MATEMATIKAI ANALÍZIS II.

<table>
<tr><td>Tárgynév:</td><td colspan="7">Matematikai analízis II.</td></tr>
<tr><td>Rövid név:</td><td colspan="5">Analízis II.</td><td>Neptun kód:</td><td>GEMAN161-B</td></tr>
<tr><td>Tanszék:</td><td colspan="7">Analízis Tanszék</td></tr>
<tr><td>Tárgyfelelős:</td><td colspan="7">Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia</td></tr>
<tr><td>Előtanulmányok:</td><td colspan="5">Matematikai analízis I.</td><td>Kódja:</td><td>GEMAN151-B</td></tr>
<tr><td>Kredit:</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">Követelmény:</td><td colspan="3">aláírás és gyakorlati jegy</td></tr>
<tr><td>Heti óraszámok:</td><td>Előadás:</td><td>3</td><td>Gyakorlat:</td><td>2</td><td>Labor:</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>Oktatási cél:</td><td colspan="7">A matematikai analízis alapjainak elsajátítása.</td></tr>
<tr><td>Tárgy tartalom:</td><td colspan="7">Paraméteres és polárkoordinátás alakú görbék. A határozatlan integrál. Összetett függvények integrálása. Riemann-integrálhatóság, a Riemann-integrálhatóság feltételei, műveleti tulajdonságok. Egyenlőtlenségek és középérték-tételek, a Newton-Leibniz képlet. Impropius integrálok. A Riemann-integrál általánosítása és alkalmazása, görbék ívhossza, görbementi integrál. Többváltozós függvények differenciálhányadosa, iránymenti és parciális derivált, magasabbrendű deriváltak, Young tétele. Többváltozós függvények szélsőértéke és feltételes szélsőértéke. A kettős integrál fogalma, tulajdonságai, kiszámítása. Új változók bevezetése. A kettős integrál alkalmazásai: térfogat, terület, felszín számítása. A hármas integrál értelmezése, tulajdonságai, kiszámítása. Új változók bevezetése (henger- és gömbi koordinátarendszer). A hármas integrál alkalmazásai. Differenciálegyenletek. Kezdetiérték probléma. Elemi úton megoldható differenciálegyenletek. Magasabbrendű differenciálegyenletek.</td></tr>
<tr><td>Irodalom:</td><td colspan="7">Dr. Lajkó Károly: Kalkulus II-III. (egyetemi jegyzet és példatár)
Császár Ákos: Valós analízis I-II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
B. P. Gyemidovics: Matematikai analízis feladatgyűjtemény, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia: Matematikai analízis II. feladatgyűjtemény, 2016 (elektronikus jegyzet)
Denkinger Géza –Gyurkó Lajos: Analízis Gyakorlatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
Rontó Miklós – Raisz Péterné: Differenciálegyenletek műszakiaknak, Miskolci Egyetemi Kiadó, 2004.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Mintatantervi elhelyezkedés szakok szerint</td></tr>
<tr><td>Szak</td><td>Szakirány/sáv</td><td>Mintatantervi félév</td><td>Választhatóság</td></tr>
<tr><td>Gazdaságinformatikus BSc
Programtervező informatikus BSc
Mérnökinformatikus BSc</td><td>minden</td><td>2</td><td>kötelező</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">További információk:</td></tr>
<tr><td>Konzultáció:</td><td>Időpontja: kedd 9^{00} – 10^{00} és csütörtök 9^{00} – 10^{00}. Helye: A/4. ép. 333. szoba.
A konzultációra e-mailben kell jelentkezni (matszisz@uni-miskolc.hu)!</td></tr>
<tr><td>Évközi feladatok, zárthelyik:</td><td>Kétszer 1-1 órás évközi zárthelyi dolgozat. A zárthelyi dolgozatok tervezett időpontja a 13. és a 19. naptári hét keddi napja. A zárthelyi dolgozatok pótlására az utolsó oktatási héten kerül sor. A pótzárthelyi dolgozatok nem az előadás időpontjában lesznek!</td></tr>
<tr><td>Lezárási feltételek:</td><td>Az előadásokon és a gyakorlatokon aktív részvétel, továbbá a két évközi zárthelyi dolgozat eredményes (legalább 40%) megírása. Elégtelen gyakorlati jegyet kapnak azok a hallgatók, akik egyetlen zárthelyi dolgozat megírásán sem vesznek részt vagy háromnál több igazolatlan óralátogatási mulasztásuk van (az előadásokon és a gyakorlatokon katalógus vezetésére kerül sor).
A gyakorlati jegy a zárthelyi dolgozatok pontszámának összegzése után az alábbiak szerint kerül megállapításra:
0 - 49: elégtelen (1), 50 - 61: elégséges (2), 62 - 73: közepes (3), 74 - 85: jó (4), 86 - 100: jeles (5).</td></tr>
</table>

Ütemterv

1. hét	Paraméteres és polárkoordinátás alakú görbék. Implicit függvények deriválása, érintő megadása paraméteres és polárkoordinátás alakú görbékhez.
2. hét	A határozatlan integrál. Elemi függvények határozatlan integrálja. Függvények lineáris kombinációjának primitív függvénye. Integrálási szabályok. Parciális integrálás.
3. hét	Összetett függvények integrálása: integrálás helyettesítéssel és az inverz függvény segítségével. Racionális törtfüggvények integrálása. Trigonometrikus függvények integrálása.
4. hét	A Riemann – integrál fogalma és tulajdonságai. A Riemann - integrálhatóság egyenlőtlenségei és középérték tételei, a Newton-Leibniz formula. Parciális és helyettesítéses Riemann-integrálok.
5. hét	A határozott integrál alkalmazásai (területszámítás, görbék ívhosszának számítása, forgástestek térfogatának és felszínének számítása).
6. hét	Impropius Riemann-integrálok típusai és tulajdonságai. Integrálkritérium numerikus sorokra.
7. hét	**I. zárthelyi dolgozat.** A kétváltozós függvény értelmezése, ábrázolása, nevezetes felületek. A kétváltozós függvény határértéke és folytonossága.
8. hét	A parciális és az iránymenti derivált. Felület érintősíkja. A kétváltozós függvény szélsőértéke és feltételes szélsőérték. Magasabbrendű deriváltak, Young tétele.
9. hét	A kettős integrál. (A kettős integrál értelmezése, tulajdonságai, kiszámítása). A kettős integrál alkalmazásai: térfogat-, terület- és felszínszámítás.
10. hét	A hármas integrál értelmezése, kiszámítása. Henger- és gömbi-koordináta-rendszer. A hármas integrál alkalmazásai.
11. hét	Dékáni szünet.
12. hét	A közönséges differenciálegyenlet fogalma, osztályozása. Görbesereg differenciálegyenlete. A szétválasztható változójú és erre visszavezethető differenciálegyenletek.
13. hét	**II. zárthelyi dolgozat.** Az elsőrendű lineáris homogén és inhomogén differenciálegyenlet megoldása. Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldására visszavezethető differenciálegyenletek (Bernoulli-féle d.e.).
14. hét	Magasabbrendű differenciálegyenletek speciális típusai: hiányos másodrendű differenciálegyenletek. Másodrendű lineáris állandó együtthatójú homogén és inhomogén differenciálegyenletek megoldása.

Miskolc, 2019. február 05.

Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia

Miskolci Egyetem

Analízis Tanszék

Miskolc, 2019. március 26.

Név:...

Neptun kód:...

Gyakorlatvezető neve:.....................................

I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis II. (GEMAN 161-B) c. tárgyból

A

1. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat! (*12 pont*)

(a) $\int \left((x+1)^2 - 3\sin x + e^{4x}\right)\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + 3\cos x + \frac{e^{4x}}{4} + C$

3

(b) $\int \frac{\ln^2 x}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\cdot(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln^3 x}{3} + C$

3

(c) $\int (3x+1)\cos 2x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = 3x+1 & u' = 3 \\ v = \frac{\sin 2x}{2} & v' = \cos 2x \end{matrix}\right\} =$

$= \frac{1}{2}(3x+1)\sin 2x - \frac{3}{2}\int \sin 2x\,dx =$

$= \frac{1}{2}(3x+1)\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C$

3

(d) $\int \frac{3x^2+x+2}{(x+1)^2(x-3)}\,dx = {}^{*}\int\left(\frac{1}{x+1} - (x+1)^{-2} + \frac{2}{x-3}\right)dx =$

$= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + 2\ln|x-3| + C$

$*$ Parc. törtekre bontás:

3

$$\frac{3x^2+x+2}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} =$$

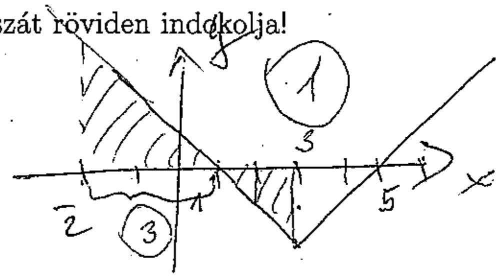
$$= \frac{A(x+1)(x-3) + B(x-3) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx - 3}{(x+1)^2(x-3)}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2&: A + C = 3 \\ x^1&: -2A + B + 2C = 1 \\ x^0&: -3A - 3B + C = 2 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} A &= 1 \\ C &= 2 \\ B &= -1 \end{aligned}$$

2. Adott az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x) = |x-3| - 2$$

függvény. Adja meg az alábbi határozott integrálok értékét! Válaszát röviden indokolja! (*6 pont*)



(a) $\int_3^3 f(x)\,dx = 0$ 1

(b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ 1

(c) $\int_{-2}^2 f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{9}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right) = \underline{\underline{4}}$

2

(d) $\int_0^6 f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^1 f(x)\,dx + 2\cdot\int_1^3 f(x)\,dx =$

$= 1 + (-4) = -3$ 1

3. Adott az $x^2 + y^2 = 9$, $x \geq 0$ görbe.

(a) Nevezze meg a görbét és készítsen vázlatot! (*2 pont*)

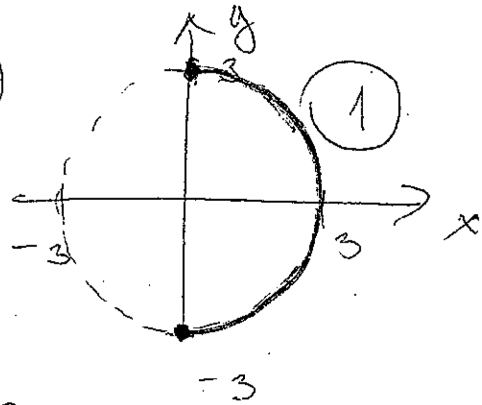
(b) Írja fel a görbe paraméteres egyenletrendszerét és polárkoordinátás egyenletét! (*4 pont*)

(c) Számítsa ki a görbe ívhosszát! (*4 pont*)

(d) Határozza meg a görbe kezdőpontjához, illetve végpontjához tartozó polárszögekhez tartozó félegyenesek és a görbe által közrezárt szektor területének mérőszámát! (*4 pont*)

$+Cx^2+2Cx+C$

a)



félkör 1

b) $\left.\begin{array}{l} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{array}\right\}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 2

$r(\varphi) = 3$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 2

c) $L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}\, dt = 3 \cdot [t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi$

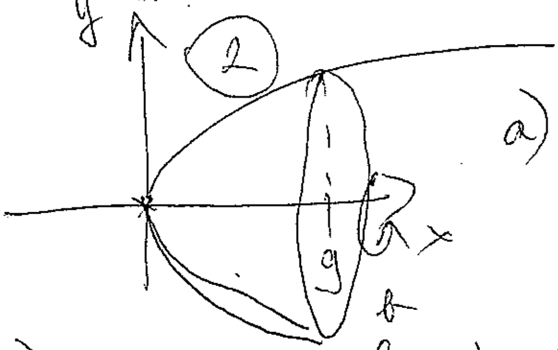
4

d) $S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 9 \, d\varphi = \frac{9}{2}\pi$

4

4. Forgassa meg az $y = \sqrt{x}$ görbe $x \in [0, 9]$ ívét az x-tengely körül, majd határozza meg a keletkező forgástest térfogatát és palástfelszínét! Készítsen vázlatot! (10 *pont*) 1

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$$



$x \in [0, 9]$

a) $$V_x = \pi \cdot \int_0^9 x\,dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^9 = \frac{81\pi}{2}$$ 3

b) $$A_x = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$ 1

$$A_x = 2\pi \int_0^9 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx = 2\pi \cdot \int_0^9 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\,dx =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^9 = \cancel{2}\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{37}{4} \cdot \frac{\sqrt{37}}{\cancel{2}} = \frac{74\pi}{12} \cdot \sqrt{37} = \frac{37\sqrt{37}\,\pi}{6}$$ 3

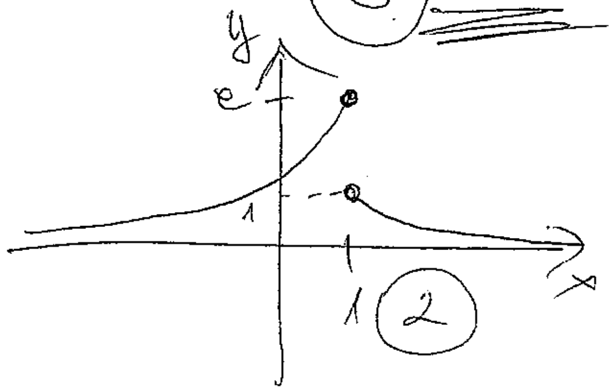
5. Vázolja az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ha} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$$

függvény grafikonját, majd számítsa ki az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

improprius integrált! (*8 pont*)



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} e^x\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[e^x\right]_{-\infty}^{1} + \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{+\infty} =$$ 1 1 1

$$= e - \underbrace{\lim_{r \to -\infty} e^r}_{0} - \left(\underbrace{\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R}}_{0} - 1\right) =$$ 1 1

$$= \underline{e + 1}$$ (konvergens) 1

Miskolci Egyetem

Analízis Tanszék

Miskolc, 2017. május 02.

Név:...............................

Neptun kód:...............................

Gyakorlatvezető neve:...............................

II. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis II. (GEMAN161-B) c. tárgyból

A változat

1. Adja meg az

$$y' - 3x^2y^2 = 0$$

differenciálegyenlet típusát, majd keresse meg a differenciálegyenlet $y(0) = \frac{1}{2}$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását! (*8 pont*)

Közönséges, elsőrendű, szétválasztható változójú d.e. 2

$$y' = 3x^2y^2$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = 3\int x^2\,dx \quad 1$$

$$1 \quad -\frac{1}{y} = \cancel{3}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}} - c \quad 1$$

$$\frac{1}{y} = -x^3 + c$$

$$y = \frac{1}{c - x^3} \quad 1$$

K. ért. f.: $\frac{1}{2} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = 2$ 1

$$y_p = \frac{1}{2 - x^3}$$

1

2

2. Határozza meg a

$$xy' - y = 3xy^3$$

differenciálegyenlet típusát, majd írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását! 2
(*13 pont*)

Közönséges, elsőrendű, Bernoulli-féle d-e.

$$xy' - y = 3xy^3 \quad /:x, \quad x \neq 0$$

$$y' - \frac{1}{x}y = 3y^3 \quad /:y^3, \quad y \neq 0 \quad 1$$

$y = 0$ triviális m.o.

$$\frac{1}{y^3}y' - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y^2} = 3$$

$$\frac{1}{y^2} = z \quad 1$$

$$-2\cdot y^{-3}y' = z'$$

$$y^{-3}y' = -\frac{1}{2}z'$$

Vh:

$$-\frac{1}{2}z' - \frac{1}{x}z = 3 \quad (*)$$

1

H.e.: $-\frac{1}{2}z' = \frac{1}{x}z$ 1

$$\int\frac{1}{z}\,dz = -2\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|z| = -2\ln|x| + \ln c \quad 1 \qquad c \in \mathbb{R}^+$$

$$z_{h.á.} = c\cdot x^{-2} \quad 1$$

$$z_{inh.p.} = c(x)\cdot x^{-2} \quad 1$$

$$z' = c'(x)\cdot x^{-2} - 2c(x)\cdot x^{-3}$$

Vh. (*)-ba:

$$-\frac{1}{2}c'(x)\cdot x^{-2} + \cancel{c(x)\cdot x^{-3}} - \cancel{\frac{1}{x}\cdot c(x)\cdot x^{-2}} = 3$$

$$c'(x) = -6x^2$$

$$c(x) = -6\cdot\frac{x^3}{3} + \tilde{c} = -2x^3 + \tilde{c}, \quad 1$$

$$\tilde{c} = 0$$

$$z_{inh.p.} = -2x \quad 1$$

$$z_{inh.á.} = z_{h.á.} + z_{inh.p.} = \frac{c}{x^2} - 2x \quad 1$$

Azaz: $\frac{1}{y^2} = \frac{c}{x^2} - 2x$ 1

3. Adja meg az

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 + 10x + 1 - 4e^{2x}$$

differenciálegyenlet típusát, majd adja meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
(14 pont)

Közönséges, másodrendű állandó ~~együttható~~együtthatójú, inhomogén lineáris d.e. 2

H.e.: $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y = e^{rx}$ 1

K.e.: $r^2 - 5r + 4 = 0$ 1

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \quad r_1 = 4, \quad r_2 = 1$$

$y_1 = e^{4x}$ 1, $y_2 = e^{x}$ 1

$y_{h.\acute{a}.} = c_1 e^{4x} + c_2 e^{x}$ 1, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_{inh.p.} = Ax^2 + Bx + C + De^{2x}$ 1 1

$y' = 2Ax + B + 2De^{2x}$

$y'' = 2A + 4De^{2x}$

Vh.: $2A + 4De^{2x} - 10Ax - 5B - 10De^{2x} + 4Ax^2 + 4Bx + 4C + 4De^{2x} = 4x^2 + 10x + 1 - 4e^{2x}$

e^{2x}: $-2D = -4 \Rightarrow \boxed{D = 2}$

x^2: $4A = 4 \Rightarrow \boxed{A = 1}$

x^1: $\underbrace{-10A}_{-10} + 4B = 10 \Rightarrow 4B = 20 \Rightarrow \boxed{B = 5}$ 3

x^0: $2A - 5B + 4C = 1$

$4C = 24 \Rightarrow \boxed{C = 6}$

$y_{inh.p.} = x^2 + 5x + 6 + 2e^{2x}$ 1

$y_{inh.\acute{a}.} = y_{h.\acute{a}.} + y_{inh.p.} = c_1 e^{4x} + c_2 e^{x} + x^2 + 5x + 6 + 2e^{2x}$

1

4. Határozza meg az

$$f(x,y) = \frac{2x-y}{x+y}$$

kétváltozós függvény $P_0(2,-1)$ pontbeli gradiensét! (*5 pont*)

$$f'_x = \frac{2(x+y)-(2x-y)}{(x+y)^2} = \frac{3y}{(x+y)^2} \quad 1$$

$$f'_y = \frac{-(x+y)-(2x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-3x}{(x+y)^2} \quad 1$$

$$f'_x\big|_{P_0} = -3 \quad 1 \qquad , \qquad f'_y\big|_{P_0} = -6 \quad 1 \qquad \operatorname{grad} f\big|_{P_0} = (-3, -6) \quad 1$$

5. Hol és milyen lokális szélsőértéke van az

$$f(x,y) = 2xy - 4x^2 - y^2 + x^3$$

kétváltozós függggvénynek? (*10 pont*)

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2y - 8x + 3x^2 = 0 \\ f'_y &= 2x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y \quad 1$$

$$f''_{xx} = -8 + 6x$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 2 \quad 2$$

$$f''_{yy} = -2$$

$$-6x + 3x^2 = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0, \; y_1 = 0 \quad 1 \qquad\qquad x_2 = 2, \; y_2 = 2 \quad 1$$

Stac. pontok:

$P_1(0,0)$

$P_2(2,2)$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 6x-8 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12x + 16 - 4 = -12x + 12 \quad 1$$

$D(0,0) = 12 > 0 \Rightarrow$ van sz. é. 1 P_1-ben,

$f''_{xx}\big|_{P_1} = -8 < 0 \Rightarrow$ lok. max 1

$f_{max} = f(0,0) = 0$ 1

$D(2,2) = -24 + 12 = -12 < 0 \Rightarrow$ P_2-ben nincs

1 lok. sz. é.

Miskolci Egyetem

Analízis Tanszék

Miskolc, 2019. május 23.

Név:..

Neptun kód:...............................

Gyakorlati jegyet javító vizsgazárthelyi dolgozat a Matematikai analízis II. (GEMAN161-B) c. tárgyból[1]

I. éves nappali tagozatos hallgatók részére

1. Határozza meg az $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ függvény $1 \leq x \leq e^2$ ívének x-tengely körüli forgatásával kapott forgástest térfogatát integrálszámítás alkalmazásával! **(5 pont)**

$$V_x = \pi \cdot \int_1^{e^2} x \ln x \, dx = \pi \cdot \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^{e^2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^{e^2} \right) =$$

1

$$= \pi \cdot \left(e^4 - \left(\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \right) \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} \cdot \left(3e^4 + 1 \right)}}$$

1

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} & v' = x \end{matrix} \right\} =$$

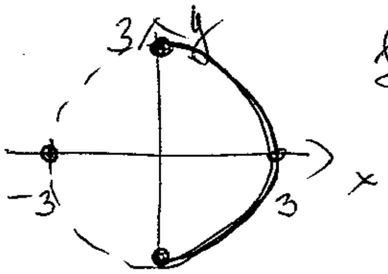
1

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

1 1

[1]Értékelés: *0-24: elégtelen (1); 25-30: elégséges (2); 31-36: közepes (3); 37-42: jó (4); 43-50: jeles (5).*

2. Adott az $x^2 + y^2 = 9$, $x \geq 0$ görbe! Készítsen vázlatot és nevezze meg a görbét! Írja fel a görbe paraméteres egyenletrendszerét! Számítsa ki a görbe ívhosszát! **(5 pont)**



félkör 1

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{array}\right\} \quad 1 \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\dot{x}(t) = -3\sin t, \quad \dot{y}(t) = 3\cos t \quad 1$$

$$[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 = 9(\sin^2 t + \cos^2 t) = 9$$

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9}\, dt \; 1 = 3 \cdot [t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \underline{\underline{3\pi}} \quad 1$$

3. Konvergens-e az

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\, dx$$

improprius integrál? Válaszát indokolja! **(5 pont)**

$$\int_1^5 (x-2)^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_1^{2-\varepsilon_1} (x-2)^{-\frac{1}{3}} dx + \; 1 \; \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{2+\varepsilon_2}^{5} (x-2)^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left[\frac{(x-2)^{2/3}}{2/3}\right]_1^{2-\varepsilon_1} + \; 1 \; \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \left[\frac{(x-2)^{2/3}}{2/3}\right]_{2+\varepsilon_2}^{5} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\lim_{\varepsilon_1 \to 0} (-\varepsilon)^{2/3} - 1\right) + \; 1 \; \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \varepsilon^{2/3}\right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - 1\right)}} \quad 1 \quad \Rightarrow \text{konvergens} \quad 1$$

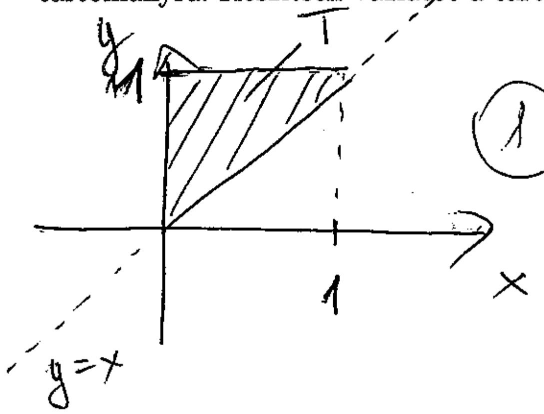
4. Határozza meg az

$$f(x,y) = x + y$$

kétváltozós függvény kettős integrálját a

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$$

tartományra! Készítsen vázlatot a tartományról! **(5 pont)**



$$\iint_T (x+y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{1} (x+y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_x^1 dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - \left(x^2 + \frac{1}{2}x^2\right)\right) dx =$$

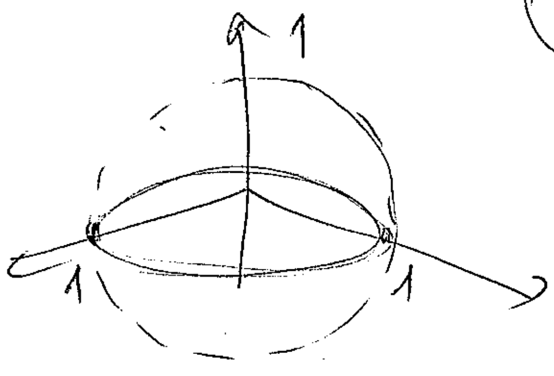
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + x - \frac{3}{2}x^2\right) dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3\right]_0^1 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

5. Nevezze meg és vázolja az $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ felületet, majd írja fel az érintősík egyenletét a $P_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, z_0\right)$ pontban! **(5 pont)**

$x^2+y^2+z^2=1$ Origó kp-ú, $R=1$

1 sugarú gömb!



$z^2 = 1 - x^2 - y^2$

$z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

$z_0 = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$P_{01}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $P_{02}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$z \geq 0 \Rightarrow$ felső félgömb $z \leq 0 \Rightarrow$ alsó félgömb

)

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$z'_x = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; $z'_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$z'_x\Big|_{P_0} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z'_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1

$\underline{n}_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$; $P_{01}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ÉS: $x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$ 1

) $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$

$z'_x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; $z'_y = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$z'_x\Big|_{P_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 1 $z'_y\Big|_{P_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\underline{n}_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$; $P_{02}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ÉS: $x + y - \sqrt{2}z = \sqrt{2}$ 1

6. Határozza meg az

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

háromváltozós függvény hármas integrálját a

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

tartományra vonatkozóan gömbi koordinátákra történő áttéréssel! **(7 pont)**

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \\ z &= r \cdot \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} |J| &= r^2 \cos\vartheta \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \end{aligned}$$

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 9} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \quad 1$$

$$= \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{3} r \cdot r^2 \cos\vartheta \, dr\, d\varphi\, d\vartheta = \quad 3$$

$$= \left[\sin\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 = \quad 2$$

$$= \underbrace{(1 - (-1))}_{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{3^4}{4} = \underline{\underline{81\pi}} \quad 1$$

7. Adott az

$$f(x,y) = (x-y)^2 + x(x+4) - 2y + 5$$

kétváltozós függvény. Hol és milyen lokális szélsőértéke van a függvénynek? A lokális szélsőértékhelyen (ha van ilyen) határozza meg a függvényértéket! **(6 pont)**

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 4x - 2y + 5 =$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 2y + 5$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 4x - 2y + 4 = 0 \\ f'_y = -2x + 2y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = x + 1 \quad 1$$

$$4x - 2(x+1) + 4 = 0$$

$$4x - 2x - 2 + 4 = 0$$

$$2x + 2 = 0$$

$$x = -1$$

$$y = 0$$

Stac. pont: $P_0(-1;0)$ 1

$$f''_{xx} = 4\ ;\quad f''_{xy} = -2,\quad f''_{yy} = 2$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0 \Rightarrow$$ van lok. sz.-é. P_0-ban 1

1

$$f''_{xx} = 4 > 0 \Rightarrow$$ lok. min. 1

$$f_{min.} = f(-1;0) = 2 - 4 + 5 = 3$$

$P_{min.}(-1, 0, 3)$ 1

8. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket! Adja meg a differenciálegyenletek típusát! **(12 pont)**

(a) $y' \sin x - y \cos x = 3x^2 \sin^2 x, \qquad \sin x > 0, y > 0;$

Elsőrendű, inhomogén lineáris d.e.

H.e.: $y' \sin x = y \cos x$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln c, \quad c \in \mathbb{R}^+$$

$$y_{h.á.} = c \cdot \sin x \quad 1$$

$$y_{inh.p.} = c(x) \cdot \sin x \quad 1$$

$$y' = c'(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \cos x$$

Vh:

$$c'(x) \cdot \sin^2 x + \cancel{c(x) \cos x \sin x} - \cancel{c(x) \cdot \sin x \cos x} = 3x^2 \sin^2 x$$

$$c'(x) = 3x^2 \quad 1$$

$$c(x) = x^3 + \not{c}$$

$$y_{inh.p.} = x^3 \cdot \sin x \quad 1$$

$$y_{inh.á.} = y_{h.á.} + y_{inh.p.} =$$

$$= c \cdot \sin x + x^3 \sin x =$$

$$= (c + x^3) \sin x, \quad c \in \mathbb{R}$$

1

(b) $y'' + 2y' - 8y = 24x$.

Másodrendű, állandó együtthatójú, inhomogén lineáris d.e. 1

H.e.: $y'' + 2y' - 8y = 0$, $y = e^{rx}$

K.e.: $r^2 + 2r - 8 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = -4 \end{cases}$$ 1

$y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-4x}$

$y_{h.á.} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}$ 1, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_{inh.p.} = Bx + C$ 1

$y' = B$

$y'' = 0$

Vh: $2B - 8Bx - 8C = 24x$

x^1: $-8B = 24$ $\boxed{B = -3}$

x^0: $2B - 8C = 0$

$B = 4C$

$\boxed{C = \frac{B}{4} = \frac{-3}{4}}$

$y_{inh.p.} = -3x - \frac{3}{4}$ 2

$y_{inh.á.} = y_{h.á.} + y_{inh.p.} =$

$= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} - 3x - \frac{3}{4}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 1