1. TANTÁRGYLEÍRÁS

Tantárgy neve: **DIFFERENCIÁLEGYENLETEK**	***Tantárgy Neptun kódja:*** **GEMAN015M** ***Tárgyfelelős intézet:*** Miskolci Egyetem, GÉIK, **Matematikai Intézet**
	Tantárgyelem: kötelező (MSc törzsanyag)
Tárgyfelelős: **Dr. Varga Péter egyetemi docens**	
Javasolt félév: **2**. őszi félév	***Előfeltétel:*** -
Óraszám/hét: 2 óra előadás + 1 óra gyakorlat	***Számonkérés módja:*** **gyakorlati jegy**
Kreditpont: **3**	***Tagozat:*** MSc.

A tantárgy feladata és célja:
A tantárgy célja a kalkulusban megtanult módszerek alkamazása dinamikai rendszerek leírására. A hallgatókkal a kurzus megismerteti a DE-k megoldási módszereit (numerikus és szimbolikus módszerek). A kurzus különös hangsúlyt fektet a homogén és inhomogén lineáris DE rendszerek megoldására.

A tantárgy tematikus leírása:

Közönséges és parciális differenciálegyenletek. Elsőrendű differenciálegyenletek geometriai interpretációja.
Numerikus módszerek (Euler, Heun), a megoldás Taylor sorfejtése, Taylor polinomok hibabecslése.
Homogén lineáris differenciálegyenletrendszerek. Sajátértékek és sajátvektorok.
Mátrixok exponenciális függvénye. Komplex exponenciális függvény.
Nemlineáris DE rendszerek. Linearizálás, stabilitas.
Kezdetiérték feladatok egzisztencia és unicitás tételei.
Inhomogén állandó együtthatós DE (rendszer)-ek. Impulzus és frekvenciaválasz.
Laplace transzformáció és alkalmazásai. Komplex függvények vonalintegráljai.
Parciális DE-k típusai. Fourier sorok, integrálok.
Hőegyenlet és hullámegyenlet.
Laplace operátor és egyenlet

A kurzusra jelentkezés módja: a regisztrációs héten NEPTUN rendszeren keresztül.
A tantárgy felvételének előfeltétele:-
Oktatási módszer: Előadások, példamegoldó gyakorlatok

Félévközi számonkérés módja, követelmények: 2 db zárthelyi dolgozat.

Az aláírás feltételei a félév során:

.

- 2 db zárthelyi dolgozat elégséges szintű teljesítése (elégséges szint: 50%),
- az előadások legalább 60%-ának látogatása és a gyakorlatokon legalább 70%-os részvétel.

A tantárgy lezárásának módja: vizsga vagy megajánlott jegy

Értékelés (*félévközi teljesítmény aránya a beszámításnál, ponthatárok*)**:** ötfokozatú értékelés

A félévi érdemjegy számítása: zárthelyik érdemjegye alapján, vagy a vizsga érdemjegye alapján

Oktatási segédeszközök

Kötelező irodalom:
Rontó Miklós - Raisz Péterné: Differenciálegyenletek műszakiaknak Miskolci Egyetemi Kiadó, 2004.
Rontó Miklós - Mészáros József -: - Tuzson Ágnes:
Differenciál és integrálegyenletek. Komplex függvénytan. Variációszámítás.
Miskolci Egyetemi Kiadó, 1998.
Ajánlott irodalom: :
Scharnitzky V.: Differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2006.
Tóth J., Simon P.: Differenciálegyenletek, Typotex, Budapest, 2005.
Paul Dawkins: Differential Equations, http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/DE.aspx

2. TANTÁRGYTEMATIKA

Differenciálegyenletek
Tantárgytematika (ÜTEMTERV)
Aktuális tanév 2. félév (tavaszi)

Anyagmérnök MSc, I. évfolyam 1. félév

Hét	Előadás	
1.	Közönséges és parciális differenciálegyenletek. Elsőrendű differenciálegyenletek geometriai interpretációja.	
2.	Numerikus módszerek (Euler, Heun), a megoldás Taylor sorfejtése, Taylor polinomok hibabecslése.	
3.	Homogén lineáris differenciálegyenletrendszerek. Sajátértékek és sajátvektorok.	
4.	Mátrixok exponenciális függvénye. Komplex exponenciális függvény.	
5.	Nemlineáris DE rendszerek. Linearizálás, stabilitas.	
6.	Kezdetiérték feladatok egzisztencia és unicitás tételei.	
7.	ZH 1.	
8.	Inhomogén állandó együtthatós DE (rendszer)-ek. Impulzus és frekvenciaválasz.	
9.	Laplace transzformáció és alkalmazásai. Komplex függvények vonalintegráljai.	
10.	Parciális DE-k típusai. Fourier sorok, integrálok.	
11.	Hőegyenlet és hullámegyenlet.	
12.	Laplace operátor és egyenlet	
13.	ZH 2.	
14.	PótZH.	

3. MINTA ZH 1.

Differencialegyenletek. ZH I.

1.
$$y' = f(x, y) = x - y;$$
Mennyi y'' es y''' ? Ird fel y harmadrendu Talor polinomjat az $x = 0$ pont korul, ha $y(0) = 5$!

2.
$$f(x) = 1/x, \quad x_0 = 2;$$
Ird fel f-nek a linearis $f(x_0+\Delta x) \approx T_1(x_0+\Delta x)$ kozeliteset, ha $\Delta x = 0.1$! Mennyi $\max_{z\in[x_0,x_0+\Delta x]}|f''(z)|$? Adj felso korlatot a kozelites $|\text{hiba}(\Delta x)| = |f(x_0 + \Delta x) - T_1(x_0 + \Delta x)|$ hibajara!

3. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-ekre $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!
$$y' = f(x, y) = x - y;$$
Mit josolnak ezek a modszerek y(2.1)-re?

4. Rajzold le az $y' = f(y)$ DE iranymezojet es a megoldasgorbeit! Keresd meg a DE fixpontjait es ird fel a fixponttol valo elteresre vonatkozo DE linearizalt alakjat! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!
$$y' = y(1 - y)(1 + y).$$

5. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d}{dx}y = Ay, \qquad y(0) = v$$
DE-t! Ird fel az altalanos, illetve a partikuralis megoldast! Vizsgald meg az $y = 0$ fixpont stabilitasat! Mennyi $\exp(xA)$? Ird fel a partikularis megoldast e^{xA} segitsegevel!

6. Keresd mag az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait!
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Mennyi $\exp(xA)$?

A MINTA ZH MEGOLDÁSA

Differencialegyenletek. ZH I.

1.

$$y' = f(x,y) = x - y;$$

Mennyi y'' es y''' ? Ird fel y harmadrendu Talor polinomjat az $x = 0$ pont korul, ha $y(0) = 5$!

Megoldas:

$$y'' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right) f; \qquad y''' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f,$$

tehat

$$y'' = -x + y + 1, \quad y''' = x - y - 1,$$
$$y(0) = 5, \;\; y'(0) = f(0,5) = 0 - 5, \;\; y''(0) = -0 + 5 + 1 = 6, \;\; y'''(0) = 0 - 5 - 1 = -6,$$
$$y(x) \approx 5 - 5x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3$$

2.

$$f(x) = 1/x, \;\; x_0 = 2;$$

Ird fel f-nek a linearis $f(x_0+\Delta x) \approx T_1(x_0+\Delta x)$ kozeliteset, ha $\Delta x = 0.1$! Mennyi $\max_{z\in[x_0,x_0+\Delta x]}|f''(z)|$? Adj felso korlatot a kozelites $|\text{hiba}(\Delta x)| = |f(x_0 + \Delta x) - T_1(x_0 + \Delta x)|$ hibajara!

Megoldas:

$$1/(2 + 0.1) = 1/2 - 1/2^2 \cdot 0.1 + \text{hiba}(0.1)$$
$$|\text{hiba}(0.1)| \leq \frac{1}{2}\Delta x^2 \max_{z\in[x_0,x_0+\Delta x]}|f''(z)| = \frac{1}{2}0.1^2 \max_{z\in[2,2+0.1]}|-1/z^2| = \frac{1}{2}0.1^2 \cdot 1/4$$

3. Alkalmazd az Euler, illetve a Heun modszert a kovetkezo DE-ekre $\Delta x = 0.1$ lepeskozzel az $y(2) = 3$ kezdeti feltetel mellett!

$$y' = f(x,y) = x - y;$$

Mit josolnak ezek a modszerek y(2.1)-re?

Megoldas:

$$Euler: \;\; y(2.1) \approx y(2) + (2-3)\cdot 0.1 = 3 + (-1)\cdot 0.1 = 2.9,$$
$$y(2.2) \approx y(2.1) + (2.1 - 2.9)\cdot 0.1$$
$$Heun: \;\; k_1 = f(2,3) = 2 - 3 = -1, \quad k_2 = f(2+0.1, 3 + f(2,3)\cdot 0.1) = 2.1 - 2.9 = -0.8,$$
$$y(2.1) \approx y(2) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\cdot 0.1 = 3 + \frac{1}{2}(-1 - 0.8)\cdot 0.1.$$

1. Rajzold le az $y' = f(y)$ DE iranymezojet es a megoldasgorbeit! Keresd meg a DE fixpontjait es ird fel a fixponttol valo elteresre vonatkozo DE linearizalt alakjat! Vizsgald meg a fixpontok stabilitasat!

$$y' = y(1-y)(1+y).$$

Megoldas:

$y' = f(y) = y(1-y)(1+y) = +y - y^3$

$f'(y) = \frac{d}{dy} f(y) = 1 - 3y^2$. A fixpontok:

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 1, \qquad y_3 = -1,$$

$$f'(y_1) = f'(0) = 1 - 3 \cdot 0^2 = 1 > 0, \qquad f'(1) = -2 < 0, \qquad f'(-1) = -2 < 0.$$

f' elojele alapjan az $y_1,\ y_2,\ y_3$ fixpontok stabilitasa: *instabil, stabil, stabil.*

A linearizalt egyenletek a fixpontok korul:

$$\frac{d}{dx}(y-0) = \frac{d}{dx}\Delta y_1 = 1 \cdot \Delta y_1, \qquad \frac{d}{dx}(y-1) = \frac{d}{dx}\Delta y_2 = -2 \cdot \Delta y_2, \qquad \frac{d}{dx}(y-(-1)) = \frac{d}{dx}\Delta y_3 = -2 \cdot \Delta y_3,$$

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d}{dx} y = Ay, \qquad y(0) = v$$

DE-t! Ird fel az altalanos, illetve a partikuralis megoldast! Vizsgald meg az $y = 0$ fixpont stabilitasat! Mennyi $\exp(xA)$? Ird fel a partikularis megoldast e^{xA} segitsegevel!

Megoldas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sajatertekek: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$. Sajatvektorok:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az altalanos megoldas:

$$y_{alt}(x) = \sum_i C_i e^{\lambda_i x} v_i = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha

$$y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

akkor a partikularis megoldas

$$y_{part}(x) = 4e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mivel mindket sajatertek valos resze pozitiv, igy az $y = 0$ fixpont instabil.
Az xA matrix exponencialis fuggvenye:

$$e^{xA} = e^{xSDS^{-1}} = Se^{xD}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ennek segitsegevel a partikularis megoldas az

$$y_{part}(x) = e^{xA} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

alakban irhato fel.

1. Keresd mag az A matrix sajatertekeit es sajatvektorait!

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mennyi $\exp(xA)$?

Megoldas:

Sajatertek:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2.$$

Az egyetlen sajatvektor:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{vagyis} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\exp(xA)$:

$$\exp(xA) = \exp\left[\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \exp\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \cdots\right] = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 3xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

Itt az elso, $\exp(C + D) = \exp(C) \cdot \exp(D)$ tipusu atalakitast azert lehetett elvegezni, mert esetunkben $[C, D] = CD - DC = 0$ volt:

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Az utolso elotti atalakitasnal pedig azt hasznaltuk ki, hogy

$$\begin{pmatrix} 0 & 3x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = (3x)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

4A) (5 pont)
$y' = -y^2 + 4.$
Keresd meg a DE fixpontjait!

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

Ha $y(0) = -0.5$, mennyi
$\lim_{x\to\infty} y(x) =$ $\lim_{x\to-\infty} y(x) =$

Vazold a DE megoldasgorbeit!

4B). (5 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_2 - 4) \\ (y_1 - 4)(y_2 + 3). \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

Lev. Diff.Egy., 2019.05.18. NEPTUN: :

Név: Aláírás:

A) $y'' - 9y = (e^t - 4)^2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$ Mennyi $Y(s)$? $(\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}})$

Hogy nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa?

Mennyi $y(t)$?

B1) Mi az $y''(t) = 9y(t) + \delta(t)$ DE retardalt fundamentalis megoldasa?

B2) Mi az $y''(t) = 9y(t) + f(t),\ y(t) = f(t) = 0,$ ha $t << 0$ DE megoldasa?

2. (4+2+4 pont) Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_2 \\ 2y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 77 \end{pmatrix}$$

Szamold ki a DE partikularis megoldasait!

3. Legyen $f(t) = 4$, $g(t) = t$. Mennyi $h(t) = (f * g)(t)$?

Mennyi $\mathcal{L}(h) - \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$?

3. Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_1 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Mennyi e^{tA} ?

Mi az elozo DE partikularis megoldasa az $(y_1(0), y_2(0))^T = (4, 5)$ kezdeti feltetel mellett?

Gev. Diff Egy., 2019.05.18. NEPTUN: :

Név: Aláírás:

((3+2+1)+(3+1)) pont

1A) $y'' - 9y = (e^t - 4)^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. Mennyi $Y(s)$?

$= e^{2t} - 8e^t + 16$

$$(s^2 Y(s) - 2\cdot s - 3) - 9Y(s) = \frac{1}{s-2} - 8\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{16}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2-9}\left[2s+3+\frac{1}{s-2} - 8\frac{1}{s-1} + \frac{16}{s}\right]$$

Hogy nez ki $Y(s)$ parcialis tort felbontasa? $s^2-9 = (s+3)(s-3)$

$$Y(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s}$$

Mennyi $y(t)$?

$$y(t) = A e^{-3t} + B e^{3t} + C e^{2t} + D e^{t} + E$$

1B1) Mi az $G''(t) = 9G(t) + \delta(t)$ DE retardalt fundamentalis megoldasa?

$t<0$: $G(t) = 0$

$t \approx 0$: $G(0^+) - G(0^-) = 0$, $G'(0^+) - G'(0^-) = 1$

$t>0$: $G''(t) = 9G(t) \Rightarrow G(t) = A e^{3t} + B e^{-3t}$ $\Longrightarrow G(t) = \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$

$$G(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<0 \\ \frac{1}{6}(e^{3t} - e^{-3t}), & \text{ha } t>0 \end{cases}$$

1B2) Mi az $y''(t) = 9y(t) + f(t)$, $y(t) = f(t) = 0$, ha $t << 0$ DE megoldasa?

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{6}\left(e^{3(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}\right) f(\tau)\, d\tau$$

4A) (5 pont)
$y' = -y^2 + 4.$
Keresd meg a DE fixpontjait!

$-y^2+4=0 \qquad y_1=-2, \qquad y_2=2$

1pont

Ird fel a fixpontok koruli linearizalt kozelito DE-t!

$\frac{d(-y^2+4)}{dy} = -2y,$

y_1:

$\frac{d}{dt}(y-(-2)) = \frac{d}{dt}\Delta y = -2\cdot\overset{y_1}{(-2)}\Delta y = 4\Delta y$

y_2:

$\frac{d}{dt}(y-2) = \frac{d}{dt}\Delta y = -2\cdot\overset{y_2}{2}\Delta y = -4\Delta y$

1pont

Ha $y(0) = -0.5$, mennyi
$\lim_{x\to\infty} y(x) = 2 \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = -2$

1 pont

Vazold a DE megoldasgorbeit!

2pont

4B). (5 pont)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_1-4)(y_2+3) \\ (5-y_1). \end{pmatrix}$$

Keresd meg a DE fixpontjat!

$(y_1-4)(y_2+3)=0$
$5-y_1=0 \longrightarrow y_1=5 \Big\} \longrightarrow (5-4)(y_2+3)=0 \longrightarrow y_2=-3$

2pont

$P_{fix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ird fel a fixpont koruli linearizalt kozelito DE-t!

$Jac = \begin{pmatrix} \partial_{y_1}([y_1-4](y_2+3)) & \partial_{y_2}([y_1-4](y_2+3)) \\ \partial_{y_1}(5-y_1) & \partial_{y_2}(5-y_1) \end{pmatrix}$

1pont

$= \begin{pmatrix} y_2+3 & y_1-4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1-5 \\ y_2-(-3) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix}$

2pont

$Jac(P_{fix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. (3+2+2+3 pont) Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Keresd meg A sajatertekeit es sajatvektorait!

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{bmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6, \quad \lambda_1 = \sqrt{6}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{6}$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{6} & 3 \\ 2 & -\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\sqrt{6}u + 3v = 0$$

$$v = \frac{\sqrt{6}}{3} u = \sqrt{\frac{2}{3}} u$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 3 \\ 2 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{6}u + 3v = 0$$

$$v = -\frac{\sqrt{6}}{3} u = -\sqrt{\frac{2}{3}} u$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Ird fel a DE altalanos megoldasat!

$$\vec{y}_{ált}(t) = C_1 e^{\sqrt{6}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{6}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 77 \end{pmatrix}$$

Szamold ki a DE partikularis megoldasait!

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 77 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 13 \\ \sqrt{2/3}\, C_1 - \sqrt{2/3}\, C_2 &= 77 \\ C_1 - C_2 &= 77 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{2}\left(13 + 77 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) \\ C_2 &= \tfrac{1}{2}\left(13 - 77 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\vec{y}_{part} = \tfrac{1}{2}\left(13 + 77 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) e^{\sqrt{6}t} + \tfrac{1}{2}\left(13 - 77 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) e^{-\sqrt{6}t}$$

Mennyi e^{tA} ?

$$e^{tA} = e^{tSDS^{-1}} = S e^{tD} S^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2/3} & -\sqrt{2/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\sqrt{6} \cdot t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{6} \cdot t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2/3} & -\sqrt{2/3} \end{bmatrix}^{-1}$$

((2+1)+(3+1)+3 pont)

3a. Legyen $f(t) = t$, $g(t) = (4-t)$. Mennyi $h(t) = (f * g)(t)$?

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t (t-\tau)(4-\tau)\,d\tau = \int_0^t 4t - (4+t)\tau + \tau^2\,d\tau$$

$$= 4t^2 - (4+t)\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} = -\frac{1}{6}t^3 + 2t^2$$

Mennyi $\mathcal{L}(h) - \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$?

$= 0$ (automatikusan). Valóban: $-\frac{1}{6}\frac{3!}{s^4} + 2\cdot\frac{2!}{s^3} = \frac{1}{s^2}\cdot\left(\frac{4}{s} - \frac{1}{s^2}\right)$

3b. Legyen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y_1 + 3y_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Mennyi e^{tA} ?

$$e^{tA} = \exp\begin{bmatrix} -2t & 3t \\ 0 & -2t \end{bmatrix} = \exp\left(\begin{bmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \exp\begin{bmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix}\cdot\exp\begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2}_{=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} + \dots\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Mi az elozo DE partikularis megoldasa az $(y_1(0), y_2(0))^T = (4, 5)$ kezdeti feltetel mellett?

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t}\cdot(4+15t) \\ 5e^{-2t} \end{bmatrix}$$

3c. Legyen $f \in L^2([-\pi, \pi], dx)$ egyenlo nullaval, ha $x < 1$, amugy meg legyen az erteke ketto. Mennyi $\hat{f}_5$, ha $f(x) = (1/\sqrt{2\pi})\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{inx}$?

$$\hat{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i5x} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^{\pi} e^{-i5x}\cdot 2\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-i5x}}{-5i}\right]_1^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{e^{-i\cdot 5\pi}}_{=-1} - e^{-i\cdot 5}\right)\cdot\frac{1}{-5i}$$