Lineáris Algebra

Tárgynév:	Lineáris Algebra					
Rövid név:	Lineáris Algebra		*Kód:*	GEMAN203-B		
Angol név:	Linear Algebra					
Tanszék:	Analízis Tanszék					
Tárgyfelelős:	Rakaczki Csaba					
Előtanulmányok:	-		*Kódja:*	-		
Kredit:	5	*Követelmény:*	aláírás és kollokvium			
Heti óraszámok:	*Előadás:*	2	*Gyakorlat:*	2	*Labor:*	-
Oktatási cél:	A lineáris algebra alapjainak elsajátítása.					
Tárgy tartalom:	A 3-dimenziós valós vektortér, vektoralgebra, egyenes és sík egyenletei, vektorterek, lineáris függőség, függetlenség, bázis, dimenzió, komplex számok, művelet, polinomok, műveletek gyöktényezős alak, mátrixok, mátrix műveletek, mátrix rangja, determináns, mátrix inverze, bázistranszformáció, homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek, megoldhatóság, megoldási módszerek, lineáris leképezések, karakterisztikus polinom, sajátvektor, sajátérték, diagonalizálhatóság, a valós szám n-esek terek.					
Irodalom:	Dr. Szarka Zoltán-Dr. Raisz Péterné Dr. Matematika I (egyetemi tankönyv) Freud Róbert: Lináris Algebra Obádovics J. Gyula: Lineáris Algebra példákkal http://zeus.nyf.hu/~kovacsz/linalg1.pdf					

Jellemző oktatási módok:	
Oktatási nyelv:	Magyar
Előadás:	Minden hallgatónak előadás, tábla használatával
Gyakorlat:	Tantermi gyakorlatok, táblahasználat
Labor:	-
Évközi feladatok, zárthelyik:	Egy évközi zárthelyi dolgozat. A zárthelyi dolgozatot a gyakorlaton kell megírni.
Lezárási feltételek:	Gyakorlatokon aktív részvétel; az évközi zárthelyi dolgozat eredményes (legalább 50%) megírása. A tárgy lezáráshoz írásbeli vizsgát kell tenni, amely elméleti és gyakorlati feladatokból áll. A gyakorlati aláírás feltétele, hogy a hallgató legfeljebb három előadásról hiányozhat!!!

Ütemterv

1-2. hét	A 3-dimenziós valós vektortér, vektorok, vektorok közötti műveletek, összeadás, kivonás, skalárral való szorzás, a műveletek tulajdonságai, Descartes koordinátarendszer és koordináták, számolás koordinátákkal, skaláris szorzás. A skaláris szorzat tulajdonságai és kiszámítása koordinátákkal, vektorok merőlegessége, egy vektornak egy másikra vonatkozó merőleges vetületi vektora.
3. hét	Vektor hossza, vektorok szögének kiszámítása koordinátákból, vektorok által kifeszített paralelogramma és háromszög területe. Vektoriális szorzás, vektoriális szorzás kiszámítása koordinátákkal.
4. hét	Vektorok vegyes szorzata, vektorok által kifeszített hasáb térfogata. A 3-dimenziós valós vektortér egyeneseinek, síkjainak egyenletei, irányvektor, normálvektor fogalma.
5. hét	Valós vektortér definíciója, példák vektorterekre. Lineáris kombináció definíciója, lineáris függőség, függetlenség, generátorrendszer, bázis, természetes bázis, dimenzió. Maximálisan független vektorrendszer, minimális generátorrendszer. Kicserélési tétel.
6. hét	Pivotálási tecnika és alkalmazásai. R^n-ben megadott vektorrendszer lineáris függetlenségének megállapítása, az adott vektorrendszer bázist alkot-e. Adott vektor előállítása pivotálással egy vektorrendszer lineáris kombinációjaként.
7. hét	A valós szám n-esek vektortere, skaláris szorzás, norma, Cauchy-Schwarz-Bunyakowszkij egyenlőtlenség, Minkowski egyenlőtlenség, R^n vektorainak távolsága, szöge, merőlegessége.
8. hét	Mátrixok, mátrixok összeadása, skalárral való szorzása, mátrixok szorzása, a műveletek tulajdonságai, mátrix inverze, az inverz kiszámítása pivotálással. Példa mátrix inverzére.
9. hét	Lineáris egyenletrendszer definíciója, vektoros alakja, mátrixos alakja, megoldhatósága, pontosan egy, végtelen sok megoldás. A megoldás menete pivotálással, a megoldhatóság eldöntése, a megoldások leolvasása a pivot táblából.
10-11. hét	Determinánsok, a determináns függvény, determinánsok tulajdonságai, kiszámítása pivotálással. Determináns kifejtése sor, illetve oszlop szerint, ferde kifejtési tétel, mátrix inverzének kiszámítása adjungált algebrai aldeterminánsokkal.
12. hét	Komplex számok, algebrai alak, trigonometrikus alak, műveletek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) algebrai és trigonometrikus alakokban. n-edik hatvány kiszámolása, n-edik gyök kiszámolása a trigonometrikus alak felhasználásával
13. hét	Polinomok, összeadás, szorzás, maradékos osztás, egész együtthatós polinomok egész és racionális gyökeinek meghatározása, Horner-elrendezés.
14. hét	Polinomok maradékos osztása, az Algebra alaptétele, polinomok gyökszerkezete, racionális gyökkel rendelkező harmadfokú egyenlet megoldása,

Miskolc, 2019. szeptember 5.

Dr. Rakaczki Csaba

Lineáris Algebra 2019.01.18

Név:.................................. NEPTUN KÓD:...........................
Aláírás:..............................

1) Adjuk meg az alábbi képleteket! [16p]

a) Hogyan számoljuk ki az $\overline{\mathbf{a}}$ vektor $\overline{\mathbf{b}}$ vektorra eső merőleges vetületi vektorát?

b) Hogyan számítjuk ki az $\overline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\overline{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzatát?

c) Legyen $(V, +, \cdot)$ egy valós vektortér. Mikor mondjuk, hogy a $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n \in V$ vektorrendszer generátorrendszer?

d) Hogyan számoljuk ki a $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ komplex szám n-edik gyökeit?

$\sqrt[n]{z} =$

e) Hogyan számoljuk ki a $z = a + bi$ komplex szám abszolút értékét?

$|z| =$

f) Hogyan számoljuk ki a $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$ és a $B = (b_{ij})_{i=1,j=1}^{n\ \ k}$ mátrixokok szorzatának i-edik sorának j-edik elemét?

$(A \cdot B)_{ij} =$

g) Definiálja egy $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix inverzét!

h) Hogyan számoljuk ki egy $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ nem nulla determinánsú mátrix A^{-1} inverz mátrixának i-edik sorának j-edik elemét?

$(A^{-1})_{ij} =$

2) Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet! [16p]

$$2x^3 + x^2 - x + 3 = 0$$

4) Határozzuk meg a $P = (-1, 4, -1)$ pontnak attól az egyenestől való távolságát, amire illeszkednek az alábbi pontok:

$$A = (1, 2, 3), \quad B = (-2, 2, -3) \quad [16p].$$

5) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét! Ellenőrizzük le, hogy a kapott mátrix valóban az A mátrix inverze! [16p]

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Akinek az 1)-es feladatban nincs legalább 4 jó válasza, annak az eredménye elégtelen!
Értékelés: 0p-39p elégtelen; 40p-49p elégséges; 50p-59p közepes; 60p-69p jó; 70p-80p jeles

Lineáris Algebra 2019.01.18.
pótlap

Név:.................................. NEPTUN KÓD:............................
Aláírás:...............................

3) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert![16p]

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
-4x_1 & + & 6x_2 & - & 6x_3 & + & 10x_4 & = & -18 \\
3x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 6 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\
-3x_1 & + & 4x_2 & & & - & x_4 & = & -1
\end{array}$$

45p ÉRDEMJEGY 13 30

Lineáris Algebra 2019.01.18

Név:................................ NEPTUN KÓD:..........................
Aláírás:..............................

1) Adjuk meg az alábbi képleteket! [16p]

a) Hogyan számoljuk ki az $\overline{a}$ vektor $\overline{b}$ vektorra eső merőleges vetületi vektorát?

$$\overline{a}_v = \frac{1}{|\overline{b}|^2}(\overline{a}\,\overline{b})\cdot\overline{b} \quad \text{vagy} \quad (\overline{a}\,\overline{b}^\circ)\overline{b}^\circ$$ (2p)

b) Hogyan számítjuk ki az $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzatát?

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ (2p)

c) Legyen $(V, +, \cdot)$ egy valós vektortér. Mikor mondjuk, hogy a $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n \in V$ vektorrendszer generátorrendszer?

ha $\forall \overline{x} \in V$ $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\overline{x} = \lambda_1\overline{b}_1 + \cdots + \lambda_n\overline{b}_n$ (2p)

d) Hogyan számoljuk ki a $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám n-edik gyökeit?

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$ (2p)

e) Hogyan számoljuk ki a $z = a + bi$ komplex szám abszolút értékét?

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$ (2p)

f) Hogyan számoljuk ki a $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$ és a $B = (b_{ij})_{i=1,j=1}^{n\ \ k}$ mátrixokok szorzatának i-edik sorának j-edik elemét?

$$(A \cdot B)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$ (2p)

g) Definiálja egy $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix inverzét!

ha $\exists A^{-1} \in M_{n\times n}$ úgy, hogy $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ akkor A^{-1}-t A inverzének nevezzük (2p)

h) Hogyan számoljuk ki egy $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ nem nulla determinánsú mátrix A^{-1} inverz mátrixának i-edik sorának j-edik elemét?

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{A_{ji}^*}{|A|}$$ (2p)

2) Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet! [16p]

$$2x^3 + x^2 - x + 3 = 0$$

$x = \frac{p}{q}$ $(p,q)=1$ $p|3$ és $q|2$

$p \in \{\pm 1, \pm 3\}$ (1p) $q \in \{\pm 1, \pm 2\}$ (1p)

$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\}$ (2p)

	2	1	-1	3
1	2	3	2	5
-1	2	-1	0	3
3	2	7	20	63
-3	2	-5	14	-39
$\frac{1}{2}$	2	2	0	3
$-\frac{1}{2}$	2	0	-1	$\frac{7}{2}$
$\frac{3}{2}$	2	4	5	$\frac{21}{2}$
$-\frac{3}{2}$	2	-2	2	0

(6p) Nem kell az egész tábla elég, ha megtalálja a $-\frac{3}{2}$-t

$2x^3+x^2-x+3 = \left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2-2x+2)$ (2p)

$x = -\frac{3}{2}$ (1p)

$2x^2-2x+2=0$ (1p)

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (1p)

$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (1p)

M.o. $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Lineáris Algebra 2019.01.18.
pótlap

Név:.................................. NEPTUN KÓD:..............................
Aláírás:..................................

3) Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert![16p]

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
-4x_1 & + & 6x_2 & - & 6x_3 & + & 10x_4 & = & -18 \\
3x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 6 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\
-3x_1 & + & 4x_2 & & & - & x_4 & = & -1
\end{array}$$

3p

	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{b}$	
$\bar{e}_1$	-4	6	-6	10	-18	4
$\bar{e}_2$	3	-5	5	-4	6	-3
$\bar{e}_3$	$\boxed{1}$	-2	3	-2	2	
$\bar{e}_4$	-3	4	0	-1	-1	3

2p

$\bar{e}_1$	0	-2	6	2	-10	2
$\bar{e}_2$	0	$\boxed{1}$	-4	2	0	
$\bar{a}_1$	1	-2	3	-2	2	2
$\bar{e}_4$	0	-2	9	-7	5	2

2p

$\bar{e}_1$	0	0	-2	6	-10	2
$\bar{a}_2$	0	1	-4	2	0	4
$\bar{a}_1$	1	0	-5	2	2	5
$\bar{e}_4$	0	0	$\boxed{1}$	-3	5	

2p

$\bar{e}_1$	0	0	0	0	0
$\bar{a}_2$	0	1	0	-10	20
$\bar{a}_1$	1	0	0	-13	27
$\bar{a}_3$	0	0	1	-3	5

2p

$\bar{a}_1$	1	0	0	-13	27
$\bar{a}_2$	0	1	0	-10	20
$\bar{a}_3$	0	0	1	-3	5
$\bar{e}_4$	0	0	0	0	0

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} x_4$$

3p

$x_4 = t \in \mathbb{R}$

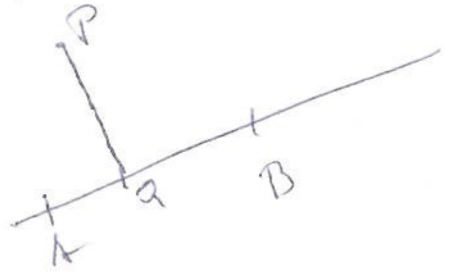
$x_1 = 27 + 13t$
$x_2 = 20 + 10t$
$x_3 = 5 + 3t$
$x_4 = t$

EM

2p

4) Határozzuk meg a $P = (-1, 4, -1)$ pontnak attól az egyenestől való távolságát, amire illeszkednek az alábbi pontok:

$A = (1, 2, 3), \quad B = (-2, 2, -3) \quad [16p].$



$\overrightarrow{AP} = (-2, 2, -4)$ (1p)

$\overrightarrow{AB} = (-3, 0, -6)$ (1p)

$$T_{\underset{A\ B}{\overset{P}{\Delta}}} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{PQ}|$$

$$\Rightarrow \quad d = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} \quad (4p)$$

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & -6 \end{vmatrix} \ (2p) = \bar{i}\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}}_{-12} - \bar{j}\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}}_{12-12} + \bar{k}\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}_{0-(-6)} =$$

$$= -12\bar{i} + 0\bar{j} + 6\bar{k} = (-12, 0, 6) \quad (2p)$$

$|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{144+36} = \sqrt{180}$ (2p)

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$ (2p)

$$d = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{45}} = \sqrt{4} = 2 \quad (2p)$$

---

vagy

$\bar{v} = \overrightarrow{AB} = (-3, 0, -6)$ (2p) $\quad$ A, B egyenese $\quad x = 1-3t$, $y = 2$, $z = 3-6t$, $\quad t \in \mathbb{R}$ (2p)

$Q = (a, b, c)$ (1p)

ekkor $\quad a = 1-3t$, $\quad b = 2$, $\quad c = 3-6t$ $\quad$ valamilyen $t \in \mathbb{R}$ esetén (1p)

$\overrightarrow{PQ} = (a+1, b-4, c+1)$ (2p)

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (1p) $\Rightarrow -3(a+1) - 6(c+1) = 0 \Rightarrow -3a - 6c - 9 = 0$

$-3(1-3t) - 6(3-6t) - 9 = 0 \qquad t = \frac{2}{3} \qquad \overrightarrow{PQ} = (0, -2, 0) \quad d = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4} = 2$

5) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét! Ellenőrizzük le, hogy a kapott mátrix valóban az A mátrix inverze! [16p]

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

		$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$	
	$\bar{e}_1$	-8	5	-2	1	0	0	2
3p	$\bar{e}_2$	3	-2	$\boxed{1}$	0	1	0	
	$\bar{e}_3$	7	-5	4	0	0	1	-4
	$\bar{e}_1$	-2	$\boxed{1}$	0	1	2	0	
2p	$\bar{a}_3$	3	-2	1	0	1	0	2
	$\bar{e}_3$	-5	3	0	0	-4	1	-3
	$\bar{a}_2$	-2	1	0	1	2	0	2
2p	$\bar{a}_3$	-1	0	1	2	5	0	
	$\bar{e}_3$	$\boxed{1}$	0	0	-3	-10	1	
	$\bar{a}_2$	0	1	0	-5	-18	2	
2p	$\bar{a}_3$	0	0	1	-1	-5	1	
	$\bar{a}_1$	1	0	0	-3	-10	1	
	$\bar{a}_1$	1	0	0	-3	-10	1	
2p	$\bar{a}_2$	0	1	0	-5	-18	2	
	a_3	0	0	1	-1	-5	1	

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 1 \\ -5 & -18 & 2 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2p

			-8	5	-2	
			3	-2	1	
			7	-5	4	
-3	-10	1	1	0	0	
-5	-18	2	0	1	0	3p
-1	-5	1	0	0	1	

Akinek az 1)-es feladatban nincs legalább 4 jó válasza, annak az eredménye elégtelen!
Értékelés: 0p-39p elégtelen; 40p-49p elégséges; 50p-59p közepes; 60p-69p jó; 70p-80p jeles