés, **a)** az origón átmenő, az $(2, 3)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,
B) $\mathbb{R}^3$-ben:
a) az $z + y = 0$ síkra való merőleges vetítés,
b) az $x + y = 0$ síkra való merőleges tükrözés,

B) Legyen $\phi : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis leképezés, hogy $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = 3$.
Mennyi $m = \phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2,\ \bar{v}_1,\ 4\bar{v}_3 + 2\bar{v}_4,\ -\bar{v}_3)$?
3. (1+1+2+2+4 pont)
A) Adott öt pont

$$P = (-3, 0, 0), \quad Q = (0, 0, -3), \quad R = (0, -3, 0), \quad S = (1, 3, -1), \quad T = (2, 5, 2)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.
a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?

e) Mennyi az sík távolsága az S-től?

4. (3+3+4 pont) ZH1 2018 Lin.Alg.

A) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}.$$

Adj meg egy olyan skaláris egyenletrendszert, aminek az egyértelmű megoldása x, y, u, v !
Megold.:

$$AA^{-1} = E,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\text{vagyis}$$
$$\begin{aligned} 0x + (-1)y &= 1 \qquad & 0u + (-1)v &= 0 \\ 2x + 3y &= 0 \qquad & 2u + 3v &= 1 \end{aligned}$$

vagy

$$A^{-1}A = E,$$
$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\text{vagyis}$$
$$\begin{aligned} 0x + 2u &= 1 \qquad & -x + 3u &= 0 \\ 0y + 2v &= 0 \qquad & -y + 3v &= 1 \end{aligned}$$

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & -\sqrt{24/25} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{24/25} & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Mennyi A^{-1} ?
Megold.: Mivel A ortogonális, így

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & -\sqrt{24/25} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{24/25} & 0 & 1/5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & -\sqrt{24/25} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{24/25} & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

(Mivel A szimmetrikus, vagyis $A = A^T$, igy $A^{-1} = A$.)

C) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mennyi $(A^{-1})_{23}$, ha az indexálás 1-től kezdődik?
Megold.:

$$\det(A) = 0 + (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 87,$$
$$(A^{-1})_{23} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Megjegyzés:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{29} & -\frac{2}{29} & \frac{4}{29} & -\frac{14}{29} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{16}{87} & \frac{1}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{37}{87} \\ -\frac{8}{87} & \frac{14}{29} & \frac{1}{29} & -\frac{199}{87} \end{pmatrix}$$

1. ((2+1+1)+(1+2)+2 pont)

A) Legyen $f : ((x,y)) \to (y-x,\ 2x-3y,\ x)$ és $g : ((x,y)) \to (y,\ y-2x)$.

a) Ird fel az f és g transzformációk F, G mátrixait!

Megold:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $f \circ g$ transzformáció mátrixa?

Megold.:

$$GF = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Abban az esetben, ha létezik, mennyi az $g \circ f$ transzformáció mátrixa?

Megold.: Nem létezik.

B) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(AB + (B + 2E))$?

Megold.: Nem létezik.

b) Abban az esetben, ha létezik, mennyi $(E + B)A + 2A$?

Megold.:

$$(E+B)A + 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 18 & 8 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

C) Ha egy ortonormált bázisban $\bar{a} = (-1, x, 2)$, $\bar{b} = (2, x, -1)$ merőleges egymásra, akkor mennyi lehet x ?

Megold.:

$$\bar{a}\bar{b} = -2 + x^2 - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2$$

2. ((1+1+2)+(2+2)+2 pont) Írd fel a következő transzformációk mátrixait, ha az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortereket ortonormált bázisokban az $(x, y)^T$ es az $(x, y, z)^T$ vektorokkal koordinátázzuk!

A) $\mathbb{R}^2$-ben:

a) az $x + y = 0$ egyenesre való merőleges vetítés,

Megold.:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) az $x + y = 0$ egyenesre való merőleges tükrözés,

Megold.:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) az origón átmenő, az $(2, 3)^T$ vektorral párhuzamos egyenesre való merőleges vetítés,

Megold.:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad P_n = \bar{n}^T \bar{n} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}$$

B) $\mathbb{R}^3$-ben:

a) az $z + y = 0$ síkra való merőleges vetítés,

Megold.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) az $x + y = 0$ síkra való merőleges tükrözés,

Megold.:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B) Legyen $\phi : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ egy olyan antiszimmetrikus multilinearis leképezés, hogy $\phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = 3$.
Mennyi $m = \phi(2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2,\ \bar{v}_1,\ 4\bar{v}_3 + 2\bar{v}_4,\ -\bar{v}_3)$?

Megold.:

$$m = \phi(3\bar{v}_2,\ \bar{v}_1,\ 2\bar{v}_4,\ -\bar{v}_3) = (3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1)) \cdot \phi(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) \cdot 1 = -18,$$

mivel a $(1, 2, 3, 4) \to (2, 1, 4, 3)$ permutáció páros.

3. (1+1+2+2+4 pont)
A) Adott öt pont

$$P = (-3, 0, 0), \quad Q = (0, 0, -3), \quad R = (0, -3, 0), \quad S = (1, 3, -1), \quad T = (2, 5, 2)$$

az $\mathbb{R}^3$ Euklideszi vektortérben egy ortonormált bázisban.
a) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes parametrikus egyenletét!
Megold.:

$$\bar{r}(t) = S + t(T - S) = (1, 3, -1) + t \cdot (1, 2, 3) = (1 + t, 3 + 2t, -1 + 3t),$$

b) Írd fel a S és T pontokat tartalmazó egyenes algebrai egyenleteit!
Megold.:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$$

c) Írd fel a a P, Q és R pontokat tartalmazó sík algebrai egyenletét!
Megold.:

$$\begin{gathered} \bar{n} = (Q - P) \times (R - P) = (-9, -9, -9), \\ \bar{n}(\bar{r} - P) = 0, \\ -9x - 9y - 9z - 27 = 0. \end{gathered}$$

d) Hol van a sík és az egyenes metszéspontja?
Megold.:

$$-9(1 + t) - 9(3 + 2t) - 9(-1 + 3t) - 27 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = -1, \qquad \bar{r}(-1) = (0, 1, -4).$$

e) Mennyi az sík távolsága az S-től?
Megold.:

$$\text{távolság} = \frac{|\bar{n}(S - P)|}{|\bar{n}|} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

4. (4+2+2+1+1 pont) Oldd meg pivotalassal a kovetkezo egyenletrenszert, tovabba jeloljuk az egyenletrendszer egyutthatomatrixat A-val!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Add meg $Oszlop(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

Add meg $Null(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

Add meg $Sor(A)$ dimenziojat es egy bazisat!

Add meg $Null(A^T)$ dimenziojat!

---

1. (3+4+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

Keresd meg A sajatvektorait!

Mennyi $A^{13}(9,8,7)^T$?

---

2. (7+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal A inverzet! Ellenorizd az eredmenyed!

Mennyi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inverze?

---

3. (5+5 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal $\det(A)$-t!

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ird fel ezen matrix $A = LU$ felbontasat!

$L =$ $\qquad$ $U =$

4. (4+2+2+1+1 pont) Oldd meg pivotalassal a kovetkezo egyenletrenszert, tovabba jeloljuk az egyenletrendszer egyutthatomatrixat A-val!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Add meg $Oszlop(A)$ dimenziojat es egy bazisat!
Add meg $Null(A)$ dimenziojat es egy bazisat!
Add meg $Sor(A)$ dimenziojat es egy bazisat!
Add meg $Null(A^T)$ dimenziojat!

Megoldas:

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 2 & 6 & 4 & 6 \\ e_2 & 1_p & 3 & 2 & 3 \\ e_3 & 3 & 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A masodik pivottablabol a kovetkezo dolgokat lehet leolvasni:

- Az egyenletrenszer megoldhato, mivel az e_1 es e_3 sorok utolso, b eleme nulla.
- A b oszlopbol egy partikularis megoldas:
$$\bar{x}_{part} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- Az a_2 es a_3 oszlopok alapjan ket homogen megoldas:
$$\bar{x}_{hom_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}_{hom_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
- Igy az altalanos megoldas:
$$\bar{x}_{alt} = \bar{x}_{part} + t_2\bar{x}_{hom_2} + t_3\bar{x}_{hom_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
(Tulajdonkeppen $x_1 = 3 - 3x_2 - 2x_3$ is elfogadhato megoldas, de ebbol nehezebb lenne kitalalni a helyes valaszt a tobbi kerdesre.)
- $Oszlop(A)$ dimenzioja annyi, ahany a_i cimke szerepel a pivottabla bal oldalan, esetunkben ez $\{a_1\}$, igy $\dim Oszlop(A) = 1$, egy bazis pedig $\{\bar{a}_1\}$. A matrix rangja $\dim Oszlop(A)$.
- $Null(A)$ dimenzioja annyi, ahany a_i cimke a tabla tetejen **nem** szerepel a tabla bal oldalan, esetunkben ez $\{a_2, a_3\}$, igy $\dim Null(A) = 2$, egy bazis pedig $\{\bar{x}_{hom_2}, \bar{x}_{hom_3}\}$.
- $Sor(A)$ dimenzioja annyi, ahany a_i cimke szerepel a pivottabla bal oldalan, esetunkben ez $\{a_1\}$, igy $\dim Sor(A) = 1$, egy bazis pedig az a_1 sor elso harom elemebol kepzett vektor transzponaltja, vagyis $\{(1,3,2)^T\}$
- $Null(A^T)$ dimenzioja $Oszlop(A)$ ortogonalis komplementerenek a dimenzioja, esetunkben
$$\dim \mathbb{R}^3 - \dim Oszlop(A) = 3 - 1 = 2,$$
ahol $\mathbb{R}^3$ az A matrixhoz tartozo $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearis lekepezes masodik $\mathbb{R}^3$-a. (Ennyi sora van a pivottablanak.)

Megjegyzes: A kerdeses dimenziok mind kifejezhetoek az A matrixhoz tartozo $A : \mathbb{R}^3_{forras} \to \mathbb{R}^3_{celpont}$ linearis lekepezes $\dim \mathbb{R}^3_{forras} = 3_f$ es $\dim \mathbb{R}^3_{celpont} = 3_c$ dimenzioival, tovabba a matrix $rang(A)$ rangjaval, ami ugyanaz mint $\dim Oszlop(A)$.

- $\dim Oszlop(A) = rang(A) = 1_r$,
- $\dim Null(A) = 3_f - rang(A) = 2$,
- $\dim Sor(A) = \dim Oszlop(A) = rang(A) = 1_r$,
- $\dim Null(A^T) = 3_c - rang(A) = 2$.

1. (3+4+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Keresd meg A sajatertekeit!

Keresd meg A sajatvektorait!

Mennyi $A^{13}(9,8,7)^T$?

Megoldas: A blokk-diagonalis, a kovetkezo blokkokkal:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = (5),$$

ahol a masodik A_3 blokk sajatrendszere:

$$\lambda_3 = 5, \qquad \bar{v}_3 = (1).$$

A_{12} sajatertekei: Mivel A_{12} (also) triangularis, igy a sajatertekek a diagonalis elemek, vagy ugyanez nehezebben:

$$\det(A_{12} - \lambda E) = 0 = (2-\lambda)(3-\lambda) - 0 \cdot 4 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

A_{12} sajatertekei:

$$(A_{12} - \lambda E)\bar{v} = \bar{0},$$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 4 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 0v_1 + 0v_2 = 0,\ \ 4v_1 + 1v_2 = 0, \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 0 \\ 4 & 3-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad -1v_1 + 0v_2 = 0,\ \ 4v_1 + 0v_2 = 0 \qquad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igy az eredeti A matrix sajtrendszere:

$$\lambda_1 = 2,\ \ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 3,\ \ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = 5,\ \ \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a $\bar{v}_i$ vektorokbol keszitett

$$S = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrix diagonalizalja A-t:

$$S^{-1}AS = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Mivel $A^{13} = (SDS^{-1})^{13} = SD^{13}S^{-1}$, igy

$$A^{13}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzes: Ha valaki nem veszi eszre a blokk strukturat, akkor mindez direkt modon is kiszamolhato:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix},$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5.$$

Ekkor a sajatvektorok egyenletei:

$$\bar{0} = (A - 2E)\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 4 & 3-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{0} = (A - 2E)\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2-3 & 0 & 0 \\ 4 & 3-3 & 0 \\ 0 & 0 & 5-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{0} = (A - 2E)\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 2-5 & 0 & 0 \\ 4 & 3-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$A^{13}(9,8,7)^T$ ugy is kiszamolhato, hogy az $\bar{x} = (9,8,7)^T$ vektort felbontjuk a sajatvektorok linearis kombinaciojakent:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 44 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$A^{13} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 9 \cdot 2^{13} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 44 \cdot 3^{13} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot 5^{13} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

2. (7+3 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal A inverzet! Ellenorizd az eredmenyed!
Megoldas:

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 1_p & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 0 & -6 & -7 & 1 & -4 & 0 \\ a_1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & -1_p & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 0 & 0 & -1_p & 1 & 8 & -6 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & e_1 & e_2 & e_3 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -8 & 6 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 & -7 \end{pmatrix}$$

Ebbol

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 1 & 10 & -7 \\ -1 & -8 & 6 \end{pmatrix},$$

ahol a pivottabla jobbfelen az a_3 sort legalulra tettuk.

Mennyi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inverze?
Megoldas:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

3. (5+5 pont) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Szamold ki pivotalassal $\det(A)$-t!
Megoldas:

$$\begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 1_p & 2 & 3 \\ e_2 & 4 & 2 & 5 \\ e_3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1 & 2 & 3 \\ e_2 & 0 & -6 & -7 \\ e_3 & 0 & -1_p & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ e_2 & 0 & 0 & -1_p \\ a_2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = -1$$

Itt $\det(A)$-t a kovetkezokeppen kapjuk meg: Osszeszorozzuk a pivotelemeket, illetve az utolso pivotttabla permutaciomatrixahoz tartozo $(-1)^{paritas}$ faktort. Esetunkben az $(1,2,3) \to (1,3,2)$ permutacio paratlan (vagyis paratlan szamu elemparcsere allitana elo), igy

$$\det(A) = 1_p \cdot (-1_p) \cdot (-1_p) \cdot (-1)^{paratlan\ egesz\ szam} = -1.$$

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ird fel ezen matrix $A = LU$ felbontasat!

Megoldas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I.\,sor \\ II.sor - (0/2)\cdot I.\,sor \\ III.sor - (4/2)\cdot I.\,sor \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(0/2) & 1 & 0 \\ -(4/2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ebbol mar tudjuk, hogy

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0/2) & 1 & 0 \\ (4/2) & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Tovabba

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I.\,sor \\ II.sor \\ III.sor - (-1/1)\cdot II.\,sor \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

igy

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0/2) & 1 & 0 \\ (4/2) & (-1/1) & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Valoban:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzes: Miert mukodik ez az eljaras?

$$\ell_2 \ell_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(-1/1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(0/2) & 1 & 0 \\ -(4/2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = U$$

Igy

$$A = \ell_1^{-1} \ell_2^{-1} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0/2) & 1 & 0 \\ (4/2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (-1/1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (0/2) & 1 & 0 \\ (4/2) & (-1/1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Itt az $\ell_1^{-1} \ell_2^{-1}$ szorzat extra szamolas nelkul megkaphato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$