MATEMATIKAI ANALÍZIS I.

<table>
<tr><td>Tárgynév:</td><td colspan="5">Matematikai analízis I.</td></tr>
<tr><td>Rövid név:</td><td colspan="3">Analízis I.</td><td>Kód:</td><td>GEMAN151-B</td></tr>
<tr><td>Angol név:</td><td colspan="5">Analysis I.</td></tr>
<tr><td>Tanszék:</td><td colspan="5">Analízis Tanszék</td></tr>
<tr><td>Tárgyfelelős:</td><td colspan="5">Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia</td></tr>
<tr><td>Előtanulmányok:</td><td colspan="3">-</td><td>Kódja:</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Kredit:</td><td>5</td><td colspan="2">Követelmény:</td><td colspan="2">aláírás és kollokvium</td></tr>
<tr><td>Heti óraszámok:</td><td>Előadás: 3</td><td>Gyakorlat:</td><td>2</td><td>Labor:</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Oktatási cél:</td><td colspan="5">A matematikai analízis alapjainak elsajátítása.</td></tr>
<tr><td>Tárgy tartalom:</td><td colspan="5">Halmazok, műveletek halmazokkal. Relációk, függvények. Valós számok és tulajdonságaik. A valós számok topológiája. Számosság. Számsorozatok, montonitás, korlátosság, részsorozat. Konvergens sorozatok, műveletek konvergens sorozatokkal, rendezés. Cauchy-féle konvergencia kritérium. Nevezetes sorozatok. Sorok. Konvergencia kritériumok sorokra. Függvények folytonossága, műveletek folytonos függvényekkel. Függvények határértéke, műveletek határértékekkel, egyenlőtlenségek. Határérték és folytonosság kapcsolata. Monoton függvények. Racionális egész és racionális törtfüggvények ábrázolása. Függvénysorozatok és függvénysorok. Cauchy-Hadamard tétel. Elemi függvények. Differenciálszámítás és alkalmazásai. Paraméteresen és polárkoordinátásan adott görbék.</td></tr>
<tr><td>Irodalom:</td><td colspan="5">G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass, F. R. Giordano: Thomas-féle Kalkulus 1., Typotex, Budapest, 2006.
Dr. Lajkó Károly: Kalkulus I-II. (elektronikus egyetemi jegyzet)
Császár Ákos: Valós analízis I-II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
B. P. Gyemidovics: Matematikai analízis feladatgyűjtemény, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
Denkinger Géza –Gyurkó Lajos: Analízis Gyakorlatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Jellemző oktatási módok:</td></tr>
<tr><td>Oktatási nyelv:</td><td colspan="5">Magyar</td></tr>
<tr><td>Előadás:</td><td colspan="5">Minden hallgatónak előadás, tábla használatával.</td></tr>
<tr><td>Gyakorlat:</td><td colspan="5">Tantermi gyakorlatok, táblahasználat.</td></tr>
<tr><td>Konzultáció:</td><td colspan="5">Időpontja: csütörtök 12^{00} - 14^{00}. Helye: A/4. ép. 333. szoba.
A konzultációra e-mailben kell jelentkezni (matszisz@uni-miskolc.hu) legkésőbb az adott hét keddjén 14^{00}-ig!</td></tr>
<tr><td>Évközi feladatok, zárthelyik:</td><td colspan="5">Két 50 perces évközi zárthelyi dolgozat. A zárthelyi dolgozatok tervezett időpontja a 42. és a 48. naptári hét. A zárthelyi dolgozatok pótlására az utolsó oktatási héten kerül sor (50. naptári hét).</td></tr>
<tr><td>Lezárási feltételek:</td><td colspan="5">Gyakorlatokon aktív részvétel; a két évközi zárthelyi dolgozat eredményes (legalább 50%) megírása. Végleges aláírás megtagadást kapnak azok a hallgatók, akik egyetlen zárthelyi dolgozat megírásán sem vesznek részt vagy háromnál több igazolatlan óralátogatási mulasztásuk van.
A tárgy kollokviummal zárul. A vizsgajegy 110 perces írásbeli dolgozat sikeres teljesítésével szerezhető meg. A vizsgadolgozat értékelése:
0-24: elégtelen (1); 25-30 elégséges (2); 31-36: közepes (3); 37-42: jó (4);
43-50: jeles (5).</td></tr>
</table>

Ütemterv

1. hét	Halmazelméleti alapfogalmak, műveletek halmazokkal. Részhalmazok és komplementerek tulajdonságai.
2. hét	Rendezett elempárok. Halmazok direkt szorzata. A direkt szorzat tulajdonságai. Bináris relációk. A függvény fogalma, helyettesítési értéke. Szűrjektív, injektív és bijektív függvény. Összetett és inverz függvény.
3. hét	Racionális és irracionális számok. A valós számok halmaza. Korlátos halmaz, pontos alsó és felső korlát. Teljes indukció elve. Bernoulli-féle egyenlőtlenség. Valós szám abszolút értéke. Intervallumok.
4. hét	Numerikus sorozatok. Korlátos sorozatok. Konvergens sorozatok. Sorozatok torlódási pontja. Konvergens sorozatok tulajdonságai. Rendőr-elv. Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel. Cauchy-sorozatok. Cauchy-féle konvergencia kritérium. Végtelenhez divergáló sorozat. Nevezetes sorozatok.
5. hét	Numerikus sorok, konvergencia kritériumok pozitív tagú sorokra. Alternáló sorok, Leibniz-kritérium.
6. hét	**I. zárthelyi dolgozat.**
7. hét	Egyváltozós valós függvény. Összetett függvény, inverz függvény. Monotonitás és korlátosság. Konvex, konkáv, páros, páratlan, periodikus függvények. Függvény minimuma és maximuma. Egyváltozós függvény határértéke. Baloldali és jobboldali határérték. Végtelen határérték, határérték a végtelenben.
8. hét	Folytonos függvények. Balról, ill. jobbról folytonos függvény fogalma. Szakadási helyek. Egyenletes folytonosság. Szakaszonként lineáris függvények.
9. hét	Nevezetes függvények (racionális egész és racionális törtfüggvények, trigonometrikus függvények és inverzeik, hiperbolikus függvények és inverzeik). Függvénysorozatok és függvénysorok. Hatványsorok. Elemi függvények.
10. hét	Egyváltozós függvény differenciálhányadosának határátmenetes megfogalmazása. A differenciálhányados törtmentes megfogalmazása. A függvény differenciálja. Elemi függvények deriváltjai. Differenciálási szabályok. A differenciálszámítás középérték tételei.
11. hét	A differenciálszámítás alkalmazásai. Érintő, normális egyenlete. Taylor-polinom, Taylor-formula. L'Hospital-szabály. Teljes függvényvizsgálat I.
12. hét	**II. zárthelyi dolgozat**.
13. hét	Teljes függvényvizsgálat II. Polárkoordinátás megadású görbék.
14. hét	Paraméteres megadású görbék. Pótzárthelyi dolgozatok.

Miskolc, 2019. szeptember 05.

Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2018. október 16.

Név:..

Neptun kód:..

Gyakorlatvezető neve:..

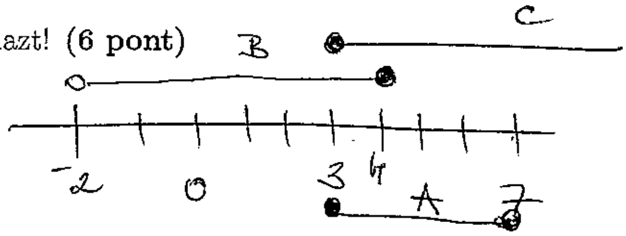
I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
A változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

$A = [3, 7]$ 1

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-5| \leq 2\}$, $B = (-2, 4] \subset \mathbb{R}$, és $C = [3, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

   (a) Határozza meg az $X = [\underbrace{(A \cup B) \cap C}_{A}] \cup [C \setminus (A \setminus B)]$ halmazt! **(6 pont)**



$A \cup B = (-2, 7]$ 1

$(A \cup B) \cap C = [3, 7] = A$ 1

$A \setminus B = (4, 7]$ 1

$C \setminus (A \setminus B) = [3, 4] \cup (7, +\infty)$ 1

$X = A \cup (C \setminus (A \setminus B)) = C = [3, +\infty)$ 1

   (b) Határozza meg az $A \triangle B$ halmazt! **(3 pont)**

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (-2, 3) \cup (4, 7]$ 1

$A \setminus B = (4, 7]$ 1

$B \setminus A = (-2, 3)$ 1

   (c) Diszjunktak-e az $\mathbb{R}^-$ és az $A \cap C$ halmazok? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

$A \cap C = A \subset \mathbb{R}^+$

$A \cap \mathbb{R}^- = \emptyset \Rightarrow$ diszjunktak 3

(nincs közös elem)

$$1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2=\frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (**6 pont**)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

1.) $n=1$ esetén B.o.: $1^2=1$, J.o.: $\frac{1\cdot 3}{3}=1$ } B.o. = J.o. 1
$n=1$-re igaz.

2.) Tfh. $l\in\mathbb{N}$ esetén fennáll az egyenlőség:
$$1^2+3^2+5^2+\dots+(2l-1)^2=\frac{l\cdot(4l^2-1)}{3}$$ 1

3.) Bizonyítjuk $(l+1)\in\mathbb{N}$ esetén. Igazoljuk, hogy
$$1^2+3^2+\dots+(2l-1)^2+(2l+1)^2=\frac{(l+1)(4(l+1)^2-1)}{3}$$

B.o.: $\underbrace{1^2+3^2+\dots+(2l-1)^2}_{2.)}+(2l+1)^2=$ 4

$$=\frac{l(4l^2-1)}{3}+\frac{3\cdot\overbrace{(2l+1)^2}^{4l^2+4l+1}}{3}=\frac{4l^3-l+12l^2+12l+3}{3}=$$

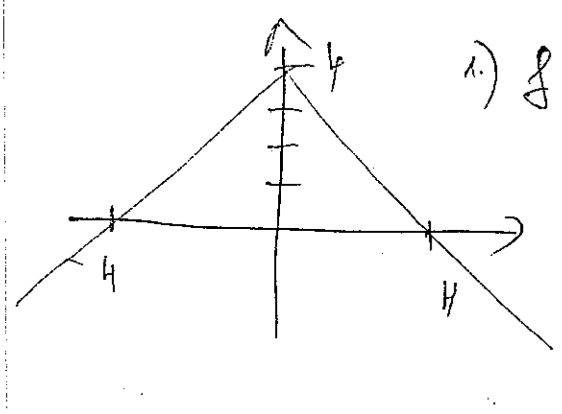
$$=\frac{4l^3+12l^2+11l+3}{3}=\frac{(l+1)\cdot(4(l+1)^2-1)}{3}\ \text{: J.o.}$$

Az állítás igaz.

$$\frac{(l+1)\cdot(4l^2+8l+3)}{3}=\frac{4l^3+8l^2+3l+4l^2+8l+3}{3}=\frac{4l^3+12l^2+11l+3}{3}$$

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (**5 pont**)

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=4-|x|$$



1.) $f(\mathbb{R})=(-\infty,4]\neq\mathbb{R}$, a fgv. nem szürjektív 2

2.) f nem injektív, mert pl. $f(-4)=f(4)=0$, bár $-4\neq$ 2

3.) f tehát nem bijektív. 1

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(15 pont)**

(a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(4-3n)(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-1}{-3n^2-2n+8} = \frac{-4}{3}$ 3

(b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{8^{n+2}}{5^{n-2}+3\cdot 2^{3n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{64\cdot 8^n}{\frac{1}{25}\cdot 5^n + 6\cdot 8^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{64}{\frac{1}{25}\underbrace{\left(\frac{5}{8}\right)^n}_{\to 0}+6} =$

$= \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$ 3

(c) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n} + \left(5+\frac{1}{n}\right)^2\right] = \Big(\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{e^2}\Big)^2 + \Big(\lim\limits_{n\to\infty}\big(5+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{0}\big)\Big)^2$

$= e^4 + 25$ 3

(d) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (n-\sqrt{n^2+4n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n}\right)\cdot\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{n+\sqrt{n^2+4n}} =$ 3

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}-4n}{n+\sqrt{n^2+4n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4}{1+\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{4}{n}}_{\to 0}}} = -2$

(e) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(\sqrt[n]{30n^4}-3\right) = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{30}}_{1}\cdot\Big(\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}_{1}\Big)^4 - 3 =$

$= 1-3 = -2$ 3

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! **(12 pont)**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+3}} = \frac{4}{27} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad -1 < q = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ konvergens mértani sor

$$S = \frac{4}{27} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 \right) = \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{27}$$

3

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n-1)}{(4-3n)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, mert

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-4}{3} \neq 0.$ (divergencia-kritérium)

3

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!} \qquad a_n = \frac{8^n}{n!} > 0, \quad a_{n+1} = \frac{8^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{8^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 \cdot \cancel{8^n} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1) \cdot \cancel{8^n}} =$$

$= 0 < 1 \Rightarrow$ A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ konvergens.

(D'Alembert-féle hányados kritérium)

3

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{4^{2n}} \qquad a_n = \frac{n^{100}}{4^{2n}} = \frac{n^{100}}{16^n}$

3

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{100}}{16} = \frac{1}{16} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergens.

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2018. október 16.

Név:.....................................

Neptun kód:.....................................

Gyakorlatvezető neve:.............................

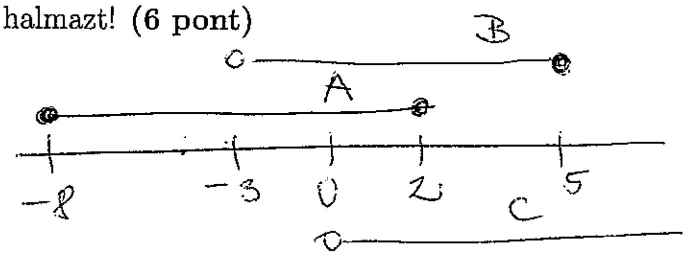
I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
B változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

$A = [-8, 2]$ 1

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| \leq 5\}$, $B = (-3,5] \subset \mathbb{R}$, és $C = \mathbb{R}^+$.

   (a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cap [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! **(6 pont)**



$A \cap B = (-3, 2]$ 1

$(A \cap B) \cup C = (-3, +\infty)$ 1

$A \setminus C = [-8, 0]$ 1

$B \setminus (A \setminus C) = (0, 5]$ 1

$X = (0, 5]$ 1

   (b) Határozza meg az $Y = A \triangle B$ halmazt! **(3 pont)**

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = [-8, -3] \cup (2, 5]$ 1

$A \setminus B = [-8, -3]$ 1

$B \setminus A = (2, 5]$ 1

   (c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

$X \cap Y \neq \emptyset$, mert pl. $5 \in (X \cap Y)$, a két halmaz nem diszjunkt. 3

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (**6 pont**)

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$$

1.) $n=1$ esetén: B.o.: $1\cdot 1! = 1$

J.o.: $2! - 1 = 2 - 1 = 1$ } B.o. = J.o. igaz. 1

2.) Tfh: $l \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás:

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + l\cdot l! = (l+1)! - 1 \quad 1$$

3.) Bizonyítsuk $(l+1) \in \mathbb{N}$ esetén. Igazoljuk, hogy $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + l\cdot l! + (l+1)(l+1)! = (l+2)! - 1$

B.o.: $\underbrace{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + l\cdot l!}_{2.)} + (l+1)(l+1)! =$ 4

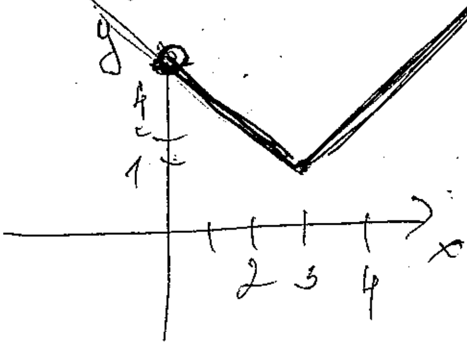
$= (l+1)! - 1 + (l+1)(l+1)! = (l+1)!\,(\underbrace{1 + l + 1}_{l+2}) - 1 =$

$= (l+2)! - 1$: J.o.

Az állítás tehát igaz. □

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (**5 pont**)

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = |x-3| + 1$$ 2



1.) $f(\mathbb{R}^+) = [1, +\infty) \neq \mathbb{R}^+$ így f nem szürjektív

2.) f nem ~~bijektív~~ injektív, mert $f(2) = f(4) = 2$, de $2 \neq 4$. 2

3.) f nem bijektív 1

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(15 pont)**

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)(n-3)}{(1-5n)(2n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-9}{-10n^2+7n-1} = -\dfrac{1}{10}$

3

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9^{n+2}}{3^{n+2}+3\cdot 2^{3n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{81\cdot 9^n}{9\cdot 3^n+12\cdot 8^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{81\underbrace{\left(\frac{9}{8}\right)^n}_{\to+\infty}}{9\underbrace{\left(\frac{3}{8}\right)^n}_{\to 0}+12} = +\infty$ (divergens)

3

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1-\dfrac{3}{2n}\right)^{n+2}+\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^2\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-3/2}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-3/2}{n}\right)^2}_{1}$

$+ \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^2}_{1} = e^{-3/2}+1 = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}+1$

3

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left((n+2)-\sqrt{n^2+4n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left((n+2)-\sqrt{n^2+4n}\right)\cdot\dfrac{(n+2)+\sqrt{n^2+4n}}{(n+2)+\sqrt{n^2+4n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2-n^2-4n}{(n+2)+\sqrt{n^2+4n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cancel{n^2}+\cancel{4n}+4-\cancel{n^2}-\cancel{4n}}{(n+2)+\sqrt{n^2+4n}}$

$= 0$

3

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{100n^3}-5\right) =$

$= \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{100}}_{1}\cdot\Big(\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}_{1}\Big)^3-5 = 1-5=-4$

3

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! **(12 pont)**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{2n+1}} = \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $-1 < q = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ konvergens mértani sor

$$S = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 \right) = \frac{5}{2}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

3

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n-3)}{(1-5n)(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-1}{10} \neq 0.$$

3

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$ $\quad a_n = \frac{n!}{n^{n+1}} > 0$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}}$

konvergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{n!} =$$

3

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)} \cdot n^n \cdot n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^{n+1} \cdot \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$$

$\frac{1}{e} < 1$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{300}}{3^{3n}}$ $\quad a_n = \frac{n^{300}}{27^n} > 0$, Cauchy-féle gyökkritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{300}}{27} = \frac{1}{27} < 1 \Rightarrow$$ a sor konvergens

3

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2018. október 16.

Név:..

Neptun kód:..

Gyakorlatvezető neve:..............................

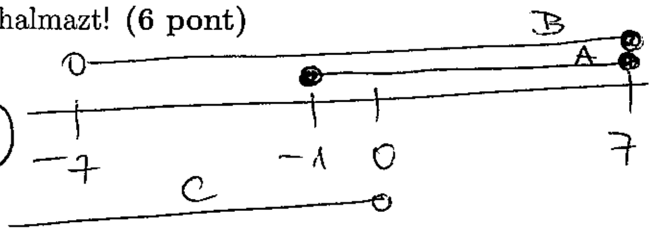
I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
C változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

$A = [-1, 7]$ 1

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq 4\}$, $B = (-7, 7] \subset \mathbb{R}$, és $C = \mathbb{R}^-$.

(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cup [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! **(6 pont)**



$A \cap B = A$ 1

$(A \cap B) \cup C = A \cup C = (-\infty, 7]$ 1

$B \setminus (A \setminus C) = (-7, 0)$ 1

$A \setminus C = [0, 7]$ 1

$X = A \cup C = (-\infty, 7]$ 1

(b) Határozza meg az $Y = A \triangle B$ halmazt! **(3 pont)**

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \setminus A = (-7, -1) = Y$ 1

$A \cup B = B$ 1

$A \cap B = A$ 1

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

$\left.\begin{array}{l} X = (-\infty, 7] \\ Y = (-7, -1) \end{array}\right\} \quad Y \subset X$, nem diszjunktak,

3

mert $X \cap Y \neq \emptyset$.

$$1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\dots-\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{n!}$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (**6 pont**)

$$1-\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{n!}$$

1.) $n=2$ esetén:

B.o.: $1-\frac{1}{2!}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

J.o.: $\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$

B.o. = J.o. Igaz. 1

2.) Tfh. $l\in\mathbb{N}$ esetén igaz:

$$1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\dots-\frac{l-1}{l!}=\frac{1}{l!}$$ 1

3.) Biz. $(l+1)\in\mathbb{N}$-re. Igazoljuk, hogy

$$1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\dots-\frac{l-1}{l!}-\frac{l}{(l+1)!}=\frac{1}{(l+1)!}$$

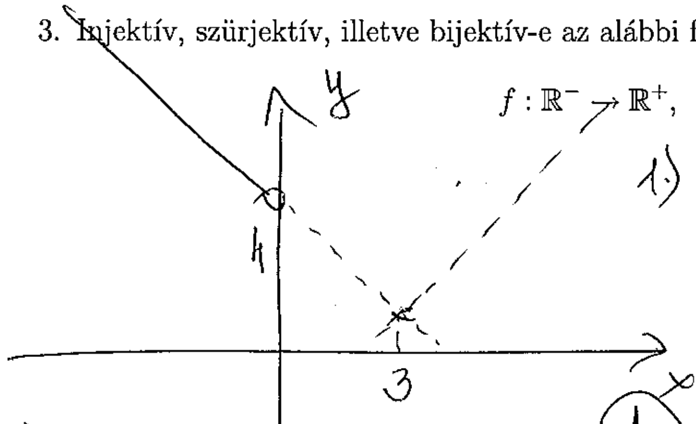
B.o.: $\underbrace{1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-\dots-\frac{l-1}{l!}}_{2.)}-\frac{l}{(l+1)!}=$ 4

$$=\frac{1}{l!}-\frac{l}{(l+1)!}=\frac{l+1-l}{(l+1)!}=\frac{1}{(l+1)!}=\text{J.o.}$$

Az állítás igaz. $\square$

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (**5 pont**)

$$f:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^+,\qquad f(x)=|x-3|+1$$



1.) $f(\mathbb{R}^-)=(4,+\infty)\neq\mathbb{R}^+$, így f nem szürjektív 2

2.) f injektív, mert $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^+$, $x_1\neq x_2$ ~~esetén~~ $f(x_1)\neq f(x_2)$ 2

3.) f nem bijektív, mert nem szürjektív. 1

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(15 pont)**

(a) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+4)(n-4)}{(1-7n)(2n+1)} =$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-16}{-14n^2-5n+1} = \frac{-1}{14}$

3

(b) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{4^{n+2}}{8^{n-2}+3\cdot 3^{3n+1}} =$ $\lim_{n\to\infty} \frac{16\cdot 4^n}{\frac{1}{64}\cdot 8^n+9\cdot 27^n} =$

3

$= \lim_{n\to\infty} \frac{16\cdot\left(\frac{4}{27}\right)^n}{\frac{1}{64}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^n+9} = 0$

$\left(\frac{4}{27}\right)^n \to 0$, $\left(\frac{8}{27}\right)^n \to 0$

(c) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left[\left(1-\frac{4}{5n}\right)^{n+1}+\left(1+\frac{5}{n}\right)^4\right] =$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-4/5)}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{-4/5}{n}\right)+$

$+\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^4 = e^{-4/5}+1 = \frac{1}{\sqrt[5]{e^4}}+1$

$\frac{-4/5}{n}\to 0$, $\frac{5}{n}\to 0$

3

(d) $\lim_{n\longrightarrow\infty} ((n-2)-\sqrt{n^2+4n}) =$ $\lim_{n\to\infty}\left((n-2)-\sqrt{n^2+4n}\right)\cdot\frac{(n-2)+\sqrt{n^2+4n}}{(n-2)+\sqrt{n^2+4n}} =$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}-4n+4-\cancel{n^2}-4n}{n-2+\sqrt{n^2+4n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-8+\frac{4}{n}}{1-\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}} =$

$\frac{4}{n}\to 0$

$= -4$ 3

(e) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\sqrt[n]{400n^4}-4\right) =$ $\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{400}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}_{1}-4 = -3$

3

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! **(12 pont)**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{5^{2n+2}} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n$, $-1 < q = \frac{1}{25} < 1$

konvergens mértani sor

$$S = 4 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{25}} - 1 \right) =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{25}{24} - 1 \right) = 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$$ 3

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)(n-4)}{(1-7n)(2n+1)}$ divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)(n-4)}{(1-7n)(2n+1)} = \frac{-1}{14} \neq 0$$ 3

(divergencia-kritérium)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$, $a_n = \frac{(n+1)!}{n^n} > 0$, $a_{n+1} = \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$

D'Alembert-féle hányados-kritériummal:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^4}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!} \cdot (n+2) \cdot n^4}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cancel{(n+1)!}}$$ 3

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Downarrow$

a sor konvergens.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{200}}{2^{2n}}$, $a_n = \frac{n^{200}}{4^n} > 0$

Cauchy-féle gyökkritériummal:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{206}}{4} = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$$ 3 a sor konvergens.

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2018. október 16.

Név:..

Neptun kód:..

Gyakorlatvezető neve:..............................

I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
D változat

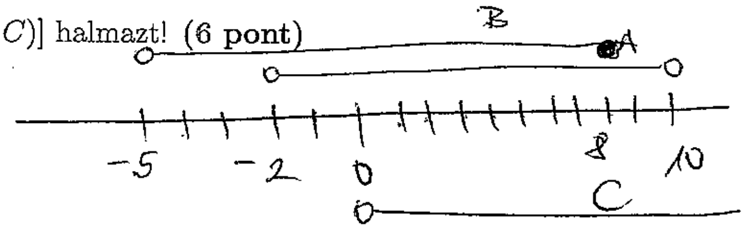
A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

1

$A = (-2, 10)$

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 4| < 6\}$, $B = (-5, 8] \subset \mathbb{R}$, és $C = \mathbb{R}^+$.

(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cup [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! **(6 pont)**



$A \cap B = (-2, 8]$ 1

$(A \cap B) \cup C = (-2, +\infty)$ 1

$A \setminus C = (-2, 0]$ 1

$B \setminus (A \setminus C) = (-5, -2] \cup (0, 8]$ 1

$X = (-5, +\infty)$ 1

(b) Határozza meg az $Y = A \triangle B$ halmazt! **(3 pont)**

$Y = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (-5, -2] \cup (8, 10)$

$A \setminus B = (8, 10)$

$B \setminus A = (-5, -2]$

3

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

$X \cap Y \neq \emptyset$, mert pl. $-2 \in X \cap Y$, így a halmazok nem diszjunktak.

3

$$(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}}-1$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (**6 pont**)

$$\prod_{k=0}^{n}(2^{2^k}+1)=2^{2^{n+1}}-1$$

1.) $n=0$ esetén

B.o.: $2+1=3$

J.o.: $2^2-1=3$ $\Big\}$ B.o. = J.o. (1)

2.) Tfh. $l \in \mathbb{N}$-re igaz az állítás:

$$(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^l}+1) = 2^{2^{l+1}}-1 \quad (1)$$

3.) Biz. $(l+1) \in \mathbb{N}$-re:

$$(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^l}+1)\cdot(2^{2^{l+1}}+1) = 2^{2^{l+2}}-1$$

B.o.: $\underbrace{(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot\ldots\cdot(2^{2^l}+1)}_{2.)}\cdot(2^{2^{l+1}}+1) =$

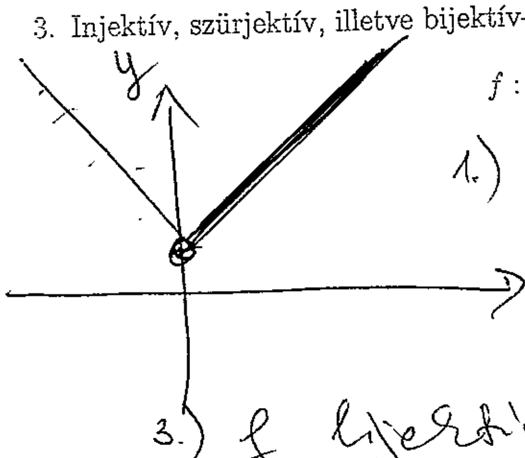
$$= \left(2^{2^{l+1}}-1\right)\cdot\left(2^{2^{l+1}}+1\right) = \left(2^{2^{l+1}}\right)^2 - 1 =$$

$$= 2^{2^{l+1}\cdot 2}-1 = 2^{2^{l+2}}-1 \quad (4)$$

Az állítás igaz. □

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (**5 pont**)

$$f:\mathbb{R}^+ \to (1,+\infty); \qquad f(x)=|x|+1$$



1.) $f(\mathbb{R}^+)=(1,+\infty)$, így f szürjektív (2)

2.) f injektív, mert $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$. (2)

3.) f bijektív, mert injektív és szürjektív (1)

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(15 pont)**

(a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{(n+1)(n-1)}{(1-3n)(2n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{-6n^2-7n+3} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{6}}}$

3

(b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{7^{n+1}}{9^{n-2}+2\cdot 5^{2n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7\cdot 7^n}{\frac{1}{81}\cdot 9^n + \frac{2}{5}\cdot 25^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7\cdot \left(\frac{7}{25}\right)^n \to 0}{\frac{1}{81}\left(\frac{9}{25}\right)^n \to 0 + \frac{2}{5}} = \underline{\underline{0}}$

3

(c) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n + \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^2\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1/2}{n}\right)^n +$

$+ \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^2 = e^{1/2}+1 = \underline{\underline{\sqrt{e}+1}}$

$\frac{2}{n} \to 0$

3

(d) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (n-\sqrt{n^2-3n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt{n^2-3n+1}\right)\cdot \dfrac{n+\sqrt{n^2-3n+1}}{n+\sqrt{n^2-3n+1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}+3n-1}{\cancel{n}+\sqrt{n^2-3n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-\frac{1}{n}\to 0}{1+\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}$

$\frac{3}{n}\to 0 \quad \frac{1}{n^2}\to 0$

$= \underline{\underline{3/2}}$

3

(e) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(\sqrt[n]{1000n^5}-5\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1000}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^5 - 5 = 1-5 = \underline{\underline{-4}}$

3

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! **(12 pont)**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{5^{2n+2}} = \frac{100}{25} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n$, $-1 < q = \frac{1}{25} < 1$

konvergens mértani sor

$$S = 4 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{25}} - 1 \right) =$$

3

$$= 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{(1-3n)(2n+3)}$ divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{(1-3n)(2n+3)} = -\frac{1}{6} \neq 0$$

3

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$ $\quad a_n = \frac{(2n)!}{n^n} > 0$, $\quad a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)\,2\cdot\cancel{(n+1)}\cdot n^n}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{(2n)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{2\cdot(2n+1)}_{\downarrow\, +\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\downarrow\, 1/e} = +\infty > 1 \Rightarrow \text{a sor}$$

3

divergens (D'Alembert-féle hányadoskr.)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

3

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{a sor}$$

konvergens

(Cauchy-féle gyökkritérium)

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2018. október 16.

Név:..

Neptun kód:..

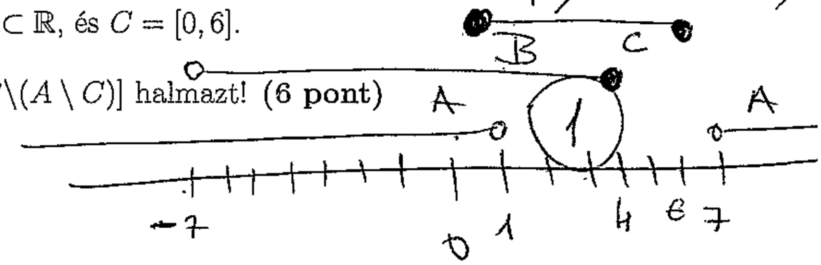
Gyakorlatvezető neve:............................

I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból
E változat

A dolgozat 25 ponttól számít sikeresnek.

$A = (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$

1. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-4| > 3\}$, $B = (-7, 4] \subset \mathbb{R}$, és $C = [0, 6]$.



(a) Határozza meg az $X = [(A \cap B) \cup C] \cup [B \setminus (A \setminus C)]$ halmazt! **(6 pont)**

$A \cap B = (-7, 1)$ 1

$(A \cap B) \cup C = (-7, 6]$ 1

$A \setminus C = (-\infty, 0) \cup (7, +\infty)$ 1

$B \setminus (A \setminus C) = [0, 4]$ 1

$X = (-7, 6]$ 1

(b) Határozza meg az $Y = A \triangle B$ halmazt! **(3 pont)**

$Y = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (-\infty, -7) \cup [1, 4] \cup (7, +\infty)$

$A \setminus B = (-\infty, -7] \cup (7, +\infty)$

$B \setminus A = [1, 4]$

3

(c) Diszjunktak-e az X és az Y halmazok? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

$X \cap Y \neq \emptyset$, mert pl. $4 \in X \cap Y$, így a halmazok nem diszjunktak.

3

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\dots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

2. Bizonyítsa be teljes indukció segítségével a következő egyenlőséget! (**6 pont**)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

1.) $n=1$-re B.o.: $\frac{1}{5}$

J.o.: $\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$ } B.o. = J.o. Igaz. 1

2.) Tfh: $l\in\mathbb{N}$-re igaz:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\dots+\frac{1}{(4l-3)(4l+1)}=\frac{l}{4l+1}$$ 1

3.) Biz. $(l+1)\in\mathbb{N}$-re:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\dots+\frac{1}{(4l-3)(4l+1)}+\frac{1}{(4l+1)(4l+5)}=\frac{l+1}{4l+5}$$

B.o.: $$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\dots+\frac{1}{(4l-3)(4l+1)}}_{2)}+\frac{1}{(4l+1)(4l+5)}=$$ 4

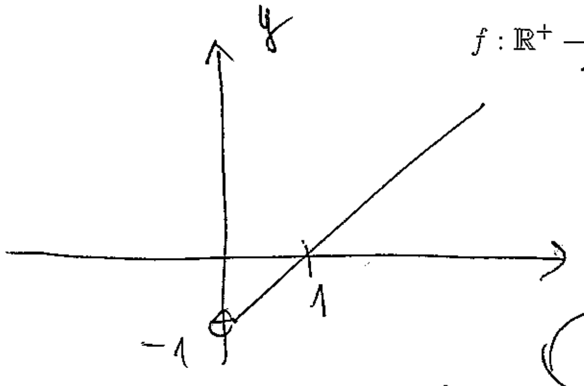
$$=\cancel{\frac{l+1}{4l+}}=\frac{l}{4l+1}+\frac{1}{(4l+1)(4l+5)}=$$

$$=\frac{l(4l+5)+1}{(4l+1)(4l+5)}=\frac{4l^2+5l+1}{(4l+1)(4l+5)}=$$

$$=\frac{\cancel{(4l+1)}(l+1)}{\cancel{(4l+1)}(4l+5)}=\frac{l+1}{4l+5}=\text{J.o.}$$ Az állítás igaz. □

3. Injektív, szürjektív, illetve bijektív-e az alábbi függvény? Válaszát indokolja! (**5 pont**)

$f:\mathbb{R}^+\to\cancel{\mathbb{R}^+}\ \mathbb{R}$, $\quad f(x)=|x|-1$



2

1.) $f(\mathbb{R}^+)=(-1,+\infty)\neq\mathbb{R}$

f nem szürjektív

2.) f injektív, mert $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 2

$x_1\neq x_2$ esetén $f(x_1)\neq f(x_2)$

1

3.) f nem bijektív, mert nem szürjektív.

4. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét (ha léteznek)! **(15 pont)**

(a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{(n+3)(n-3)}{(2n-1)(4n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-9}{8n^2+2n-3} = \dfrac{1}{8}$

3

(b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{5^{n+1}}{3^{n-2}+2\cdot 2^{2n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 5^n}{\frac{1}{9}\cdot 3^n + 4^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot \overbrace{\left(\frac{5}{4}\right)^n}^{\to +\infty}}{\frac{1}{9}\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0}+1} = +\infty$

3

(divergens)

(c) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{3n} + \left(3-\dfrac{3}{n}\right)^{3}\right] = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1/3}{n}\right)^n\right)^3 +$

3

$+ \lim\limits_{n\to\infty} \left(3 - \underbrace{\dfrac{3}{n}}_{\to 0}\right)^3 = \left(e^{1/3}\right)^3 + 27 = e + 27$

(d) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (2n-\sqrt{4n^2+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2n-\sqrt{4n^2+1}\right)\cdot \dfrac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{2n+\sqrt{4n^2+1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{4n^2}-\cancel{4n^2}-1}{2n+\sqrt{4n^2+1}} = 0$

3

(e) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(\sqrt[n]{20n^4}-2\right) = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{20}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}_{1} - 2 = -1$

3

5. Vizsgálja meg az alábbi numerikus sorokat konvergencia szempontjából! Ha a vizsgálathoz kritériumot használ, akkor azt nevezze meg! Az (a) példánál adja meg a sor összegét is, ha az létezik! **(12 pont)**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{3^{2n+1}} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$, $-1 < q = \frac{1}{9} < 1$

konvergens mértani sor

$$S = 6 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 \right) = 6 \cdot \left(\frac{9}{8} - 1 \right) =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

3

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n-3)}{(2n-1)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, mert

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{8} \neq 0.$

3

(divergencia-krit.)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ $\quad a_n = \frac{n^n}{(2n)!} > 0$, $\quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} =$$

3

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n \cdot \cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}(2n+1) \cdot 2\cancel{(n+1)} \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2\cdot(2n+1)} = 0$$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$, $\frac{1}{2\cdot(2n+1)} \to 0$

$0 < 1 \Rightarrow$ A sor konvergens.

(D'Alembert-féle hányados-kr.)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{\sqrt[n]{n}} = e > 1 \Rightarrow \text{A sor}$$

$\sqrt[n]{n} \to 1$

3

divergens.

(Cauchy-féle gyökkr.)

Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Miskolc, 2017. december 5.

Név:...

Neptun kód:...

Gyakorlatvezető neve:..................................

II. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. (GEMAN151-B) c. tárgyból

A változat

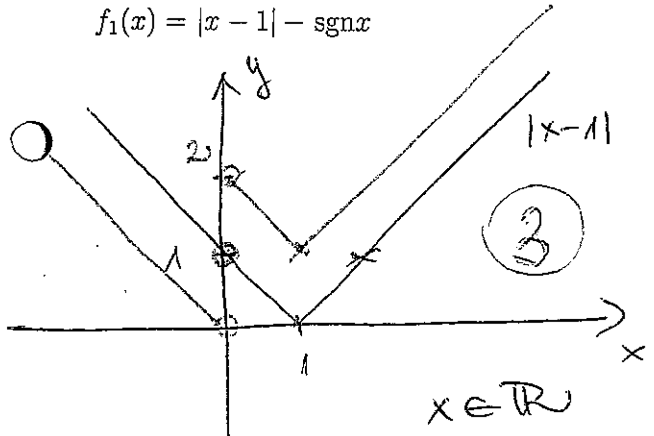
A dolgozat 20 ponttól számít sikeresnek.

$\lim_{x \to \pm\infty} f_2(x) = 0$

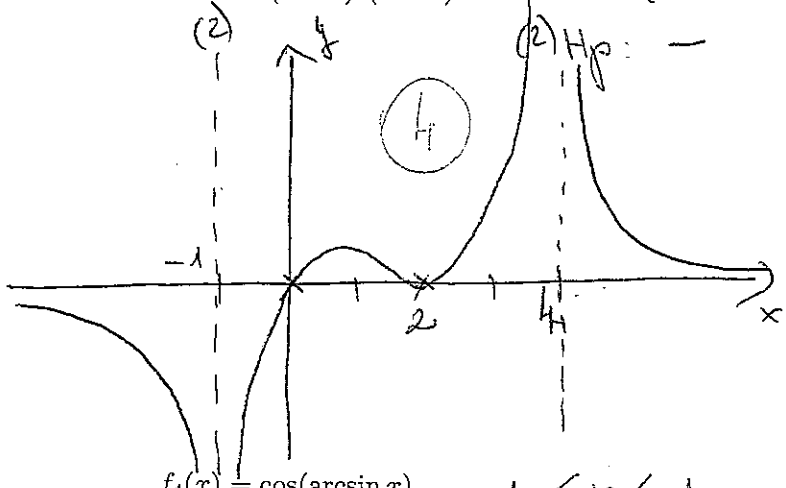
Zh: $x_1 = 0$ (1)
$x_2 = 2$ (2)
Pk: $x_3 = -1$ (2)
$x_4 = 4$ (2)
Hp: –

1. Vázolja az alábbi függvények grafikonját! **(15 pont)**

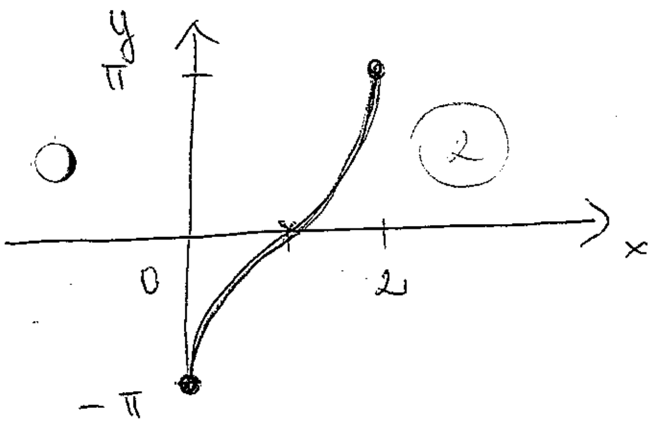
$f_1(x) = |x-1| - \operatorname{sgn} x$



$f_2(x) = \dfrac{x(x-2)^2}{(x+1)^2(x-4)^2}$

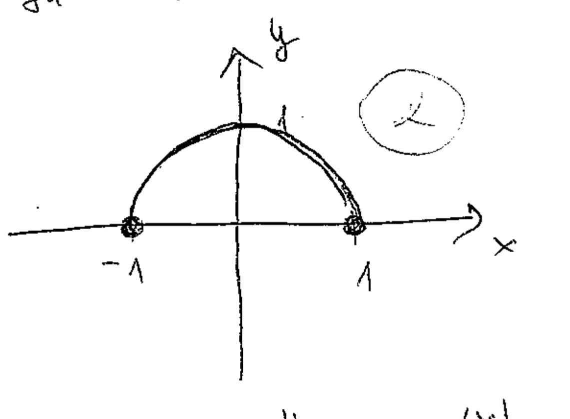


$f_3(x) = 2\arcsin(x-1)$ $\quad 0 \le x \le 2$

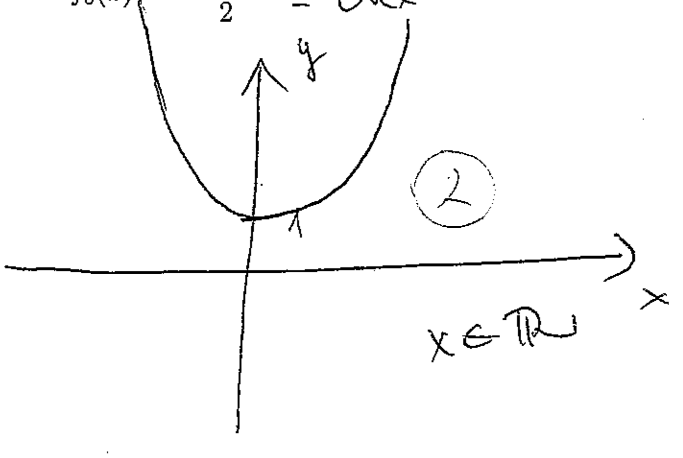


$f_4(x) = \cos(\arcsin x)$ $\quad -1 \le x \le 1$

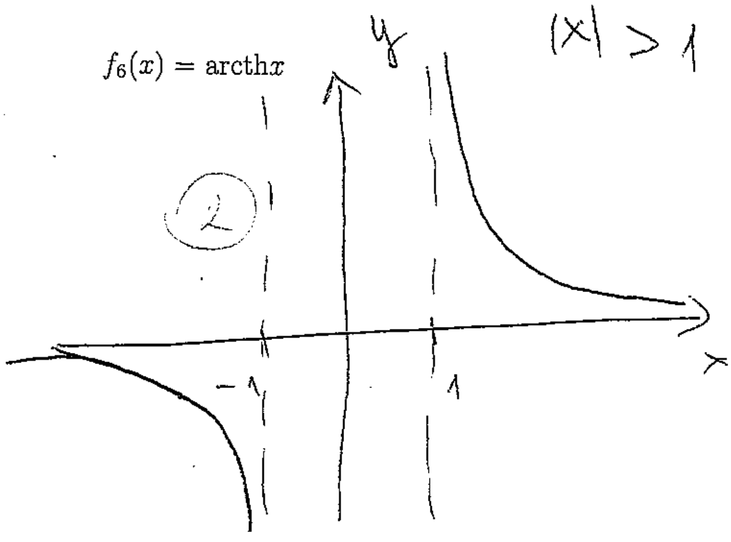
$f_4(x) = \sqrt{1 - x^2}$



$f_5(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$



$f_6(x) = \operatorname{arcth} x$ $\quad |x| > 1$



2. Adott az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x^4, & \text{ha } x \neq 1 \\ 2 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

függvény. Folytonos-e a függvény az $x_0 = 1$ pontban? Ha nem, akkor milyen típusú szakadása van? Határozza meg a $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ és $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ határértékeket, ha léteznek! Válaszait indokolja! **(5 pont)**

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2 - x^4\right) = 1 - 1 = 0 \neq f(1) = 2,$$ (1) (1)

így f nem (1) folytonos $x_0 = 1$-ben.
Elsőfajú, megszüntethető szakadás van ezen a helyen. (1)

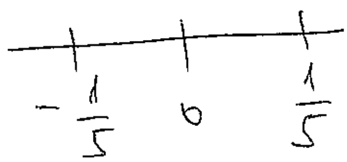
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty,$$ mert (1) $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ldots(-x \ldots = -\infty.$$

3. Adja meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n \qquad c_n = 5^n, \quad x_0 = 0$$

hatványsor konvergenciaintervallumát! **(8 pont)**

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5^n}} = \frac{1}{5}$$ (1)



$$x_1 = -\frac{1}{5} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 5^n \cdot \frac{(-1)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ divergens},$$ (3)

$-\frac{1}{5} \notin H$

$$x_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 5^n \cdot \frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \text{ divergens},$$ (3)

$\frac{1}{5} \notin H$

$$H = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$$ (1)

4. Végezze el a kijelölt differenciálásokat! **(16 pont)**

(a) $(2x^3 - 8x - 2^x)' =$ $6x^2 - 8 - 2^x \cdot \ln 2$

3

(b) $\left(\frac{2}{\sqrt[7]{x^3}} + \frac{5}{x^2} - 2\log_5 x\right)' =$ $-\frac{6}{7} \cdot x^{-\frac{10}{7}} - \frac{10}{x^3} - 2 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 5}$

3

(c) $(\ln x \cdot \cos(3x+1))' =$ $\frac{1}{x} \cdot \cos(3x+1) + 3\ln x \cdot (-\sin(3x+1))$

3

(d) $\left(\frac{6x^2 + e^{-3x}}{\mathrm{ch}(2x+3)}\right)' =$ $\frac{(12x - 3e^{-3x})\,\mathrm{ch}(2x+3) - 2(6x^2 + e^{-3x}) \cdot \mathrm{sh}(2x+3)}{\mathrm{ch}^2(2x+3)}$

3

(e) $(\mathrm{arth}x - \cos^5 x^2)' =$ $\frac{1}{1-x^2} - 5 \cdot \cos^4 x^2 \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x$

1 3

$$f(-1) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$ 1

5. Írja fel az $f : [-3, 3] \to [0, 3]$, $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ függvény érintőjének és normális egyenesének egyenletét az $x_0 = -1$ abszcisszájú pontban! (**6 pont**)

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$f'(-1) = \frac{1}{\sqrt{9-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$ 1

érintő:

$$y_e = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (x + 1) + 2\sqrt{2}$$ 2

normális:

$$y_n = -2\sqrt{2}\,(x+1) + 2\sqrt{2} =$$

$$= -2\sqrt{2}\,x$$ 2

Miskolci Egyetem

Analízis Tanszéke

Dátum:

Név :

Neptun kód:

Vizsgazárthelyi dolgozat
a **Matematikai analízis I.** c. tárgyból (GEMAN 151-B)

1. Folytonos -e az $f:\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{\sin 3x}{x\cos x}, & \text{ha } x\neq 0\\ -\frac{7}{2}, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

függvény a $D_f=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ halmazon? Válaszát indokolja! **(4 pont)**

0)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}-\frac{\sin 3x}{x\cos x}=\frac{1}{2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{\cos x}=$$

$$=\frac{1}{2}-3=\frac{-5}{2}\neq\frac{-7}{2}=f(0)$$ 2

$\Downarrow$

f nem folytonos $x_0=0$-ban.

f D_f minden más helyen folytonos,

de $x_0=0$-ban nem. 2

2. Vázolja az

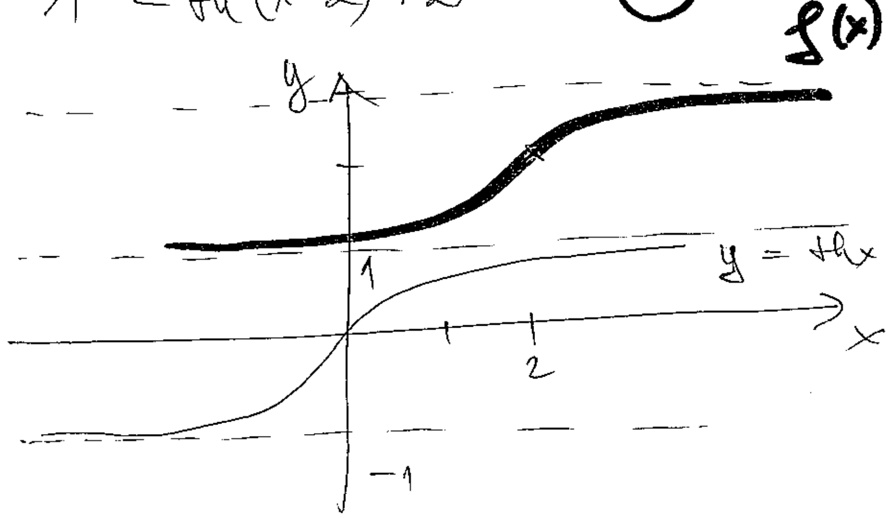
$$f(x) = 2 + \text{th}(x-2), \qquad D_f = \mathbb{R}$$

függvény grafikonját! Adja meg az $f(x)$ függvény inverzét és vázolja az inverz függvény grafikonját is! **(8 pont)**

$f: \mathbb{R} \to (1,3)$

$-1 < \text{th}\, x < 1$

$1 < \text{th}(x-2) + 2 < 3$ 1



2

$f^{-1}: (1,3) \to \mathbb{R}$ 1

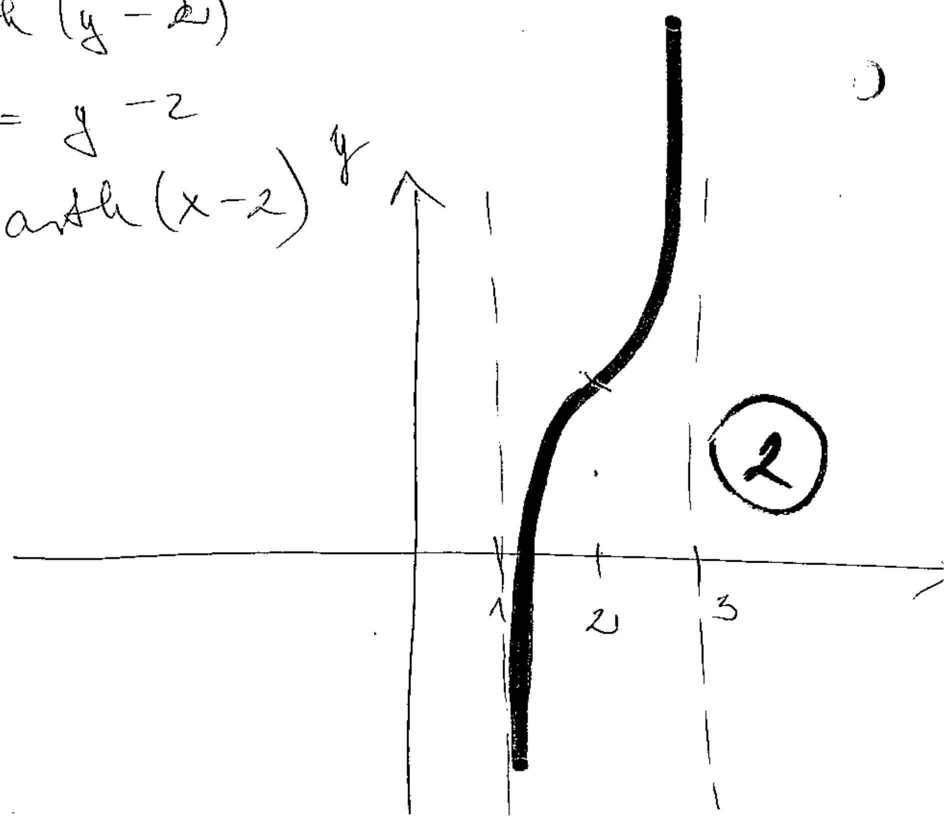
Inverz: $x = 2 + \text{th}(y-2)$

$x - 2 = \text{th}(y-2)$

$\text{arth}(x-2) = y - 2$

$f^{-1}(x) = y = 2 + \text{arth}(x-2)$

2



2

3. Hol és milyen szakadása van a $D_f \subseteq \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 1 - \frac{x+2}{x^2}$$

függvénynek (ha egyáltalán van ilyen)? Vázolja a függvény grafikonját! **(6 pont)**

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} \quad 1$$

áltört 1

$y_A = 1$

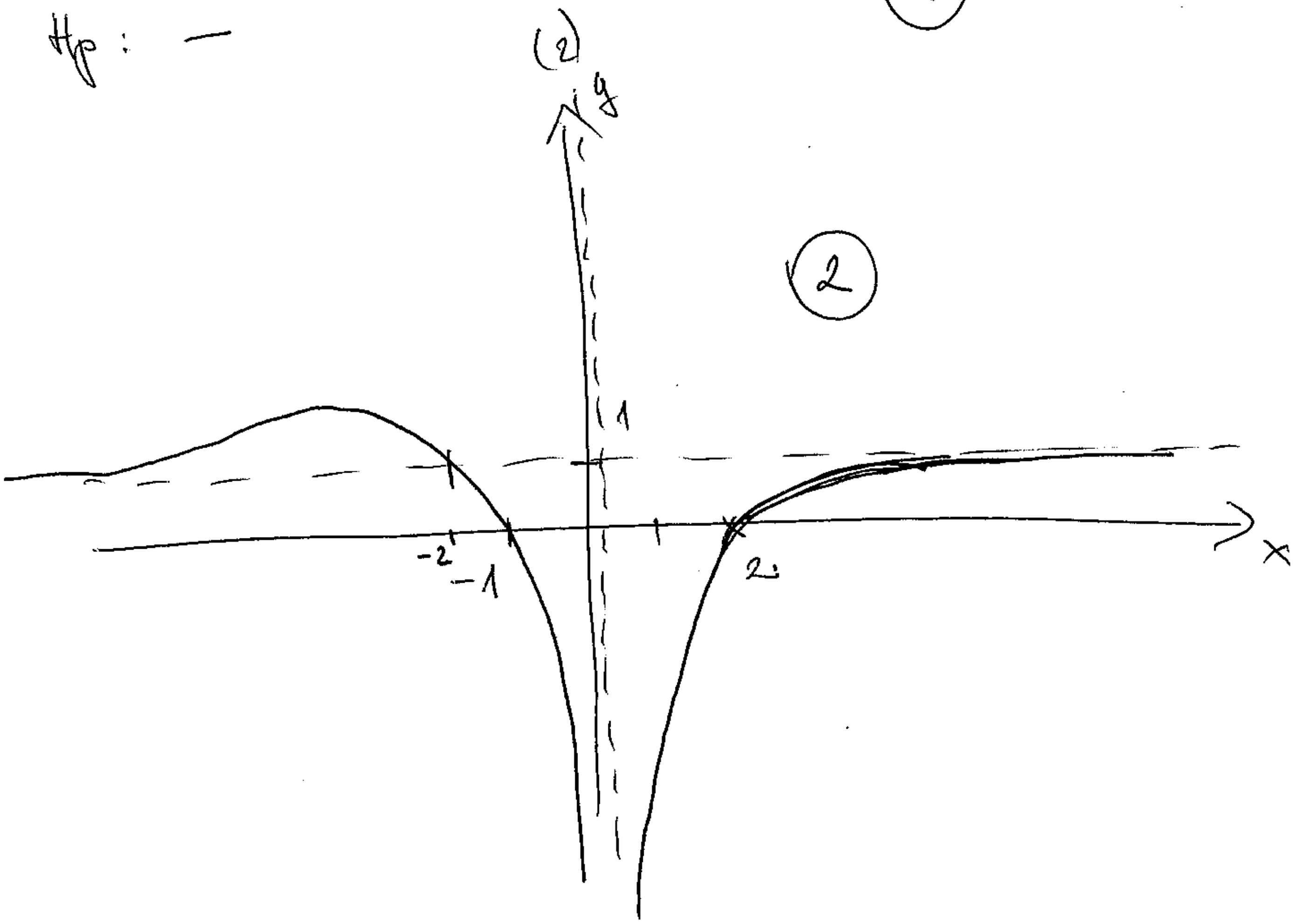
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}^{\,3}}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Zh: $x_1 = 2$ (1)
$x_2 = -1$ (1) 1

Ph: $x_3 = 0$ (2) - Másodfajú szakadás 1

Hp: —



4. Számítsa ki az alábbi határértékeket (ha léteznek)! **(4 pont)**

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{(-3)}{n}\right)^n}\cdot\overbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}{\left(1+\frac{(-3)}{n}\right)^4}}^{1} =$

$= \frac{e}{e^{-3}} = \underline{\underline{e^4}}$ 2

b) $\lim_{x\to 0+0} 2x\operatorname{ctg}6x = \lim_{x\to 0+0}\frac{2x}{\operatorname{tg}6x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$= \lim_{x\to 0+0}\frac{2}{\frac{1}{\cos^2 6x}\cdot 6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

2

5. Adja meg az $f\colon [1;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$ függvény $x_0 = 2$ abszcisszájú pontjához húzható érintő és normális egyenesek egyenletét! **(5 pont)**

$y_0 = f(2) = \frac{1}{5}$ 1 , $P_0\left(2; \frac{1}{5}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+1) - \sqrt{x-1} \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$ 1

$$f'(2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 - 4}{25} = -\frac{3}{50}$$ 1

Az érintő meredeksége: $-\frac{3}{50}$

Az érintő egyenlete:

$$y = \frac{-3}{50}(x-2) + \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{-3}{50}x + \frac{8}{25}$$ 1

A normális egyenlete:

$$y = \frac{50}{3}(x-2) + \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{50}{3}x - \frac{497}{15}$$ 1

6. Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi numerikus sorokat! **(8 pont)**

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7n+2}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

a) alternáló sor

1.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{7n+2} = 0$

2.) $\left\{ \frac{1}{7n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ sz. m. cs.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7n+2}$ Leibniz-sor

$\Downarrow$

konvergens

4

b) D'Alembert-féle hányadoskritériummal:

$a_n = \frac{n!}{3^n} > 0$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = +\infty > 1 \Rightarrow$$ a sor divergens

4

7. Adott az $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 2x - 4\ln x$$

függvény. Határozza meg a függvény paritását, zérushelyeit, majd számítsa ki a lokális szélsőérték- és inflexiós pontjainak koordinátáit! Vizsgálja a függvényt monotonitás és konvexitás szempontjából! Számítsa ki a $\lim_{x\to 0+0} f(x)$ és a $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ határértékeket! Vázolja a függvény grafikonját, majd adja meg a függvény értékkészletét! **(15 pont)**

1.) f nem páros, nem páratlan 1

(D_f nem szimmetrikus) 1

2.) $f'(x) = 2x - 2 - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x^2 - 2x - 4}{x}$ 1

$f'(x) = 0 \iff 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$2(x^2 - x - 2) = 0$

$x_1 = 2$ 1 $\quad x_2 = -1 < 0$, $x_2 \notin D_f$ 1

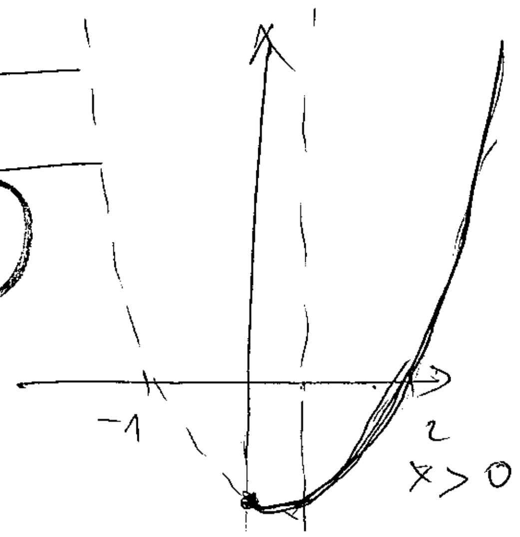
$f''(x) = 2 + \dfrac{4}{x^2}$

$f''(2) > 0 \Rightarrow$ lok. min. 1

$f(2) = \cancel{4-4} - 4\ln 2$ $\quad P_{min.}(2; -4\ln 2)$

3.) Menete:

x	$0 < x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$
	1	1



4.) $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ nincs infl. p. 1

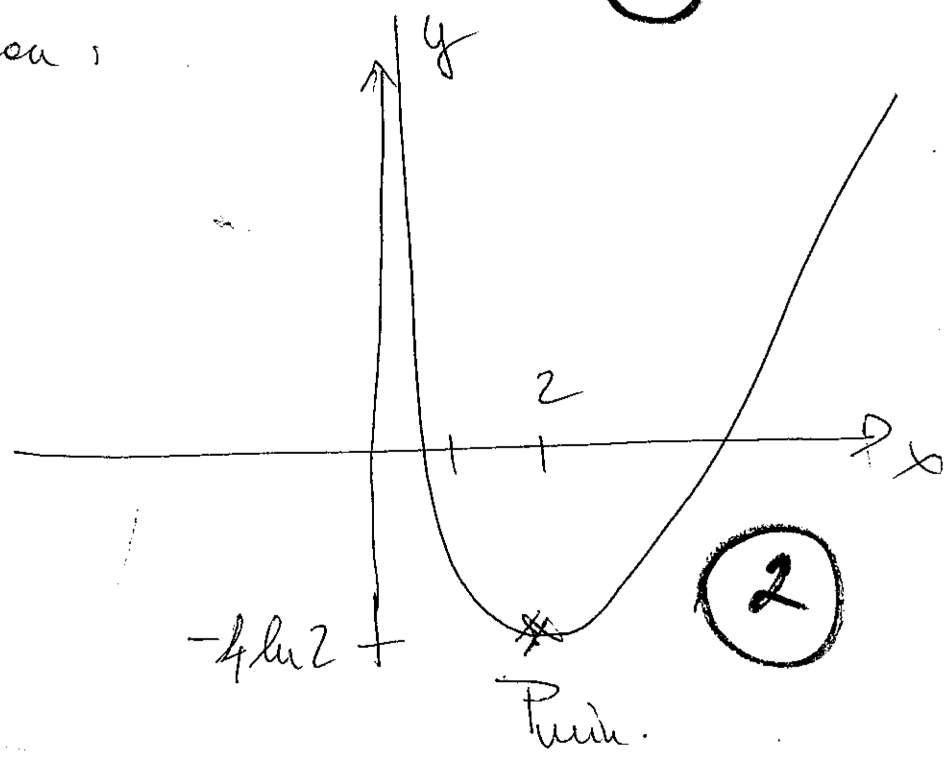
$f''(x) = 2 + \frac{4}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$, azaz 1

f konvex D_f-en. 1

5.) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 1

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} (-4) \ln x = +\infty$ 1

6.) Grafikon:



2

7.) $R_f = [-4 \ln 2, +\infty)$

1

Értékelés:
0-24: elégtelen (1); 25-30: elégséges (2); 31-36: közepes (3); 37-42: jó (4); 43-50: jeles(5).