TANTÁRGYI KOMMUNIKÁCIÓS DOSSZIÉ

VARIÁCIÓS ELVEK A MECHANIKÁBAN

GEMET024-B

Miskolci Egyetem
Gépészmérnöki és Informatikai Kar
Műszaki Mechanikai Intézet

HIRDETMÉNY

A **Variációs elvek a mechanikában** (GEMET024-B)
című kötelezően választható tantárgy ütemterve és követelményei

1. hét: Bevezetés, alapfogalmak, ismétlés. A variációs elvek és módszerek helye és szerepe a mechanikában.
2. hét: A varációszámítás klasszikus alapfeladatai. Az alapfeladatok funkcionáljainak származtatása. Rugalmasságtani feladatok variációs megfogalmazása.
3. hét: Függvény variációja, variációs operátor, variációs elv. Funkcionál irány menti (Gâteaux-féle) deriváltja, első és második variációja, extremálisa. A variációszámítás alaptételei.
4. hét: Funkcionál Euler-Lagrange egyenletei. Lényegi és természetes peremfeltételek. Variációs alapfeladatok Euler-Lagrange egyenleteinek származtatása (példák).
5. hét: Kényszerfeltételek figyelembevétele. A Lagrange-féle multiplikátorok és a büntetőparaméterek módszere. A legkisebb hatás elve az anyagi pont mechanikájában.
6. hét: A Hamilton-féle variációs elv anyagi pont, merev test és rugalmas test esetén. A Legendre-féle transzformáció. Kinetikai energia és kinetikai co-energia. Alakváltozási energia és kiegészítő alakváltozási energia.
7. hét: A rugalmasságtan egymezős variációs elvei. A rugalmasságtan többmezős variációs elvei. A Veubeke-Hu-Washizu-féle hárommezős variációs elv. Hellinger-Reissner típusú, két- és hárommezős variációs elvek.
8. hét: Direkt variációs módszerek. A súlyozott maradékok módszere: a Bubnov-Galjorkin-féle, a kollokációs és a legkisebb négyzetek módszere differenciálegyenletek közelítő megoldásának előállítására.
9. hét: Nemlineáris diffrenciálegyenletek megoldásának elvi alapjai a súlyozott maradékok módszerének alkalmazásával. Összefoglalás.

A tantárgy **gyakorlati jeggyel** zárul. Az **elégséges szint** eléréséhez a tantárgyi követelmények **50 %**-át kell teljesíteni, de **szorgalmi időszakban** – a rendszeres tanulás elősegítése és jutalmazása céljából – az aláírás és az elégséges gyakorlati jegy **40 %**-os teljesítménnyel is megszerezhető. Az eredményes munka érdekében a Műszaki Mechanikai Intézet rendszeresen ellenőrzi a hallgatók óralátogatását.

Aláírás és gyakorlati jegy megszerzése a szorgalmi időszakban

Szorgalmi időszakban a hallgatóknak **egy** alkalommal kell önállóan, írásban, **zárthelyi dolgozat** keretében beszámolni a tudásukról. Az önálló foglalkozás időtartama 50 perc, értékelése pontozással történik, maximálisan 40 pont érhető el. A félév-végi **aláírás** és az elégtelentől különböző **gyakorlati jegy megszerzésének feltétele**, hogy a hallgató az önálló foglalkozáson megszerezhető 40 pontból **minimálisan 16 pont**ot (40 %) elérjen. Az önálló foglalkozás *tervezett* időpontja a 8. oktatási hétre esik. A zárthelyin elért pontszám függvényében a gyakorlati jegy az alábbi táblázat szerint kerül megállapításra:

Szorgalmi időszak	Pontszám	0 – 15	16 – 20	21 – 25	26 – 30	31 – 40
	Gyakorlati jegy	elégtelen	elégséges	közepes	jó	jeles

Az a hallgató, aki az első zárthelyin nem éri el a 40 %-os teljesítménynek megfelelő 16 pontot, **pót-zárthelyi dolgozat** megírásával szerezhet aláírást, illetve elégtelentől különböző gyakorlati jegyet. A pót-zárthelyi anyaga felöleli a félév teljes tananyagát, időtartama 50 perc, maximálisan 40 pont érhető el. Az aláírás és az elégtelentől különböző gyakorlati jegy megszerzéséhez a **ponthiánnyal megegyező pontszámot**, 16 pontnál kevesebb hiány esetén **minimálisan 16 pont**ot (40 %) kell elérni. A pót-zárthelyi dolgozat tervezett időpontja a 9. oktatási hétre esik. Azok a hallgatók, akik pót-zárthelyin szereznek aláírást, elégségestől jobb gyakorlati jegyet a legjobb pontszámú zárthelyi alapján kaphatnak.

Aláírás és gyakorlati jegy megszerzése a vizsgaidőszakban

Az a hallgató, aki szorgalmi időszakbeli teljesítményére elégtelen gyakorlati jegyet kapott, a vizsgaidőszakban szerezhet aláírást és elégtelentől különböző gyakorlati jegyet. Az írásbeli **alásíráspótló vizsga** (utógyakorlat) időtartama 50 perc, maximálisan 40 pont szerezhető. Az **aláírás** és az **elégtelentől különböző gyakorlati jegy** megszerzéséhez **minimálisan 20 pont**ot (50 %) kell elérni. Az elért pontszám függvényében a gyakorlati jegy az alábbi táblázat szerint kerül megállapításra:

Vizsgaidőszak	Pontszám	0 – 19	20 – 23	24 – 27	28 – 31	32 – 40
	Gyakorlati jegy	elégtelen	elégséges	közepes	jó	jeles

Ajánlott szakirodalom:

1. Kósa A.: *Variációszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
2. Reddy, J.N.: *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, 2nd ed., Wiley, New York, 2002.
3. Oden, J.T.-Reddy, J.N.: *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1983.

Dr. Bertóti Edgár
egyetemi tanár, intézetigazgató
a tantárgy előadója

Variációs elvek	Név: Kód:	Zárhelyi dolgozat

1. Értelmezze a funkcionál fogalmát! (1 pont)

2. Értelmezze a $f = f[x,\, u(x),\, u'(x)]$ függvény irány menti deriváltját az $u(x)$ helyen, $v(x) \equiv \delta u(x)$ irányban! Mikor nevezzük az f függvényt Gâteaux-differenciálhatónak az $u(x)$ helyen? (2 pont)

3. Ismertesse az

$$I[u(x)] = \int_a^b f[x,\, u(x),\, u'(x)]\,\mathrm{d}x$$

funkcionál extrémumának létezésére vonatkozó tételt (szükséges feltételt), majd ennek alkalmazásával származtassa a funkcionál Euler-Lagrange egyenletét! (3 pont)

4. Igazolja, hogy ha az $I[u(x)]$ funkcionálban szereplő f függvény az x változótól explicit módon nem függ, vagyis $f = f[u(x),\, u'(x)]$, akkor a funkcionál Euler-Lagrange egyenlete az

$$f - u'\frac{\partial f}{\partial u'} = \text{állandó}$$

alakban is felírható (Beltrami-féle azonosság)! (3 pont)

5. Keresett az

$$I[u(x)] = \int_a^b f[x,\, u(x),\, u'(x)]\,\mathrm{d}x$$

funkcionál extrémuma a $g[(u(x),\, u'(x)] = 0$ általános alakú kényszerfeltétel esetén.

(a) Ismertesse a Lagrange-féle multiplikátorok módszerét, majd származtassa a módosított funkcionál Euler-Lagrange egyenleteit! (4 pont)

(b) Mi változik, ha a kényszerfeltételi egyenlet az $\int_a^b g(u,\, u')\,\mathrm{d}x = \ell$ integrál alakban adott? (1 pont)

6. Egy m tömegű anyagi pont konzervatív külső erőrendszer hatására mozog.

(a) Ismertesse a Hamilton-féle variációs elvet (a képletekben megjelenő mennyiségek értelmezésével és megnevezésével)! (2 pont)

(b) Származtassa a Hamilton-elv Euler-Lagrange egyenletét! (2 pont)

(c) Hogyan módosul a variációs elv, ha a külső erőrendszer nem konzervatív? Mutassa meg, hogy a Hamilton-elv egyenértékű a virtuális munka elvvel! (2 pont)

Variációs elvek	Név: Kód:	Zárhelyi dolgozat

7. A Timoshenko-féle rúdmodell mozgásegyenleteit a Hamilton-elvből kiindulva származtatjuk. Az eljárás során alkalmazott lépések közül részletezze az alábbiakat:

   (a) Ismertesse az elmozdulásmezőre vonatkozó kinematikai feltételezéseket! (2 pont)

   (b) Adja meg a zérustól különböző alakváltozási és feszültségi koordináták kiszámítására vonatkozó összefüggéseket! (2 pont)

   (c) Származtassa a kinetikai erőrendszer δW_{m} virtuális munkáját a rúdmodell alapismeretlenjeivel kifejezve! (3 pont)

   (d) Adja meg a rúd igénybevételeinek értelmezését, majd abból kiindulva azok kiszámítási módját a rúdmodell alapismeretlenjeivel! (3 pont)

8. Axiálisan terhelt rúd teljes potenciális energiájából kiindulva képezze a de Veubeke-Hu-Washizu-féle variációs elv funkcionálját a Lagrange-féle multiplikátorok módszerével! Származtassa a funkcionál Euler-Lagrange egyenleteit, majd a multiplikátorok azonosítása után adja meg a hárommezős $F(u, \varepsilon, \sigma)$ funkcionál végleges alakját! (5 pont)

9. Írja fel a Hellinger-Reissner-féle kétmezős variációs elv $F_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{T})$ *dual-mixed* funkcionálját 3D-s lineárisan rugalmas testre! Adja meg (képletekkel) a funkcionál mellékfeltételeit, az Euler-Lagrange egyenleteit, valamint a természetes peremfeltételt! (3 pont)

10. Mi az alapvető különbség a Hellinger-Reissner-féle kétmezős variációs elv *primal-mixed* és *dual-mixed* funkcionáljain alapuló végeselemes approximáció között? Melyik funkcionál eredményez pontosabb (magasabb konvergenciájú) közelítést a feszültségekre? (2 pont)