

Syllabus

Matematikai Logika és Alkalmazásai (GEMAN154-B)

2 óra előadás, 2 óra gyakorlat. Az aláírás megszerzésének feltétele 50% elérése a két zárthelyi dolgozatban. A vizsga megírásának feltétele az aláírás. A zárthelyi dolgozatok időpontja várhatóan a 7. és 13. hét. Az első vizsgaalalom mindenkinek írásban, a továbbiak írásban és szóban. (Annak is csak írásban kell először vizsgáznia, aki nem az első meghirdetett vizsgaalmon vizsgázik először.) A zárthelyi dolgozatokon a gyakorlati órákon tanult feladattípusokat kell megoldani. A vizsgán az előadáson tanult definíciókat és tételeket kell visszaadni.

A félév ütemterve:

- **1. és 2. előadás:** Kijelentéslogikai formulák
- **3. előadás:** Boole-algebrák
- **4. előadás:** Igazságfüggvények minimalizálása
- **5. előadás:** Boole-gyűrűk
- **6. előadás:** Teljes függvényrendszerek
- **7. előadás:** A kijelentéslogika következtetési formái
- **8. előadás:** Predikátumkalkulus
- **9. előadás:** Predikátumformulák
- **10. előadás:** Prenex normálalak
- **11. és 12. előadás:** Elsőrendű nyelvek

A gyakorlatok anyaga követi a heti előadásokat.

Ajánlott irodalom:

- Pásztorné Varga Katalin, Várterész Magda: *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*
- Urbán János: *Matematikai Logika*
- Dirk van Dalen: *Logic and structure*

Matematikai Logika és alk. 1. dolgozat, minta	Neptun:	Név:
	sor/oszlop:	Aláírás:

1. Formalizáljuk a következő állításokat! (5 pont)

- (a) Ha esik az eső, vagy szerda van, akkor nem megyek biciklivel munkába, de viszek ebédet.
- (b) Vagy biciklivel megyek munkába, vagy gyalog.
- (c) Nem igaz az, hogy ha gyalog megyek munkába, akkor nem esik az eső.
- (d) Pontosán akkor viszek ebédet munkába, ha szerda van.

2. Legyen $E =$ „esik a hó”, $K =$ „kék az ég”, $V =$ „véges sok prímszám van” és írjuk le szöveggel az alábbi állításokat: (5 pont)

- (a) $\neg(E \wedge V)$,
- (b) $K \leftrightarrow \neg V$,
- (c) $V \rightarrow (E \vee K)$,
- (d) $E \oplus V$.

3. Teljes függvényrendszert alkotnak-e az

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \neg x \vee y \vee z, \\ g(x, y, z) &= x \oplus z, \\ h(x, y, z) &= y \rightarrow z \end{aligned}$$

függvények? (5 pont)

4. Adjuk meg az $f(x, y, z) = \neg(x \rightarrow y) \oplus \neg(y \rightarrow z)$ igazságfüggvény Zsegealkin-polinomját. (5 pont)

5. Minimalizáljuk az alábbi standard normálalakban adott igazságfüggvényt: (5 pont)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^0 x_4^0 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^1 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^0 \vee \\ &\vee x_1^0 x_2^1 x_3^0 x_4^1 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^1 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^0 \vee x_1^1 x_2^1 x_3^0 x_4^1 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^1. \end{aligned}$$

Neptun:	Név:
sor/oszlop:	Aláírás:

1. Formalizáljuk a következő állításokat!

(5 pont)

- (a) Ha esik az eső, vagy szerda van, akkor nem megyek biciklivel munkába, de viszek ebédet. $(E \vee S) \rightarrow (\neg B \wedge L)$
- (b) Vagy biciklivel megyek munkába, vagy gyalog. $B \oplus G$
- (c) Nem igaz az, hogy ha gyalog megyek munkába, akkor nem esik az eső. $\neg(G \rightarrow \neg E)$
- (d) Pontosán akkor viszek ebédet munkába, ha szerda van. $S \leftrightarrow L$

2. Legyen E = „esik a hó”, K = „kék az ég”, V = „véges sok prímszám van” és írjuk le szöveggel az alábbi állításokat:

(5 pont)

- (a) $\neg(E \wedge V)$, Nem igaz, hogy esik a hó és véges sok prímszám van.
- (b) $K \leftrightarrow \neg V$, Akkor a ég kék, ha nem véges sok prímszám van.
- (c) $V \rightarrow (E \vee K)$, Ha véges sok prímszám van, akkor esik a hó vagy kék az ég.
- (d) $E \oplus V$, Vagy esik a hó, vagy véges sok prímszám van.

3. Teljes függvényrendszert alkotnak-e az

$$f(x, y, z) = \neg x \vee y \vee z,$$

$$g(x, y, z) = x \oplus z,$$

$$h(x, y, z) = y \rightarrow z$$

függvények?

(5 pont)

4. Adjuk meg az $f(x, y, z) = \neg(x \rightarrow y) \oplus \neg(y \rightarrow z)$ igazságfüggvény Zseggalkin-polinomját.

(5 pont)

5. Minimalizáljuk az alábbi standard normálalakban adott igazságfüggvényt:

(5 pont)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^0 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^0 x_4^0 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^1 x_4^1 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^1 x_4^0 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^0 x_4^1 \vee x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^1 \vee x_1^1 x_2^1 x_3^0 x_4^1 \vee x_1^1 x_2^1 x_3^1 x_4^1$$

③

x	y	z	f(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

1 eső
nem eső
nem minden
nem ördög

	C ₀	C ₁	M	V	L
1		x	x	x	
1	x				
1					t

4 függvényrendszer teljes.

x	z	g(x,z)
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

sem nulla és eső

z	h(z)
1	1
0	1
1	0
0	1

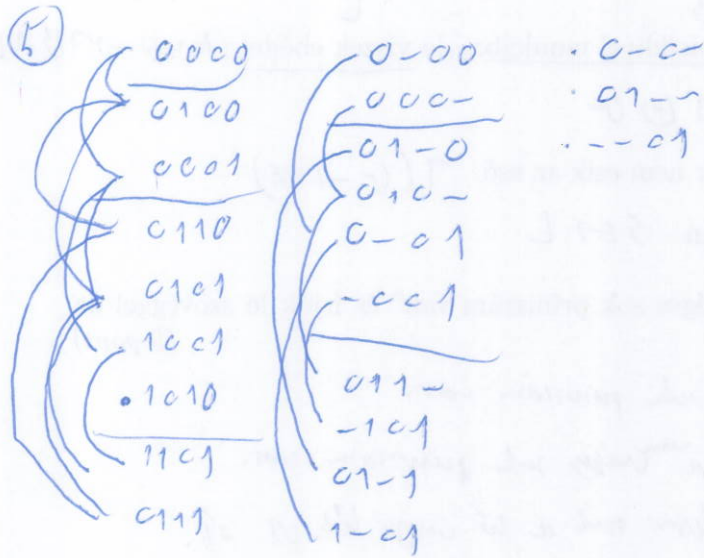
$$x_5 + x_{(1+g)} + \dots$$

$$(1+x)(1+g) =$$

$$= x_5 + x_1 + x_2 + 1 + x_1 + x_2 + x_3$$

$$(4) \quad 1(x+1y) \oplus 1(y+1z) \equiv (x+1y) \oplus (y+1z)$$

$$x(1+1) + y(1+1) = x + y + y + y = x + y + y + y = x + y + y + y$$



	0000	0100	0001	0110	0101	1001	1010	1101	0111
1010							x		
0-0-	x	x	x		x				
01--		x		x	x				x
--01			x		x	x		x	

unabhängig

$$\underline{x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^0 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^1 \vee x_1^0 x_2^1 x_3^0 x_4^1 \vee x_1^0 x_2^0 x_3^1 x_4^1}$$

1. Igazoljuk rezolúciós kalkulus és visszakövetkeztetés segítségével is, hogy

$$\frac{\neg y \rightarrow z, x \vee y, (z \wedge w) \rightarrow y, x \rightarrow (w \vee \neg z)}{y}.$$

(4+5 pont)

2. Határozzuk meg az alábbi formulák prenex-normálalakját:

$$\begin{aligned} & \exists x.(\exists y.(B(x, y) \wedge P(y)) \rightarrow \forall y.\exists z.G(x, y, z)), \\ & \forall x.(\exists y.P(x, y) \rightarrow \exists x.Q(x)) \wedge \exists y.\forall x.P(x, y) \wedge \neg Q(x). \end{aligned}$$

(2+4 pont)

3. Legyen adott egy $\langle 2, 2; 1; \rangle$ hasonlósági típus $P(x, y)$, $Q(x, y)$ relációszimbólumokkal és $f(x)$ függvény-szimbólummal. Interpretáljuk a

$$P_1 := \forall x.R(x, f(x)), \quad P_2 := \forall x.R(x, f(f(x))), \quad P_3 := \forall x.\exists y.S(x, y), \quad P_4 := \forall x.\forall y.(S(x, y) \rightarrow (f(x) = y)).$$

predikátumformulákat abban a struktúrában, ahol

U egy négyzet csúszainak halmaza;

$R(x, y) = x$ és y szemközti csúcsok;

$S(x, y) = x$ és y szomszédos csúcsok;

$f(x) =$ az x után következő csúcs az óramutató járása szerint.

Határozzuk meg az interpretált predikátumok igazságértékét!

(10 pont)

① Resolution calculus:

$$\neg y \rightarrow z \equiv y \vee z$$

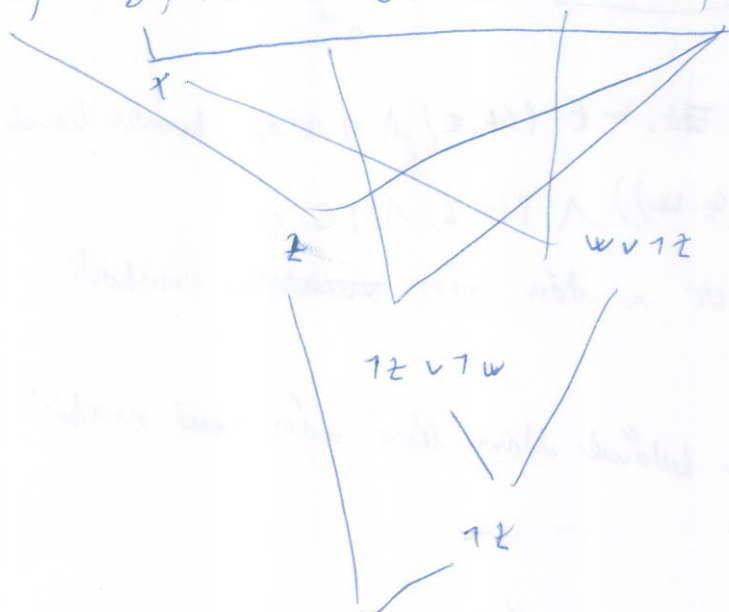
$$x \vee y$$

$$(z \wedge w) \rightarrow y \equiv \neg(z \wedge w) \vee y = \neg z \vee \neg w \vee y$$

$$x \rightarrow (w \vee \neg z) = \neg x \vee w \vee \neg z$$

$$\neg y$$

$$y \vee z, x \vee y, \neg z \vee \neg w \vee y, \neg x \vee w \vee \neg z, \neg y$$



⊥ a falsche Annahme in der Annahme

Unifikationstabelle:

$$\text{Testet ob, falls } |x \vee y| = 1$$

$$\text{da } |y| = 1 \text{ oder } |z| = 1$$

$$\text{da } |x| = 1 \text{ oder } |x \rightarrow (w \vee \neg z)| = 1 \text{ macht } |w \vee \neg z| = 1$$

$$\text{da } |\neg z| = 1 \text{ oder } |z| = 0, \text{ es } |\neg y \rightarrow z| = 1 \text{ macht } |\neg y| = 0, \text{ also } |y| = 1.$$

$$\text{da } |\neg z| = 0 \text{ oder nicht gegeben } |w| = 1, \text{ es } |(z \wedge w) \rightarrow y| = 1 \text{ es } |(z \wedge w) \rightarrow y| = 1 \text{ macht } |y| = 1. \text{ also wieder geben } |y| = 1.$$

(2) $\exists x. (\exists y. (B(x,y) \wedge P(y)) \rightarrow \forall y. \exists z. Q(x,y,z))$ átvértesít

$\exists x. (\exists w. (B(x,w) \wedge P(w)) \rightarrow \forall y. \exists z. Q(x,y,z))$ kvantor kiemelés
 $\exists x. \forall w. \forall y. \exists z. ((B(x,w) \wedge P(w)) \rightarrow \forall y. \exists z. Q(x,y,z))$

$\forall x. (\exists y. P(x,y) \rightarrow \exists x. Q(x) \wedge \exists y. \forall x. P(x,y) \wedge \neg Q(x))$ átvértesít

$\forall u. (\exists v. P(u,v) \rightarrow \exists w. Q(w)) \wedge \exists t. \forall z. P(t,z) \wedge \neg Q(x)$ kvantor kiemelés
 $\forall u. \exists v. \exists w. \exists z. \forall t. (P(u,v) \rightarrow Q(w)) \wedge P(t,z) \wedge \neg Q(x)$

(3) P_1 : bármely x nóg esetén x és az az x előtti nóg ~~rendelt~~ nemköti
 nógok. HAMIS

P_2 : bármely x nóg esetén x és a tudónál előtte lévő nóg ~~rendelt~~ nemköti
 nógok. IGE

P_3 : Minden ismeretnek létezik vele ^{rendelt} ~~rendelt~~ nóg. IGE

P_4 : Ha x és y nemréti ~~rendelt~~ nógok, akkor ~~rendelt~~ y követi x után.
 HAMIS

1. Hogyan származtatható igazságfüggvény kijelentéslogikai formulából?
2. n -változós művelet fogalma.
3. Pontos felső és alsó korlát fogalma.
4. Igazságfüggvény implikánsának fogalma.
5. Boole-gyűrű fogalma.
6. Függvényklón fogalma.
7. Hogyan ellenőrizhető egy formularendszer inkonzisztenciája a klózhalmazával?
8. Kötött, szabad és vegyes változó fogalma.
9. Ekvivalens predikátumformula fogalma.
10. Struktúra fogalma.

1. Egy kijelentéslogikai formulából igazságfüggvény adódik, ha kiértékeljük a változói minden lehetséges értékei esetén. A kapott végeredményt rendeli a függvény az adott változó értékekhez.
2. Egy $f: A^n \rightarrow A$ függvényt n változós műveletnek nevezünk A -n.
3. Legyen H egy $(P, \leq)$ részben rendezett halmaz részhalmaza. Ekkor $k \in P$ a H egy *felső (alsó)* korlátja, ha minden $h \in H$ esetén $h \leq k$ ($k \leq h$) teljesül. A k ha H halmaz *pontos felső (alsó)* korlátja, ha bármely másik l felső (alsó) korlát esetén $k \leq l$ ($l \leq k$) teljesül.
4. Egy K konjunkció *implikánsa* egy f igazságfüggvénynek, ha $K \leq f$.
5. Egy $(B, +, \cdot)$ kommutatív gyűrűt akkor nevezünk *Boole-gyűrűnek*, ha $a^2 = a$ minden $a \in B$ esetén.
6. Tekintsük egy A halmaz összes műveletének a halmazát:

$$\mathcal{O}_A := \{f: A^n \rightarrow A \mid n \geq 1\}$$

Ennek egy H részhalmazát *függvényklónnak* nevezzük, ha tartalmaz minden projekciót, és zárt a (véges) függvénykompozícióra nézve.

7. Egy $P_1, \dots, P_n$ formularendszer inkonzisztens, ha a hozzátartozó klózhalmaz inkonzisztens.
8. Egy változó *kötött*, ha kvantorhoz tartozik, és *szabad*, ha nem tartozik kvantorhoz. Egy változó *vegyes*, ha a formulában szabad és kötött is.
9. Két predikátumformulát *ekvivalensnek* nevezünk, ha minden azonos interpretációjuk esetén ekvivalens predikátumokat adnak. Jelölése $F_1 \equiv F_2$.
10. Egy *struktúrát* a következők alkotják:
 - egy U univerzum halmaz;
 - $R_1, \dots, R_n$ relációk U -n;
 - $F_1, \dots, F_m$ műveletek U -n;
 - $\{c_i \in U \mid i \in I\}$ konstansok.

Jelölés: $\langle U; R_1, \dots, R_n; F_1, \dots, F_m; \{c_i \in U \mid i \in I\} \rangle$