

Ütemterv

az **Analízis I.** c. tárgyhoz (GEMAN510B, 510-B)

Járműmérnöki, logisztikai mérnöki, műszaki menedzser, villamosmérnöki, ipari termék- és formatervező mérnöki alapképzési szak

2019/20. tanév I. félév

(2 óra előadás+2 óra gyakorlat)

1. hét (Ea: 09. 09.): A valós számsorozat fogalma. Sorozatok monotonitása, korlátossága, határértéke, konvergenciája. Nevezetes sorozatok, az e szám. Műveletek sorozatokkal.
2. hét (Ea: 09. 16.): Az egyváltozós valós függvény definíciója, képe. Nevezetes tulajdonságok: monotonitás, korlátosság, határérték, folytonosság.
3. hét (Ea: 09. 23.): Az inverz függvény. Szakaszonként lineáris függvények. Racionális egész- és törtfüggvények.
4. hét (Ea: 09. 30.): Trigonometrikus és arkuszfüggvények tulajdonságai. Exponenciális, logaritmus, hiperbolikus és area függvények és tulajdonságai.
5. hét (Ea: 10. 07.): Az egyváltozós valós függvény differenciálhatósága, a derivált fogalma. Az alapfüggvények deriváltja. Differenciálási szabályok és alkalmazásuk.
6. hét (Ea: 10. 14.): I. zárthelyi dolgozat
7. hét (Ea: 10. 21.): Az érintő és normális egyenes egyenlete. A differenciálszámítás középérték-tételei. A L'Hospital szabály és alkalmazásai. Magasabbrendű deriváltak. Egyváltozós valós függvény Taylor-polinomja és előállítása.
8. hét (Ea: 10. 28.): Függvényvizsgálat monotonításra, szélsőértékre, konvexitásra. Szöveges szélsőérték feladatok.
9. hét (Ea: 11. 04.): Egyváltozós valós függvény határozatlan integrálja. A primitív függvény fogalma. Alapintegrálok.
10. hét (Ea: 11. 11.): Integrálási módszerek: parciális és helyettesítéses integrálás, racionális törtfüggvények, trigonometrikus és gyökös függvények integrálásának módszerei.
11. hét (Ea: 11. 18.): A határozott integrál fogalma, fontosabb tulajdonságai. A Newton-Leibniz-tétel és alkalmazásai: a határozott integrál kiszámításának módszerei.
12. hét (Ea: 11. 25.): II. zárthelyi dolgozat
13. hét (Ea: 12. 02.): A határozott integrál geometriai alkalmazásai: terület és ívhossz kiszámítása. Az improprius integrál fogalma, kiszámítása.
14. hét (Ea: 12. 09.): Paraméteresen és polárkoordinátásan adott görbék. Pótzárthelyi dolgozatok.

Tantárgyi követelmények

1. A tárgy lezárásának módja: aláírás+vizsga
2. Az aláírás megszerzésének feltételei: A két félévközi zárthelyi mindegyikének legalább elégséges (50%-os) szinten való teljesítése.
A zárthelyik időtartama 50 perc, időpontja a szorgalmi időszak 6. és 12. hetére tervezett.
A sikertelen vagy meg nem írt zárthelyik pótlása a 14. héten történik.
3. A vizsga (110 perc időtartamú, 50 pontos) írásbeli dolgozatból áll, amely mind elméleti, mind gyakorlati részt tartalmaz.
A dolgozat 10 pontos beugrót tartalmaz a differenciál és integrálszámítás témaköréből.
A legalább elégséges jegy megszerzéséhez a beugró feladatok legalább 50%-os teljesítése szükséges.
Az írásbeli dolgozat értékelésének módja: 0-24 pont: elégtelen, 25-30 pont: elégséges, 31-36 pont: közepes, 37-42 pont: jó, 43-50 pont: jeles.
Jutalompont: a mindkét félévközi zárthelyit külön-külön legalább elégségesre teljesítő hallgató a két zárthelyiben elért összpontszáma alapján jutalompontot kap, mely az első vizsgadolgozat pontszámát növeli az alábbiak szerint: 50-60 pont: 1 jp; 61-70 pont: 2 jp; 71-80 pont: 3 jp; 81-90 pont: 4 jp; 91-100 pont: 5 jp.

Kötelező irodalom

1. Tóth Lajosné dr. Tuzson Ágnes: Matematika informatikusok és műszakiak részére I., Miskolci Egyetemi Kiadó, 2003., ISBN 963 661 576 4
2. George B. Thomas, Maurice D. Weir Joel Hass, Frank R. Giordano: THOMAS' Calculus, Pearson Education, Inc, 2005.
3. Dr. Tuzson Ágnes: Példatár és megoldási útmutató a Matematika informatikusok és műszakiak részére I. c. tankönyvhöz, www.uni-miskolc.hu/~mattagn, 2003.

Ajánlott irodalom

1. Denkinger Géza, Gyurkó Lajos: Analízis gyakorlatok, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001., ISBN 9789631946130
2. Dr. Lajkó Károly: Kalkulus I-II. (elektronikus egyetemi jegyzet), mobiDIÁK könyvtár, Debreceni Egyetem, 2003.
3. James Stuart: Calculus: Concepts and Contexts, Cengage Learning, 2009., ISBN 0495559725

Miskolc, 2019. szeptember 09.

Dr. Árvai-Homolya Szilvia
a tárgy jegyzője

Miskolci Egyetem
Matematikai Intézet

Miskolc, 2018. október 15.

Név:

Neptun kód:

Gyak.vez.:

I. ZÁRTHELYI DOLGOZAT ANALÍZIS I. tárgyból
(GEMAN510B, GEMAN510-B)
A csoport

1. Határérték számítással döntse el, hogy az alábbi sorozatok közül melyik konvergens.
A c) esetben adja meg az $\epsilon = 10^{-2}$ -hoz tartozó küszöbszámot is! (13p)

a)

$$a_n = \left(\frac{n+1}{3n} \right)^3 + 4^{\frac{1}{n}}$$

b)

$$a_n = \frac{2^{n+1} + 4^n}{3^{n+2} + 2^{n-1}}$$

c)

$$a_n = \frac{n+2}{n^2-4} \quad (n \neq 2)$$

2. Adott az

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

függvény. Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Felveheti-e a függvény a 0 értéket? (Válaszát indokolja!) (3p)

3. Számítsa ki (ha léteznek) az alábbi határértékeket! (6p)

a)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 1}{x - 2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccctg}(x^2 + 1)$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2 \sin 4x}$$

4. Vázolja az alábbi függvényeket! Adja meg az a) esetben a függvény szakadási helye(i)t is! (12p)

a)

$$f(x) = \operatorname{sgn}((3x - 6)^2(x - 1)^3)$$

b)

$$g(x) = \frac{(x - 2)(x - 1)}{x^3 - 2x^2}$$

5. Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét! (Számológép használata nélkül!) (9p)

a)

$$\operatorname{sh}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$$

b)

$$\operatorname{ch}(\ln 1)$$

c)

$$\arcsin\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$$

6. Függvénytranszformáció segítségével vázolja az $f(x) = 2\arccos(x+3) - \frac{\pi}{2}$ függvényt! Adja meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (7p)

¹Pontozás: 0-24 pont: elégtelen, 25-30 pont: elégséges, 31-36 pont: közepes, 37-42 pont: jó, 43-50 pont: jeles.

Miskolci Egyetem
Matematikai Intézet

Miskolc, 2018. november 26.

Név:

Neptun kód:

Gyak.vez.:

II. ZÁRTHELYI DOLGOZAT ANALÍZIS I. tárgyból
(GEMAN510B, GEMAN510-B)
A csoport

1. Végezze el a kijelölt differenciálásokat: (4p+4p+5p)

a) $\left(\frac{x}{\sqrt{x}} + 3x \cdot \ln x\right)''$

b) $(\operatorname{sh}(1-x) \cdot \operatorname{ch}(1-x))'$

c) $\left(\frac{2^{4x} - 5\arccos x}{\sqrt{\operatorname{tg}(x+\pi) - e}}\right)'$

2. Írja fel az $y = (x + 1) \cdot (3 - x)^2$ görbe $x_0 = -1$ helyen húzott érintőegyenésének egyenletét! (5p)

3. Számítsa ki az alábbi határértékeket! (4p+5p)

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{3x^2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln 2x$$

4. Vizsgálja meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az

$$f(x) = (2x + 1) \cdot e^x$$

függvényt! Határozza meg hol konkáv a függvény! (10p)

5. Számítsa ki a következő integrálokat!(4p+4p+5p)

a)

$$\int \left(\frac{5}{1+x^2} - \sqrt[7]{x^3} + 2 \right) dx$$

b)

$$\int \operatorname{ctg} 2x dx$$

c)

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt[4]{(\cos x - 1)^3}} dx$$

¹Pontozás: 0-24 pont: elégtelen, 25-30 pont: elégséges, 31-36 pont: közepes, 37-42 pont: jó, 43-50 pont: jeles.

Miskolci Egyetem

Matematikai Intézet

Miskolc, 2019. január 22.

Név:

Neptun kód:

ALÁÍRÁSPÓTLÓ/VIZSGADOLGOZAT ANALÍZIS I. tárgyból
(GEMAN510B, GEMAN510-B)

Járműmérnöki, logisztikai mérnöki, műszaki menedzser, ipari termék- és formatervező
mérnöki és villamosmérnöki alapszakos hallgatók részére

2018/2019. tanév I. félév

1. Ebből a feladatból min. 5 pont elérése szükséges a sikeres vizsgához!

a) Végezze el a kijelölt differenciálást! (2p)

$$\left(\left(\frac{3x}{\sqrt{x}} - 1 \right) \cdot \ln x \right)' = \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} \ln x + \left(\frac{3x}{\sqrt{x}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x}$$

(1p) (1p)

b) Végezze el a kijelölt differenciálást! (2p)

$$\left(\frac{\cos x + e^{2x+1}}{\arcsin x} \right)' = \frac{(-\sin x + 2e^{2x+1}) \cdot \arcsin x - (\cos x + e^{2x+1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}$$

(2p)

c) Határozza meg az alábbi integrált! (2p)

$$\int \left(\frac{3}{x^2+1} - \operatorname{sh} x \right) dx = 3 \operatorname{arctg} x - \operatorname{ch} x + C$$

(1p) (1p)

d) Határozza meg az alábbi integrált! (2p)

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} f' = x^2 \\ g = \ln x \end{array} \right| \begin{array}{l} f = \frac{x^3}{3} \\ g' = \frac{1}{x} \end{array} = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

e) Határozza meg az alábbi integrált! (2p)

$$\int \frac{3x+1}{x^2} dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = 3 \ln |x| - \frac{1}{x} + C$$

(1p) (1p)

2. a) Vizsgálja meg a következő sorozatot monotonitás, korlátosság, konvergencia szempontjából! Ha konvergens a sorozat, adja meg az $\varepsilon = 10^{-2}$ -hoz tartozó küszöbszámot! (5p)

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = -\frac{1}{3} \\ a_3 = \frac{1}{4} \quad a_4 = -\frac{1}{5}$$

Nem monoton (1p) (alt. sorozat)

Korl $-\frac{1}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (2p)

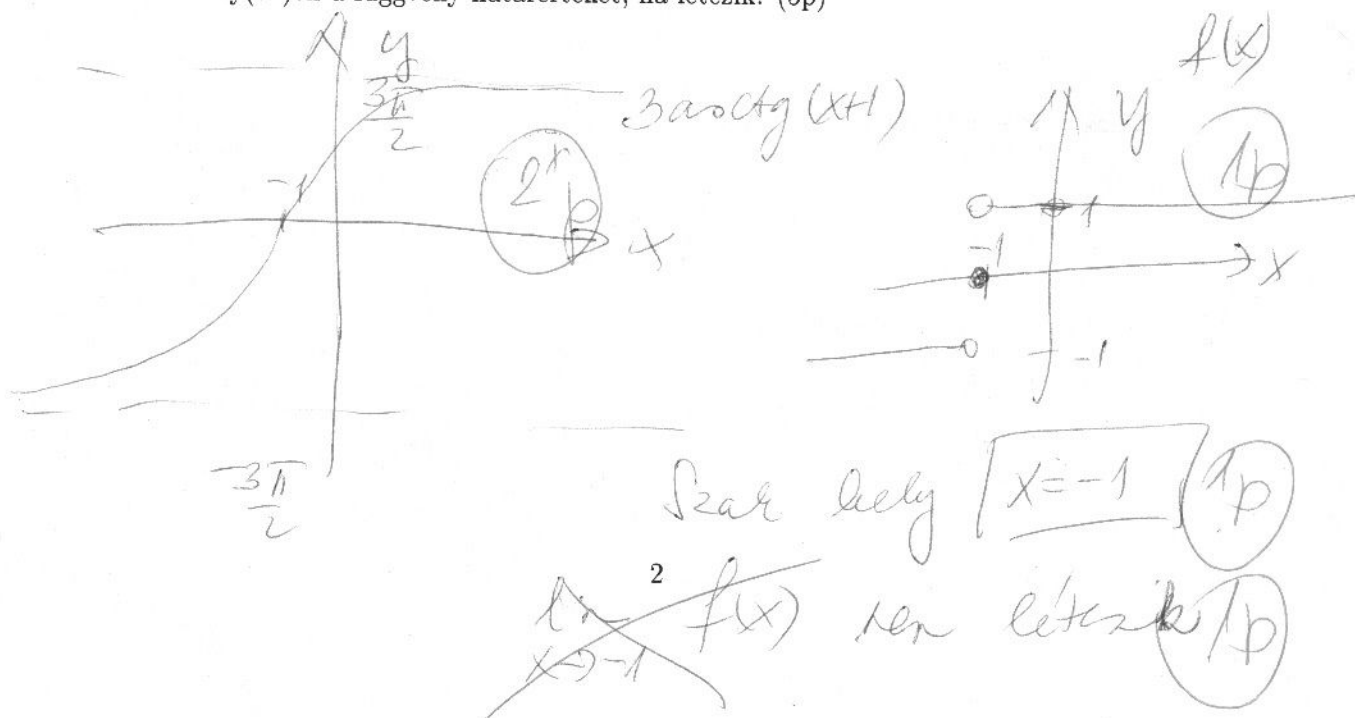
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (1p) konv $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow 99 \leq n$
 $n_0 = 99$ (1p)

- b) Számítsa ki az alábbi határértéket! (3p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{5x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{10x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{10} = -\frac{1}{10} \quad (1p)$$

3. a) Vázolja az $f(x) = \operatorname{sgn}(3 \arctg(x+1))$ függvény grafikonját!

- b) Határozza meg az $f(x)$ függvény szakadási helyét (helyeit)! Adja meg a szakadási hely(ek)en a függvény határértékét, ha létezik! (5p)



8) $f'(1) = -15$ $y + g = -15(x-1)$ (1p)

c) $T = \int_2^3 |x^5 - 10x^2| dx = \int_2^{\sqrt[3]{10}} (10x^2 - x^5) dx + \int_{\sqrt[3]{10}}^3 (x^5 - 10x^2) dx$ (1p)

4. a) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = x^5 - 10x^2$$

függvény esetén. (Ábrázolja is a függvényt!)

b) Írja fel az inflexiós helyen az érintőegyenest!

c) Határozza meg az $x^5 - 10x^2$ görbe, az x tengely, az $x = 2$ és az $x = 3$ egyenesek által határolt síkrész (12p)

a) $D_f = \mathbb{R}$ (1p)

2h $x^2(x^3 - 10) = 0$
 $x_1 = 0$
 $x_2 = \sqrt[3]{10}$

y tengelyen $f(0) = 0$

Szétválasztás $f'(x) = 5x^4 - 20x = 0$ (1p)

$5x(x^3 - 4) = 0$
 $x_1 = 0$
 $x_2 = \sqrt[3]{4}$ lehetséges inf. hely

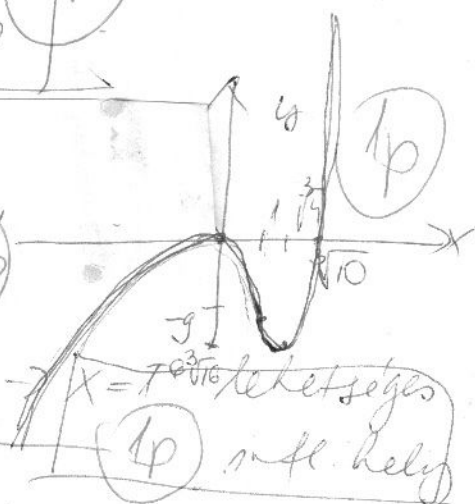
	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt[3]{4}$	$x = \sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{4} < x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\rightarrow$	lok. max. hely	$\downarrow$	lok. min. hely	$\rightarrow$

$P_{\max}(0, 0)$ (1p)

$P_{\min}(\sqrt[3]{4}, -6\sqrt[3]{16})$ (1p)

Konv + inflex.

$f''(x) = 20x^3 - 20 = 0$



	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	inf. hely	$\cup$

$P_{\inf}(1, -9)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2(x^3 - 10) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(x^3 - 10) = +\infty$ $R_f = \mathbb{R}$ (1p)

5. Határozza meg a következő kifejezés pontos értékét (számológép használata nélkül!) (3p)

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch}\left(\ln \frac{1}{2}\right) + \arcsin \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{e^{\ln \frac{1}{2}} + e^{-\ln \frac{1}{2}}}{2} + \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + 2}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{4} + \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

6. Határozza az

$$f(x) = \ln x$$

függvény 4. rendű Taylor-polinomját az $x_0 = 1$ helyen! (4p)

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \rightarrow f^{(4)}(1) = -6$$

$$\begin{aligned} T_4(f(x))|_{x_0=1} &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 - \frac{6}{24}(x-1)^4 \\ &= \left[(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \right] \end{aligned}$$

7. Számítsa ki a következő integrált!(4p)

$$\int_1^2 \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx = \int_1^2 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{x}{(x+1)(x+2)}$$

$$A+B=1 \quad 2A+B=0$$

$$A=-1 \quad B=2$$

$$= \left[-\ln|x+1| + 2\ln|x+2| \right]_1^2 = (-\ln 3 + 2\ln 4) - (-\ln 2 + 2\ln 3) = 2\ln 4 + \ln 2 - 3\ln 3 = \ln \frac{32}{27}$$

8. Az $y = \sin 2x$ görbe $0 \leq x \leq \pi$ ívét megforgatjuk az x tengely körül. Határozza meg a keletkező forgástest térfogatát!(4p)

$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 2x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 4x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 4x}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

¹Pontozás: 0-24 pont: elégtelen, 25-30 pont: elégséges, 31-36 pont: közepes, 37-42 pont: jó, 43-50 pont: jeles. Sikeres aláírás: 20-50 pont