

1. TANTÁRGYLEÍRÁS

Tantárgy neve: DIFFERENCIÁLEGYENLETEK	Tantárgy Neptun kódja: GEMAN015M Tárgyfelelős intézet: Miskolci Egyetem, GÉIK, Matematikai Intézet Tantárgyelem: kötelező (MSc törzsanyag)
Tárgyfelelős: Dr. Varga Péter egyetemi docens	
Javasolt félév: 2. őszi félév	Előfeltétel: -
Óraszám/hét: 2 óra előadás + 1 óra gyakorlat	Számonkérés módja: gyakorlati jegy
Kreditpont: 3	Tagozat: MSc.

A tantárgy feladata és célja:

A tantárgy célja a kalkulusban megtanult módszerek alkalmazása dinamikai rendszerek leírására. A hallgatókkal a kurzus megismerteti a DE-k megoldási módszereit (numerikus és szimbolikus módszerek). A kurzus különös hangsúlyt fektet a homogén és inhomogén lineáris DE rendszerek megoldására.

A tantárgy tematikus leírása:

Közösleges és parciális differenciálegyenletek. Elsőrendű differenciálegyenletek geometriai interpretációja.
Numerikus módszerek (Euler, Heun), a megoldás Taylor sorfejtése, Taylor polinomok hibabecslése.
Homogén lineáris differenciálegyenletrendszerek. Sajátértékek és sajátvektorok.
Mátrixok exponenciális függvénye. Komplex exponenciális függvény.
Nemlineáris DE rendszerek. Linearizálás, stabilitás.
Kezdetiérték feladatok egzisztencia és unicitás tételei.
Inhomogén állandó együtthatós DE (rendszer)-ek. Impulzus és frekvenciaválasz.
Laplace transzformáció és alkalmazásai. Komplex függvények vonalintegráljai.
Parciális DE-k típusai. Fourier sorok, integrálok.
Hőegyenlet és hullámegyenlet.
Laplace operátor és egyenlet

A kurzusra jelentkezés módja: a regisztrációs héten NEPTUN rendszeren keresztül.

A tantárgy felvételének előfeltétele:-

Oktatási módszer: Előadások, példamegoldó gyakorlatok

Félévközi számonkérés módja, követelmények: 2 db zárthelyi dolgozat.

Az aláírás feltételei a félév során:

.

- 2 db zárthelyi dolgozat elégséges szintű teljesítése (elégséges szint: 50%),
- az előadások legalább 60%-ának látogatása és a gyakorlatokon legalább 70%-os részvétel.

A tantárgy lezárásának módja: vizsga vagy megajánlott jegy

Értékelés (félévközi teljesítmény aránya a beszámításnál, ponthatárok): ötfokozatú értékelés

A félévi érdemjegy számítása: zárthelyik érdemjegye alapján, vagy a vizsga érdemjegye alapján

Oktatási segédeszközök

Kötelező irodalom:

Rontó Miklós - Raisz Péterné: Differenciálegyenletek műszakiaknak Miskolci Egyetemi Kiadó, 2004.

Rontó Miklós - Mészáros József -: - Tuzson Ágnes:

Differenciál és integrálegyenletek. Komplex függvénytan. Variációszámítás.

Miskolci Egyetemi Kiadó, 1998.

Ajánlott irodalom: :

Scharnitzky V.: Differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2006.

Tóth J., Simon P.: Differenciálegyenletek, Typotex, Budapest, 2005.

Paul Dawkins: Differential Equations,

<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/DE.aspx>

2. TANTÁRGYTEMATIKA

Differenciálegyenletek
Tantárgytematika (ÜTEMTERV)
Aktuális tanév 2. félév (tavaszi)

Anyagmérnök MSc, I. évfolyam 1. félév

Hét	Előadás
1.	Közönséges és parciális differenciálegyenletek. Elsőrendű differenciálegyenletek geometriai interpretációja.
2.	Numerikus módszerek (Euler, Heun), a megoldás Taylor sorfejtése, Taylor polinomok hibabecslése.
3.	Homogén lineáris differenciálegyenletrendszerek. Sajátértékek és sajátvektorok.
4.	Mátrixok exponenciális függvénye. Komplex exponenciális függvény.
5.	Nemlineáris DE rendszerek. Linearizálás, stabilitás.
6.	Kezdetiérték feladatok egzisztencia és unicitás tételei.
7.	ZH 1.
8.	Inhomogén állandó együtthatós DE (rendszer)-ek. Impulzus és frekvenciaválasz.
9.	Laplace transzformáció és alkalmazásai. Komplex függvények vonalintegráljai.
10.	Parciális DE-k típusai. Fourier sorok, integrálok.
11.	Hőegyenlet és hullámegyenlet.
12.	Laplace operátor és egyenlet
13.	ZH 2.
14.	PótZH.

3. MINTA ZH 1.

Differencialegyenletek. ZH I.

1.

$$y' = f(x, y) = x - y;$$

Mennyi y'' és y''' ? Ird fel y harmadrendű Taylor polinomját az $x = 0$ pont körül, ha $y(0) = 5$!

2.

$$f(x) = 1/x, \quad x_0 = 2;$$

Ird fel f -nek a lineáris $f(x_0 + \Delta x) \approx T_1(x_0 + \Delta x)$ közelítést, ha $\Delta x = 0.1$! Mennyi $\max_{z \in [x_0, x_0 + \Delta x]} |f''(z)|$? Adj felső korlátot a közelítés hibájára: $|\text{hiba}(\Delta x)| = |f(x_0 + \Delta x) - T_1(x_0 + \Delta x)|$ hibájára!

3. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun módszert a következő DE-ekre $\Delta x = 0.1$ lépésközzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltétel mellett!

$$y' = f(x, y) = x - y;$$

Mit javasolnak ezek a módszerek y(2.1)-re?

4. Rajzold le az $y' = f(y)$ DE iránymezőjét és a megoldásgörbéit! Keresd meg a DE fixpontjait és írd fel a fixponttól való eltérésre vonatkozó DE linearizált alakját! Vizsgald meg a fixpontok stabilitását!

$$y' = y(1 - y)(1 + y).$$

5. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dx}y = Ay, \quad y(0) = v$$

DE-t! Ird fel az általános, illetve a partikuláris megoldást! Vizsgald meg az $y = 0$ fixpont stabilitását! Mennyi $\exp(xA)$? Ird fel a partikuláris megoldást e^{xA} segítségével!

6. Keresd meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mennyi $\exp(xA)$?

A MINTA ZH MEGOLDÁSA

Differencialegyenletek. ZH I.

1.

$$y' = f(x, y) = x - y;$$

Mennyi y'' és y''' ? Ird fel y harmadrendű Taylor polinomját az $x = 0$ pont körül, ha $y(0) = 5$!

Megoldas:

$$y'' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) f; \quad y''' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f,$$

tehát

$$\begin{aligned} y'' &= -x + y + 1, & y''' &= x - y - 1, \\ y(0) &= 5, & y'(0) &= f(0, 5) = 0 - 5, & y''(0) &= -0 + 5 + 1 = 6, & y'''(0) &= 0 - 5 - 1 = -6, \\ y(x) &\approx 5 - 5x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3 \end{aligned}$$

2.

$$f(x) = 1/x, \quad x_0 = 2;$$

Ird fel f -nek a lineáris $f(x_0 + \Delta x) \approx T_1(x_0 + \Delta x)$ közelítést, ha $\Delta x = 0.1$! Mennyi $\max_{z \in [x_0, x_0 + \Delta x]} |f''(z)|$? Adj felso korlatot a közelítés hibájára: $|\text{hiba}(\Delta x)| = |f(x_0 + \Delta x) - T_1(x_0 + \Delta x)|$ hibájára!

Megoldas:

$$\begin{aligned} 1/(2 + 0.1) &= 1/2 - 1/2^2 \cdot 0.1 + \text{hiba}(0.1) \\ |\text{hiba}(0.1)| &\leq \frac{1}{2} \Delta x^2 \max_{z \in [x_0, x_0 + \Delta x]} |f''(z)| = \frac{1}{2} 0.1^2 \max_{z \in [2, 2 + 0.1]} | -1/z^2 | = \frac{1}{2} 0.1^2 \cdot 1/4 \end{aligned}$$

3. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun módszert a következő DE-ekre $\Delta x = 0.1$ lépésközzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltétel mellett!

$$y' = f(x, y) = x - y;$$

Mit jósolnak ezek a módszerek $y(2.1)$ -re?

Megoldas:

$$\begin{aligned} \text{Euler : } y(2.1) &\approx y(2) + (2 - 3) \cdot 0.1 = 3 + (-1) \cdot 0.1 = 2.9, \\ y(2.2) &\approx y(2.1) + (2.1 - 2.9) \cdot 0.1 \\ \text{Heun : } k_1 &= f(2, 3) = 2 - 3 = -1, \quad k_2 = f(2 + 0.1, 3 + f(2, 3) \cdot 0.1) = 2.1 - 2.9 = -0.8, \\ y(2.1) &\approx y(2) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \cdot 0.1 = 3 + \frac{1}{2}(-1 - 0.8) \cdot 0.1. \end{aligned}$$

1. Rajzold le az $y' = f(y)$ DE iranymezojet es a megoldasgorbeit! Keresd meg a DE fixpontjait es ird fel a fixponttol valo elterésre vonatkozó DE linearizált alakját! Vizsgald meg a fixpontok stabilitását!

$$y' = y(1-y)(1+y).$$

Megoldas:

$$y' = f(y) = y(1-y)(1+y) = +y - y^3$$

$$f'(y) = \frac{d}{dy} f(y) = 1 - 3y^2. \text{ A fixpontok:}$$

$$y_1 = 0,$$

$$y_2 = 1,$$

$$y_3 = -1,$$

$$f'(y_1) = f'(0) = 1 - 3 \cdot 0^2 = 1 > 0,$$

$$f'(1) = -2 < 0,$$

$$f'(-1) = -2 < 0.$$

f' elojele alapján az y_1, y_2, y_3 fixpontok stabilitása: *instabil, stabil, stabil*.

A linearizált egyenletek a fixpontok körül:

$$\frac{d}{dx}(y-0) = \frac{d}{dx} \Delta y_1 = 1 \cdot \Delta y_1,$$

$$\frac{d}{dx}(y-1) = \frac{d}{dx} \Delta y_2 = -2 \cdot \Delta y_2,$$

$$\frac{d}{dx}(y-(-1)) = \frac{d}{dx} \Delta y_3 = -2 \cdot \Delta y_3,$$

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dx} y = Ay, \quad y(0) = v$$

DE-t! Ird fel az altalános, illetve a partikularis megoldást! Vizsgald meg az $y = 0$ fixpont stabilitását! Mennyi $\exp(xA)$? Ird fel a partikularis megoldást e^{xA} segitsegevel!

Megoldas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sajaterterek: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$. Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az altalános megoldás:

$$y_{alt}(x) = \sum_i C_i e^{\lambda_i x} v_i = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha

$$y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

akkor a partikularis megoldás

$$y_{part}(x) = 4e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mivel mindket sajátterek valós része pozitív, így az $y = 0$ fixpont instabil.

Az xA matrix exponencialis függvénye:

$$e^{xA} = e^{xSDS^{-1}} = S e^{xD} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ennek segitsegevel a partikularis megoldás az

$$y_{part}(x) = e^{xA} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

alakban írható fel.

1. Keresd meg az A matrix sajáttertekeit és sajátvektorait!

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mennyi $\exp(xA)$?

Megoldas:

Sajátterek:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \implies \lambda_1 = 2.$$

Az egyetlen sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{vagyis } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\exp(xA)$:

$$\begin{aligned} \exp(xA) &= \exp \left[\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \exp \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \cdot \exp \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \dots \right] = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 3xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Itt az első, $\exp(C + D) = \exp(C) \cdot \exp(D)$ típusú átalakítást azért lehetett elvégezni, mert esetünkben $[C, D] = CD - DC = 0$ volt:

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Az utolsó előtti átalakításnál pedig azt használtuk ki, hogy

$$\begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = (3x)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

4A) (5 pont)
 $y' = -y^2 + 4$.
Keresd meg a DE fixpontjait!

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

Ha $y(0) = -0.5$, mennyi
 $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) =$

Vazold a DE megoldasgorbeit!

4B). (5 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_2 - 4) \\ (y_1 - 4)(y_2 + 3) \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

Lev. Diff.Egy., 2019.05.18. NEPTUN: :

Név: Aláírás:

A) $y'' - 9y = (e^t - 4)^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$? ($\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$)

Hogy nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa?

Mennyi $y(t)$?

B1) Mi az $y''(t) = 9y(t) + \delta(t)$ DE retardalt fundamentalis megoldasa?

B2) Mi az $y''(t) = 9y(t) + f(t)$, $y(t) = f(t) = 0$, ha $t < 0$ DE megoldasa?

2. (4+2+4 pont) Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_2 \\ 2y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg A sajátertekeit es sajátvektorait!

3. Legyen $f(t) = 4, g(t) = t$. Mennyi $h(t) = (f * g)(t)$?

Mennyi $\mathcal{L}(h) - \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$?

3. Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_1 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Mennyi e^{tA} ?

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 77 \end{pmatrix}$$

Szamold ki a DE partikularis megoldasait!

Mi az elozo DE partikularis megoldasa az $(y_1(0), y_2(0))^T = (4, 5)$ kezdeti feltetel mellett?

Név:

Aláírás:

((3+2+1)+(3+1)) pont

1A) $y'' - 9y = (e^t - 4)^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$?

$$= e^{2t} - 8e^t + 16$$

$$(s^2 Y(s) - 2s - 3) - 9Y(s) = \frac{1}{s-2} - 8 \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{16}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 9} \left[2s + 3 + \frac{1}{s-2} - 8 \frac{1}{s-1} + \frac{16}{s} \right]$$

Hogy néz ki $Y(s)$ parciális tört felbontása?

$$s^2 - 9 = (s+3)(s-3)$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s}$$

Mennyi $y(t)$?

$$y(t) = A e^{-3t} + B e^{3t} + C e^{2t} + D e^t + E$$

1B1) Mi az $G''(t) = 9G(t) + \delta(t)$ DE retardált fundamentális megoldása?

$$t < 0: G(t) = 0$$

$$t \approx 0: G(0^+) - G(0^-) = 0, G'(0^+) - G'(0^-) = 1$$

$$t > 0: G''(t) = 9G(t) \Rightarrow G(t) = A e^{3t} + B e^{-3t} \Rightarrow G(t) = \frac{1}{6} e^{3t} - \frac{1}{6} e^{-3t}$$

$$G(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ \frac{1}{6}(e^{3t} - e^{-3t}), & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

1B2) Mi az $y''(t) = 9y(t) + f(t)$, $y(t) = f(t) = 0$, ha $t \ll 0$ DE megoldása?

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{1}{6} (e^{3(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}) f(\tau) d\tau$$

4A) (5 pont)

$$y' = -y^2 + 4.$$

Keresd meg a DE fixpontjait!

$$-y^2 + 4 = 0$$

$$y_1 = -2,$$

$$y_2 = 2$$

(1 pont)

Ird fel a fixpontok körüli linearizált közelítő DE-t!

$$\frac{d(-y^2 + 4)}{dy} = -2y,$$

$$y_1: \frac{d}{dt}(y - (-2)) = \frac{d}{dt} \Delta y = -2 \cdot (-2) \Delta y = 4 \Delta y$$

$$y_2: \frac{d}{dt}(y - 2) = \frac{d}{dt} \Delta y = -2 \cdot 2 \Delta y = -4 \Delta y$$

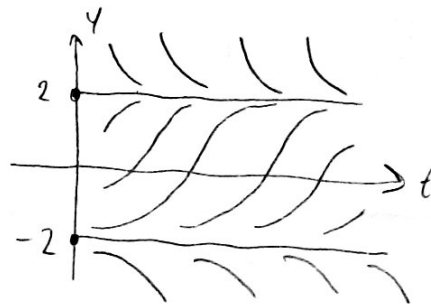
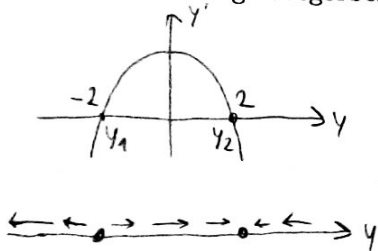
(1 pont)

Ha $y(0) = -0.5$, mennyi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -2$$

(1 pont)

Vázold a DE megoldásgörbeit!



(2 pont)

4B). (5 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1 - 4)(y_2 + 3) \\ (5 - y_1) \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE fixpontjait!

$$\begin{aligned} (y_1 - 4)(y_2 + 3) &= 0 \\ 5 - y_1 &= 0 \end{aligned} \rightarrow y_1 = 5 \rightarrow (5 - 4)(y_2 + 3) = 0 \rightarrow y_2 = -3$$

(2 pont)

$$P_{fix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ird fel a fixpont körüli linearizált közelítő DE-t!

$$J_{ac} = \begin{pmatrix} \partial_{y_1}((y_1 - 4)(y_2 + 3)) & \partial_{y_2}((y_1 - 4)(y_2 + 3)) \\ \partial_{y_1}(5 - y_1) & \partial_{y_2}(5 - y_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_2 + 3 & y_1 - 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 - 5 \\ y_2 - (-3) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix}$$

(2 pont)

$$J_{ac}(P_{fix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1 pont)

2. (3+2+2+3 pont) Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Keress meg A sajátértékeit és sajátvektorait!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6, \quad \lambda_1 = \sqrt{6}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{6}$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{6} & 3 \\ 2 & -\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\sqrt{6}u + 3v = 0$$

$$v = \frac{\sqrt{6}}{3}u = \sqrt{\frac{2}{3}}u$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 3 \\ 2 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{6}u + 3v = 0$$

$$v = -\frac{\sqrt{6}}{3}u = -\sqrt{\frac{2}{3}}u$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Írd fel a DE általános megoldását!

$$\vec{y}_{\text{alt}}(t) = C_1 e^{\sqrt{6}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{6}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 77 \end{pmatrix}$$

Számold ki a DE partikularis megoldásait!

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 77 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_{\text{part}} = \frac{1}{2}(13 + 77 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}) e^{\sqrt{6}t} + \frac{1}{2}(13 - 77 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}) e^{-\sqrt{6}t}$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= 13 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}C_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}C_2 &= 77 \\ C_1 - C_2 &= 77 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}(13 + 77 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}) \\ C_2 &= \frac{1}{2}(13 - 77 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

Mennyi e^{tA} ?

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tSDS^{-1}} = S e^{tD} S^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\sqrt{6}t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{6}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

((2+1)+(3+1)+3 pont)

3a. Legyen $f(t) = t$, $g(t) = (4-t)$. Mennyi $h(t) = (f * g)(t)$?

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau)(4-\tau) d\tau = \int_0^t 4t - (4+t)\tau + \tau^2 d\tau$$

$$= 4t^2 - (4+t)\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} = -\frac{1}{6}t^3 + 2t^2$$

Mennyi $\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$?

= 0 (automatikusan).

Valóban: $-\frac{1}{6} \frac{3!}{s^4} + 2 \cdot \frac{2!}{s^3} = \frac{1}{s^2} \cdot \left(\frac{4}{s} - \frac{1}{s^2} \right)$

3b. Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_1 + 3y_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Mennyi e^{tA} ?

$$e^{tA} = \exp \begin{bmatrix} -2t & 3t \\ 0 & -2t \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \exp \begin{bmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix} \cdot \exp \begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \dots \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3t e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Mi az elozo DE partikularis megoldasa az $(y_1(0), y_2(0))^T = (4, 5)$ kezdeti feltetel mellett?

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3t e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \cdot (4 + 15t) \\ 5 e^{-2t} \end{bmatrix}$$

3c. Legyen $f \in L^2([-\pi, \pi], dx)$ egyenlo nullaval, ha $x < 1$, amugy meg legyen az erteke ketto. Mennyi $\hat{f}_5$, ha $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx}$?

$$\hat{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i5x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{\pi} e^{-i5x} \cdot 2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i5x}}{-5i} \right]_1^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ = -1}}{e^{-i5\pi}} - e^{-i5} \right) \cdot \frac{1}{-5i}$$