Matematikai Intézet

Miskolc, 2019. 06. 26.

Név:.....

Neptun kód:.....

SZIGORLATI DOLGOZAT MATEMATIKÁBÓL

Járműmérnöki, logisztikai mérnöki, műszaki menedzser, ipari termék- és formatervező alapszakos hallgatók részére

2018/19. tanév II. félév

1. a) Vizsgálja meg az

$$f(x) = (4x + 2) \cdot e^x$$

függvényt monotonitás és konvexitás szempontjából, valamint adja meg (ha létezik/léteznek) az $f(x)$ szélsőérték pontja(i)nak koordinátáit! (6p)

2. Számítsa ki az alábbi határértékeket (ha léteznek): (2p+2p)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{5x}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+2}}{3^{n-2} + 4^n}$$

3. Adottak az alábbi vektorok:

$\overline{a} = \overline{j} - 2\overline{k}$; $\overline{b} = (2t, -2, 0)$ és $\overline{c} = (2, -2, 1)$.

a) Határozza meg a t valós paraméter értékét úgy, hogy az $\overline{a}$ és $\overline{b}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra! (2 pont)

b) Határozza meg a t valós paraméter értékét úgy, hogy a vektorok bázist alkossanak! (3 pont)

c) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos a $\overline{c}$ vektorral és átmegy a $P(1, 2, 0)$ ponton. (1 pont)

d) Adjon meg egy síkot amely merőleges mind az $\overline{a}$ mind a $\overline{c}$ vektorra.(3 pont)

e) Számítsa ki az $\overline{a}$ és $\overline{c}$ vektorok hajlásszögét. (2 pont)

4. Legyen adott az alábbi kétváltozós skalárértékű függvény:

$$f(x, y) = x^4 - 4x + e^{y+2} - y - 1$$

Vizsgálja meg, hogy az $f(x, y)$ függvénynek hol és milyen szélsőértéke van! (6p)

5. **a)** Adja meg a

$$y' - y = 4e^{-x}$$

differenciálegyenlet $y(0) = 1$ feltételt kielégítő megoldását! (6p)

b)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet! (6p)

$$y'' - 9y = 2\sin 5x$$

6. Legyen adott a $\mathbf{v}$ vektortér a következő módon:

$$\mathbf{v} = (3x^2 - y; 2x + z; 3y - z).$$

a) Határozza meg a $\mathbf{v}$ vektortér divergenciáját és rotációját! (2p)

b) Határozza meg a $\int\limits_g \mathbf{v} d\mathbf{r}$ görbementi integrált, ha a g görbe az $\mathbf{r}(t) = (2t, 3t + 1, -2)$ egyenes $0 \leq t \leq 1$ szakasza! (4p)

7. Határozza meg az R sugarú gömb térfogatát integrálszámítás segítségével! (5p)

Matematikai Intézet

Miskolc, 2018. 12. 19.

Név:.....

Neptun kód:.....

SZIGORLATI DOLGOZAT MATEMATIKÁBÓL

Járműmérnöki, logisztikai mérnöki, műszaki menedzser, ipari termék- és formatervező alapszakos hallgatók részére

2018/19. tanév I. félév

1. a) Vizsgálja meg az

$$f(x) = (2x+1)\cdot e^x$$

függvényt monotonitás és konvexitás szempontjából, valamint adja meg (ha létezik/léteznek) az $f(x)$ szélsőérték pontja(i)nak koordinátáit! (6p)

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = e^x(2x+3) = 0$ (1p) $\quad x = -\frac{3}{2}$ (1p) lehetséges szél. hely

	$x < -\frac{3}{2}$	$x = -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} < x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min hely	$\nearrow$

(1p)

$f''(x) = e^x(2x+5)$ (1p)

	$x < -\frac{5}{2}$	$x = -\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2} < x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	infl. hely	$\cup$

(1p)

$f_{min}\left(-\frac{3}{2}\right) = -2e^{-\frac{3}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{e^3}}$ (1p) $\quad P_{min}\left(-\frac{3}{2}, \frac{-2}{\sqrt{e^3}}\right)$

b) Határozza meg az $f(x) = (2x+1)\cdot e^x$ függvény grafikonja, az x tengely, az y tengely és az $x = 1$ egyenesek által határolt véges síkrész területét! (4p)

$$T = \int_0^1 (2x+1)e^x\,dx = \left| \begin{array}{l} f'(x) = e^x \rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = 2x+1 \rightarrow g'(x) = 2 \end{array} \right|$$

(1p) (1p)

$$= \left[e^x(2x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx = \left[e^x(2x-1)\right]_0^1 = e+1$$

(1p) (1p)

4. Legyen adott az alábbi kétváltozós skalárértékű függvény:

$D_f = \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^2 + 6x + y^3 - 3y + 5$$

Vizsgálja meg, hogy az $f(x,y)$ függvénynek hol és milyen szélsőértéke van. (6p) +1p

$f'_x = 2x + 6$ (1p) $\Rightarrow x = -3$

$f'_y = 3y^2 - 3 \longrightarrow y_1 = 1$, $y_2 = -1$

$P_1(-3,1)$ és $P_2(-3,-1)$ (1p) lehetséges szél. hely (1p)

$f''_{xx} = 2 \qquad f''_{yy} = 6y \qquad f''_{xy} = 0$

	$P_1(-3,1)$	$P_2(-3,-1)$
$f''_{xx} = 2$	2	2
$f''_{yy} = 6y$	6	-6
$f''_{xy} = 0$	0	0
det H	12	-12

(1p)

$\det H(P_1) > 0$ (1p) $\rightarrow P_1$ szél

$f''_{xx}(P_1) > 0$ lok. min hely (1p)

$f_{min}(-3,1) = 9 - 18 + 1 - 3 + 5 = \underline{\underline{-6}}$

$\det H(P_2) < 0 \rightarrow P_2$ nem szél

(1p)

5. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket: (4p+7p)

a)

$$ctg2x \cdot y' - 4y^2 = 1$$

b)

$$y'' + 5y' + 6y = 3x^2 + 1$$

a) $ctg2x \cdot y' = 1 + 4y^2$ $\quad -\frac{1}{2}\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}$

$\int \frac{dy}{1+4y^2}$ 1p $= \int tg2x\,dx$

$\frac{arctg(2y)}{2}$ 1p $= -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$ 2p

b) Homogén ált

$y'' + 5y' + 6y = 0$ 1p

$r^2 + 5r + 6 = 0$ $\quad r_1 = -2$, $r_2 = -3$ 1p

$y = y_{hom} + y_{inh}$ 1p

$y_{hom} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ 1p $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Inhomogén part.mo

$y_{inh} = Ax^2 + Bx + C$ 1p

$y' = 2Ax + B$

$y'' = 2A$

x^2: $6A = 3$ $\quad \boxed{A = \frac{1}{2}}$

x^1: $10A + 6B = 0$ $\quad \boxed{B = -\frac{5}{6}}$

x^0: $2A + 5B + 6C = 1$ 1p

$C = \frac{1 - 1 - 5B}{6} = \frac{25}{36}$

$y_{inh} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{25}{36}$ 1p

6. Legyen adott a $\mathbf{v}$ vektortér a következő módon:

$$\mathbf{v} = grad\Phi,$$

ahol

$$\Phi(x, y, z) = xy^2 + 3z + e^{x+z}$$

Határozza meg a $\int_g \mathbf{v} d\mathbf{r}$ görbementi integrált, ha a g görbe az $\mathbf{r}(t) = (t, 4 + t, 2t)$ egyenes $0 \leq t \leq 1$ szakasza. (3p)

$A = \vec{r}(0) = (0,4,0)$
$B = \vec{r}(1) = (1,5,2)$ 1p

$$\int_g \vec{v}\, d\vec{r} = \Phi(B) - \Phi(A) = \left[xy^2 + 3z + e^{x+z}\right]_{(0,4,0)}^{(1,5,2)}$$ 1p

$$= (25 + 6 + e^3) - (1) = \underline{\underline{30 + e^3}}$$ 1p

7. Határozza meg az alábbi integrál értékét:

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz,$$

ahol $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$. (8p)

gömbi 2p

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz =$$

$$= \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} r^2 \cdot r^2 \cos\vartheta \, dr\, d\varphi\, d\vartheta$$ 2p

$$= \underbrace{\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^3}_{\frac{242}{5}} \underbrace{\left[\varphi\right]_0^{2\pi}}_{2\pi} \underbrace{\left[\sin\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{2} = \underline{\underline{\frac{968\pi}{5}}}$$ 1p 1p 1p 1p