Ütemterv

az **Analízis II./Matematika II.** c. tárgyhoz (GEMAN 520B, 520-B, 215B)
Járműmérnöki, logisztikai mérnöki, műszaki menedzser, villamosmérnöki, ipari termék- és formatervező mérnöki alapképzési szakos hallgatók részére
2018/2019. tanév II. félév
(2 óra előadás+2 óra gyakorlat)

1. hét (Ea: 02. 11.) Numerikus sorok és konvergenciájuk. Konvergencia-kritériumok. Nevezetes sorok.

2. hét (Ea: 02. 18.) Egyváltozós valós függvénysorok konvergenciája. Hatványsorok konvergenciája. Egyváltozós valós függvények Taylor-sora. Nevezetes függvények Taylor-sora.

3. hét (Ea: 02. 25.) A Fourier-féle sorfejtés. A többváltozós valós függvény fogalma. A kétváltozós függvény értelmezése, ábrázolása, határértéke, folytonossága.

4. hét (Ea: 03. 04.) Nevezetes felületek. A parciális derivált értelmezése, a gradiens vektor, az érintősík egyenlete. A kétváltozós függvény szélsőértéke.

5. hét (Ea: 03. 11.) A kettős integrál értelmezése, tulajdonságai. Új változók bevezetése: polárkoordináták. A kettős integrál alkalmazásai: terület-, térfogat-, felszínszámítás.

6. hét (Ea: 03. 18.) Háromváltozós függvények: parciális deriváltak, gradiens. A hármas integrál. Új változók bevezetése. Hengerkoordináta-rendszer, gömbi koordináta-rendszer. A hármas integrál alkalmazása: térfogatszámítás.

7. hét (Ea: 03. 25.) **I. ZH.**

8. hét (Ea: 04. 01.) A közönséges differenciálegyenlet fogalma, osztályozása. Az elsőrendű közönséges differenciálegyenletek geometriai interpretációja, görbesereg differenciálegyenlete.

9. hét (Ea: 04.08.) A szétválasztható típusú és arra visszavezethető differenciálegyenletek. Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása.

10. hét (Ea: 04. 15.) Hiányos másodrendű differenciálegyenletek. Másodrendű lineáris állandó együtthatójú homogén és inhomogén differenciálegyenletek megoldása.

11. hét (04. 22.) Oktatási szünet (Húsvét hétfő)

12. hét (Ea: 04. 29.) Vektor-skalár függvények értelmezése, differenciálhatósága. Nevezetes térgörbék. Térgörbe ívhossza. Vonalintegrál. A vektor-vektor függvények, vektorterek.

13. hét (Ea: 05. 06.) **II. ZH.**

14. hét (Ea: 05. 13.) Differenciálás vektorterekben: a divergencia és a rotáció fogalma. A nabla- és a Laplace- operátor. Potenciálos terek, a potenciálfüggvény előállítása. Vektor-vektor függvény görbementi (skalár értékű) integrálja. **PótZH** (nem az előadás időpontjában).

Tantárgyi követelmények

1. A tárgy lezárásának módja: aláírás+vizsga (BV) illetve gyakorlati jegy+szigorlat (BF, BJ, BM, BS).
2. Az aláírás/gyakorlati jegy megszerzésének feltételei: Az előadásokon, gyakorlatokon részvétel és a két félévközi zárthelyi mindegyikének legalább elégséges (50%-os) szinten való teljesítése. A zárthelyik időtartama 50 perc, időpontja a szorgalmi időszak 7. és 13. hetére tervezett. A zárthelyi dolgozat értékelésének módja: 0-24 pont: elégtelen, 25-30 pont: elégséges, 31-36 pont: közepes, 37-42 pont: jó, 43-50 pont: jeles.
3. A sikertelen vagy meg nem írt zárthelyik pótlása a 14. héten történik.
4. A (villamosmérnök alapszakos hallgatók számára meghirdetett) vizsga (110 perc időtartamú) írásbeli dolgozatból áll, amely mind elméleti, mind gyakorlati részt tartalmaz. Az értékelés módja: 0-24 pont: elégtelen, 25-30 pont: elégséges, 31-36 pont: közepes, 37-42 pont: jó, 43-50 pont: jeles.
   Jutalompont: a mindkét félévközi zárthelyit külön-külön legalább elégségesre teljesítő hallgató a két zárthelyiben elért összpontszáma alapján jutalompontot kap, mely az első vizsgadolgozat pontszámát növeli az alábbiak szerint: 50-60 pont: 1 jp; 61-70 pont: 2 jp; 71-80 pont: 3 jp; 81-90 pont: 4 jp; 91-100 pont: 5 jp.

Ajánlott irodalom

1. G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass, F. R. Giordano: Thomas-féle Kalkulus 3., Typotex, Budapest, 2011
2. Rontó Miklós – Raisz Péterné: Differenciálegyenletek műszakiaknak, Miskolci Egyetemi Kiadó, 2004
3. B. P. Gyemidovics: Matematikai analízis feladatgyűjtemény, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974
4. Vadászné Bognár Gabriella: Matematika Informatikusok és Műszakiak részére, Miskolci Egyetemi Kiadó, 2003
5. Árvai-Homolya Szilvia: Feladatok az Analízis II. tárgyhoz (elektronikus példatár: www.uni-miskolc.hu/~mathszil), 2016.

Miskolc, 2019. február 11. Árvai-Homolya Szilvia

Matematikai Intézet Miskolc, 2018.

I. ZÁRTHELYI DOLGOZAT ANALÍZIS II. tárgyból
MINTA!!!!

1. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! (4p+5p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$$

2. Határozza meg a következő hatványsor konvergenciaintervallumát. (5p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-e)^n}{(2n-1)!}$$

3. **a)** Írja fel az $f(x) = x^2 \cdot \sin 3x$ Maclaurin-sorát. (5p)

b) Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} |2x|\,, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény Fourier-sorában a konstans tagot és a $\sin 15x$ együtthatójának értékét. (6p)

4. **a)** Vizsgálja meg, hogy az

$$f(x, y) = \left(x^2 + 6y\right) \cdot x + \frac{3}{2}y^2 + 6$$

függvénynek hol és milyen szélsőértéke van. (12p)

b) Számítsa ki az

$$f(x,y) = \left(x^2 + 6y\right) \cdot x + \frac{3}{2}y^2 + 6$$

iránymenti deriváltját a $P_0(1,-2)$ helyen és a $\overrightarrow{v} = (-3,4)$ irányban. (4p)

5. Határozza meg a

$$\iint\limits_T \left(x^3 + 3y^2 + 4\right) dxdy$$

integrál értékét, ahol $T = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$. (9p)

[0] Pontozás: $0-24$ pont: elégtelen, $25-30$ pont elégséges, $31-36$ pont közepes, $37-42$ pont: jó, $43-50$ pont: jeles

II. ZÁRTHELYI DOLGOZAT ANALÍZIS II. tárgyból
Minta!!!

1. a) Határozza meg a következő hármas integrál értékét: (10p)

$$\iiint\limits_V \big(x^2 - y\big)\,dxdydz, \text{ ahol } V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \le x \le 1, x \le y \le \sqrt{x}, 1 \le z \le 2\big\}$$

b) Határozza meg annak a térrésznek a térfogatát, amelyet a $z = 8 - x^2 - y^2$ és a $z = x^2 + y^2$ felületek határolnak. Nevezze meg a határoló felületeket. (10p+2p)

2. Adott az

$$f(x,y,z) = e^{2x-3y} - \frac{z}{x^2+2}$$

háromváltozós függvény. Határozza meg az elsőrendű, valamint az $f_{xz}^{"}$ másodrendű parciális deriváltakat. (6p)

3. Keresse meg az alábbi differenciálegyenlet adott kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását. Adja meg a differenciálegyenlet típusát! (11p)

$$y' \sin x - y \cos x = 1, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

4. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet. Adja meg a differenciálegyenlet típusát! (11p)

$$y'' + 3y' - 4y = e^x + 2x$$

Matematikai Intézet **Név:.......................................**

Miskolc, 2017. 05. 16. Neptun kód:..............................

VIZSGAZÁRTHELYI DOLGOZAT ANALÍZIS II. tárgyból

Villamosmérnök hallgatók részére

2016/17. tanév II. félév

1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket: (6p+6p)

a)

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

b)

$$y'' - 4y = 3e^{2x} + 5$$

[0]Értékelés: 0-19 pont elégtelen, 20-26 pont: elégséges, 27-33 pont közepes, 34-40 pont jó, 41-50 pont jeles

2. **a)** Vizsgálja meg az alábbi sort konvergencia szempontjából. (2p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$$

b) Fejtse Fourier-sorba az alábbi függvényt. (7p)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\pi \leq x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$$

3. Legyen adott az alábbi kétváltozós skalárértékű függvény:

$$f(x,y) = x^4 + 4x + e^{y+1} - y + 3$$

a) Vizsgálja meg, hogy az $f(x,y)$ függvénynek hol és milyen szélsőértéke van. (5p)

b) Írja fel az $z = f(x,y)$ felület $P_0(3,-1)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét. (3p)

4. Határozza meg a
$$z = 4 - x^2 - y^2 \text{ és a } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
által határolt (véges) térrész határoló felületének (teljes) **felszínét**! (7p)

5. Számítsa ki az alábbi integrált:
$$\iiint\limits_V (x+2)\,dxdydz,$$
ahol $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad 0 \leq z\}$. (7p)

6. Adott a $\mathbf{v} = (2y, 2z, y - z + 3)$. Határozza meg az alábbiakat (7p):

a) $div\mathbf{v}$

b) $div\,(rot\mathbf{v})$

c) $\int\limits_g \mathbf{v}d\mathbf{r}$ görbementi integrált, ha a g görbe az $\mathbf{r}(t) = (2 + t, 3t, 1)$ egyenes $-1 \leq t \leq 1$ szakasza.

Matematikai Intézet

Miskolc, 2015. március 17.

Név:..

Neptun kód:............................

I. ZÁRTHELYI DOLGOZAT ANALÍZIS II. tárgyból
A csoport
Megoldások

1. **a)** Vizsgálja meg az alábbi numerikus sort konvergencia szempontjából. (2p)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$$

A sor geometriai sor: $q = \frac{3}{2e}$. Mivel $|q| = \frac{3}{2e} < 1$, a sor **konvergens.**

b) Határozza meg a következő hatványsor konvergenciaintervallumát. (6p)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$$

$x_0 = 2$, $c_n = \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow$

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = 1$$

Azaz a $(1,3)$ intervallum minden pontjában konvergens a sor, csak a végpontokat kell külön megvizsgálni.
Az egyik végpontban $x_1 = 1$ esetén a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

sor alternáló, a Leibniz-kritériumot alkalmazva:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = 0$$

és tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n| = \frac{1}{n^2+1} > |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2+1},$$

így a sor **konvergens**.
A másik végpontban $x_2 = 3$ esetén a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

sorra alkalmazható az az integrálkritrérium:

$$\int_1^\infty \frac{1}{n^2+1}dn = \lim_{R\to\infty}\left[arctgn\right]_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(arctgR - arctg1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

A sor **konvergens.**

Így a konvergenciaintervallum az $[1, 3]$ zárt intervallum.

2. **a)** Írja fel az $f(x) = x \cdot \sin 5x$ Maclaurin-sorát. (2p)

   Mivel $\sin x$ Maclaurin-sora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

   tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens, így $f(x)$ Maclaurin-sora:

$$x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(5x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-25)^n \cdot 5}{(2n+1)!} x^{2n+2}$$

   b) Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } -\pi \le x < \pi \\ f(x+2\pi), & \text{egyébként} \end{cases}$$

   függvény Fourier-sorában a $\sin 2x$ és $\cos 3x$ együtthatójának az értékét. (5p)

   A függvény páratlan $\Rightarrow$Fourier-sora "tiszta szinuszos-sor", így a $\cos 3x$ együtthatója $a_3 = 0$

A $\sin 2x$ együtthatója:

$$b_2 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} 2x \cdot \sin 2x dx\right) = \left| \begin{array}{ccc} u = 2x & \longrightarrow & u' = 2 \\ v' = \sin 2x & \longrightarrow & v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left[2x \cdot \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\pi - \pi + \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = -2$$

3. **a)** Vizsgálja meg, hogy az

$$f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$$

   függvénynek hol és milyen szélsőértéke van. (6p)

   Az értelmezési tartomány: $x \neq 0$ és $y \neq 0$.

Szükséges feltétel:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= y - \frac{8}{x^2} = 0 \\ f'_y(x, y) &= x - \frac{8}{y^2} = 0 \end{aligned}$$

Megoldva az egyenletrendszert az adódik, hogy az $f(x,y)$ függvénynek a $P(2,2)$ helyen lehet szélsőértéke. (Ugyan az egyenletrendszernek a $(0,0)$ is megoldása, de ez nincs benne a függvény értelmezési tartományában.)

Megvizsgáljuk, hogy ez valóban szélsőértékhely-e és ha igen, minimum vagy maximum hely. Ehhez szükség van a másodrendű parciális deriváltak kiszámítására:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \frac{16}{x^3} \Longrightarrow f''_{xx}(2,2)=2 \\ f''_{yy}(x,y) &= \frac{16}{y^3} \Longrightarrow f''_{yy}(2,2)=2 \\ f''_{xy}(x,y) &= 1 \Longrightarrow f''_{xy}(2,2)=1 \end{aligned}$$

Így

$$D(2,2) = 2\cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

vagyis a $P(2,2)$ pont a függvény szélsőértékhelye. Mégpedig mivel $f''_{xx}(2,2)=2>0$, így a $P(2,2)$ pont (lokális) minimumhely.

Minimum érték: $f(2,2)=12$

b) Számítsa ki az

$$f(x,y = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$$

iránymenti deriváltját a $P_0(-1,4)$ helyen és a $\overrightarrow{v} = (\cos 150°, \sin 150°)$ irányban. (3p)

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= y - \frac{8}{x^2} \Longrightarrow f'_x(-1,4) = -4 \\ f'_y(x,y) &= x - \frac{8}{y^2} \Longrightarrow f'_y(-1,4) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Így $grad f(-1,4) = \left(-4, -\frac{3}{2}\right)$, továbbá $\overrightarrow{v}^0 = (\cos 150°, \sin 150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, azaz az iránymenti derivált:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(P_0) = \left(-4, -\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}-3}{2}$$

c) Határozza meg a

$$z = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$$

felület érintősíkjának egyenletét a $P_0(-1,4)$ helyen. (2p)

Az előző feladatban láttuk, hogy $f'_x(-1,4) = -4$ és $f'_y(-1,4) = -\frac{3}{2} \Longrightarrow$a felületi normális az adott pontban

$$\overrightarrow{n} = \left(4, \frac{3}{2}, 1\right).$$

Mivel $z_0 = -10$, az érintősík egyenlete

$$4x + \frac{3}{2}y + z = -8$$

4. Számítsa ki a következő integrált: (4p)

$$\iint\limits_T e^{2x+3y} dxdy, \text{ ahol } T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3-x\right\}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_0^{3-x} e^{2x+3y} dy dx &= \int_{x=0}^{3} \left[\frac{e^{2x+3y}}{3}\right]_0^{3-x} dx = \frac{1}{3}\int_{x=0}^{3} \left(e^{9-x} - e^{2x}\right) dy = \\ \frac{1}{3}\left[-e^{9-x} - \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^3 &= \frac{1}{3}\left(-\frac{3e^6}{2} + e^9 + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$