

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

DURVA HALMAZOK ÉS HÁLÓELMÉLETI VIZSGÁLATUK

PhD értekezés tézisei

KÉSZÍTETTE:

GÉGÉNY DÁVID

OKLEVELES MÉRNÖKINFORMATIKUS

HATVANY JÓZSEF INFORMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ:

Prof. Dr. Kovács László

EGYETEMI TANÁR

TUDOMÁNYOS TÉMAVEZETŐ:

Prof. Dr. Radeleczki Sándor

EGYETEMI TANÁR

TUDOMÁNYOS TÁRSTÉMAVEZETŐ:

Prof. Dr. Kovács László

EGYETEMI TANÁR

Miskolc, 2025

Tartalomjegyzék

1. KUTATÁSI FELADAT ÖSSZEFOGLALÁSA	2
2. VIZSGÁLATOK LEÍRÁSA	4
2.1. Hálóelméleti áttekintés	4
2.2. Durva halmazok elmélete	5
2.3. Fuzzy halmazok és fuzzy relációk	6
2.4. Képtömörítéssel kapcsolatos tesztek	7
3. TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK	9
3.1. Multigranuláris durva halmazok	9
3.1.1. Elméleti áttekintés	9
3.1.2. Főbb eredmények	9
3.1.3. Újdonság és hasznosíthatóság	10
3.1.4. I. TÉZIS	11
3.2. Fuzzy durva halmazok éles referencialhalmazzal	11
3.2.1. Elméleti áttekintés	11
3.2.2. Főbb eredmények	12
3.2.3. Újdonság és hasznosíthatóság	12
3.2.4. II. TÉZIS	13
3.3. Durva L -fuzzy halmazok	13
3.3.1. Elméleti áttekintés	13
3.3.2. Főbb eredmények	14
3.3.3. Újdonság és hasznosíthatóság	15
3.3.4. III. TÉZIS	15
3.4. Fuzzy durva halmazok fuzzy referencialhalmazzal	15
3.4.1. Elméleti áttekintés	15
3.4.2. Főbb eredmények	16
3.4.3. Újdonság és hasznosíthatóság	17
3.4.4. IV. TÉZIS	17
3.5. Fuzzy durva halmazok alkalmazása képtömörítésre	17
3.5.1. Elméleti háttér és előzmény	17
3.5.2. Főbb eredmények	18
3.5.3. Újdonság és hasznosíthatóság	20
3.5.4. V. TÉZIS	20
4. ÖSSZEFOGLALÁS	21
4.1. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS KUTATÁS IRÁNYOK	21
5. SUMMARY	24
5.1. SUMMARY AND FUTURE RESEARCH DIRECTIONS	24
5.2. THESES	26
Irodalomjegyzék	28

1. KUTATÁSI FELADAT ÖSSZEFOGLALÁSA

A doktori értekezésben a durva halmazokon alapuló általánosabb modellekkel foglalkozom, amelyben azok hálóelméleti tulajdonságait és alkalmazási lehetőségeit tárgyalom. Tudományos szempontból a durva halmazok elmélete rengeteg lehetőséget rejt magában. Bár az alapmodellt az elmúlt évtizedekben átfogó módon elemezték, megjelentek azonban általánosított változatok is, amelyek új kutatási irányokat nyitottak meg. Az általánosabb modellek rendezési struktúráinak vizsgálata egy olyan kutatási résnek számított, aminek a betöltéséhez hozzá tudtam járulni a kutatásommal. A multigranuláris halmazok esetén például szinte alig volt korábban olyan hálóelméleti elemzés, ami a kettőnél több ekvivalenciarelációval definiált esetet vizsgálta volna. A fuzzy halmazokkal kombinált durva halmazok esetén pedig még nem vizsgálták részletesen azt, hogy milyen esetekben alkotnak hálót, teljes hálót, illetve milyen algebrai-logikai struktúrákat tudunk definiálni rajtuk.

Ezenfelül a durva halmazok tárgyköre a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából is szerteágazó lehetőségeket nyújt. A durva halmazokat korábban sikeresen alkalmazták már adatfeldolgozásra, képfeldolgozásra, adatbányászati célokra és neurális hálók bemenetének előfeldolgozására. A disszertációban is tárgyalt általánosabb durvahalmaz-modellek nemcsak újszerű alkalmazásoknak nyitnak kaput, de a meglévő alkalmazások továbbfejlesztésének is. Továbbá mind az elmélet, mind a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos ismerni, hogy a vizsgált modellek milyen tulajdonságokkal rendelkeznek. Ez összefügg azzal, hogy milyen logikai megközelítést alkalmazhatunk.

A kutatásom során céлом volt tehát a durva halmazok általánosabb modelljeinek hálóelméleti vizsgálata és alkalmazási lehetőségek meghatározása. Az egyik ilyen általánosabb modellt a multigranuláris durva halmazok koncepciója adja, amelynek két változatát (optimista és pesszimista) vizsgáltam. A rendezési struktúrák elemzése során azt tűztem ki célul, hogy meghatározzam, hogy a multigranuláris durva halmazok mikor alkotnak hálót, és ez a háló mikor rendelkezik bizonyos hasznos tulajdonságokkal, továbbá optimista esetben vizsgálom a Dedekind–MacNeille-kiterjesztést is.

Az általánosabb modellek elemzésére egy másik irányt a fuzzy halmazokkal való kombinációk jelentették, aminek háromféle változatát vizsgáltam. Céлом volt meghatározni, hogy milyen feltételek mellett rendelkezik a hagyományos durvahalmaz-struktúra tulajdonságaival az a modell, amikor a referenciahalmaz éles (hagyományos) halmaz, az approximációs tér pedig fuzzy. Ebben az esetben azt is elemeztem, hogy a modellben szereplő fuzzy halmazok és fuzzy relációk egzakt (definiálható) halmazai hogyan viszonyulnak egymáshoz, továbbá a tartók és magok közötti kapcsolatot is meghatároztam.

A fordított esettel – amikor a referenciahalmaz fuzzy, és az approximációs tér éles – pontosabban annak egy általánosabb változatával, a durva L -fuzzy halmazokkal is foglalkoztam. Itt egyrészt annak meghatározását tűztem ki célul, hogy milyen tulajdonságok öröklődnek az L hálóról a durva L -fuzzy halmazokra, valamint mikor alkotnak háromértékű Łukasiewicz-algebrát. A

terveim között szerepelt egy reprezentációs tétel bizonyítása is, amely megadja, hogy egy fuzzy halmazpár mikor alkot durva L -fuzzy halmazt.

Az előző két – fuzzy halmazokkal kombinált – általánosabb forma elemzési előkészítették a még általánosabb modell vizsgálatát, ahol a referenciahalmaz és az approximációs tér egyaránt fuzzy. Ehhez a modellhez céлом volt kijelenteni és bizonyítani egy reprezentációs tételt arra vonatkozóan, hogy milyen feltételeket kell teljesíteni egy fuzzy halmazpárnak, hogy fuzzy durva halmazt alkossanak. Továbbá meghatároztam egy olyan feltételrendszert is, amelyek mellett a fuzzy durva halmazok hálót, illetve teljes hálót alkotnak.

Végül céлом volt egy alkalmazást kifejleszteni a fuzzy durva halmazokra. Ehhez egy képtömörítési eljárást dolgoztam ki, ami egy korábbi módszer nagy léptékű továbbfejlesztése az általánosabb fuzzy durva halmaz modell felhasználásával. A tömörített kép minőségére vonatkozó PSNR mérőszámot alapul véve az általam javasolt algoritmust össze is vetettem a korábbi módszerrel – az új eljárás konzisztens módon jobb eredményt produkált a korábbinál.

2. VIZSGÁLATOK LEÍRÁSA

A durva halmazok általánosabb modelljeinek vizsgálatához a részbenrendezett halmazok elméletét, valamint algebrai, hálóelméleti eszközöket használtam. Ezeket részletezem a következő három alfejezetben, az utolsó alfejezetben pedig a képtömörítési eljáráshoz szükséges előismereteket, az elvégzett tesztekhez felhasznált eszközök, ismeretek rövid leírását tárgyalom.

2.1. Hálóelméleti áttekintés

A hálóelméleti, algebrai alapfogalmakat több könyv is összefoglalja, ezek közül a témakörhöz legrelevánsabb koncepciókat többnyire a [20], a [16] és a [9] könyvek alapján mutatom be. Legyen U egy alaphalmaz, $\varrho \subseteq U \times U$ pedig egy rajta értelmezett *homogén bináris reláció* (a továbbiakban egyszerűen *reláció*). Kétféleképpen is jelölhetjük, hogy az $a, b \in U$ elemek ϱ relációban állnak egymással: $(a, b) \in \varrho$ vagy infix jelöléssel $a\varrho b$. Azt mondjuk, hogy a ϱ reláció egy *részbenrendezés*, ha reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus. Egy relációt *ekvivalenciareláció*-nak nevezünk, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Az előzőeknél egy-egy tulajdonságot elhagyva kaphatunk néhány új fogalmat. A reflexív és tranzitív relációkat *kvázirendezés*-nek, míg a reflexív és szimmetrikus relációkat *toleranciának* nevezzük. Legyen most P egy halmaz, $\leq$ pedig egy rajta értelmezett részbenrendezés. Ekkor a $(P, \leq)$ struktúrát *részbenrendezett halmaznak* nevezzük.

Ha egy $(L, \leq)$ részbenrendezett halmazban bármely két $a, b \in L$ elemnek létezik *infimuma*, $\inf\{a, b\}$ (legnagyobb alsó korlátja) és *szuprémuma*, $\sup\{a, b\}$ (legkisebb felső korlátja), akkor azt mondjuk, hogy $(L, \leq)$ egy *háló*. Ha L bármely $A \subseteq L$ részhalmazának létezik infimuma, $\inf A$ és szuprémuma, $\sup A$, akkor $(L, \leq)$ egy *teljes háló*. Hálóban az $a, b \in L$ elemek infimumát és szuprémumát szoktuk rendre $a \wedge b$ és $a \vee b$ módon is jelölni. Hasonlóan az $A \subseteq L$ halmaz infimumát és szuprémumát rendre $\bigwedge A$ és $\bigvee A$ jelöli. Azt mondjuk, hogy az $(L, \leq)$ háló *disztributív*, ha bármely $a, b, c \in L$ elemre az alábbi két (egymással ekvivalens) tulajdonság teljesül:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Ha egy L teljes hálóban bármely kettősen indexelt $x_{i,j} \in L$ elemekre ($i \in I, j \in J$ és $I, J \neq \emptyset$) teljesül, hogy

$$\bigwedge_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in J} x_{i,j} \right) = \bigvee_{f: I \rightarrow J} \left(\bigwedge_{i \in I} x_{i,f(i)} \right), \quad (2.1)$$

akkor azt mondjuk, hogy L *teljesen disztributív háló*.

Az L háló *pszeudokomplementumos háló*, ha van legkisebb eleme ($0 \in L$), és bármely $x \in L$ esetén egyértelműen létezik egy $x^* \in L$ elem, amire $x \wedge x^* = 0$

pontosan akkor teljesül, ha $z \leq x^*$. Ekkor az x^* elemet az x *pszeudokomplementumának* nevezzük. Ha az L disztributív pszeudokomplementumos hálón minden $x \in L$ esetén teljesül, hogy $x^* \vee x^{**} = 1$, akkor L egy *Stone-háló*. Ha az L hálónak van legnagyobb eleme ($1 \in L$), akkor az $x^+ \in L$ elemet az $x \in L$ elem *duális pszeudokomplementumának* nevezzük, amennyiben $x \vee z = 1$ pontosan akkor teljesül, ha $z \geq x^+$. Ha az L hálónak egyaránt van legkisebb és legnagyobb eleme, valamint minden elemének van pszeudokomplementuma és duális pszeudokomplementuma, akkor L *duplán pszeudokomplementumos háló*. Amennyiben L egy duplán pszeudokomplementumos Stone-háló, és az is teljesül, hogy minden $x \in L$ esetén $x^+ \wedge x^{++} = 0$, úgy azt mondjuk, hogy L egy *dupla Stone-háló*. Az L duplán pszeudokomplementumos háló *reguláris*, ha minden $x, y \in L$ elemre $x^* = y^*$ és $x^+ = y^+$ esetén $x = y$ teljesül.

2.2. Durva halmazok elmélete

A durva halmazok fogalmát Zdzisław Pawlak vezette be [66]. A fogalom mögötti motiváció, hogy az egyes objektumokkal kapcsolatos hiányos ismereteket kezelni tudjuk. Az információ hiányossága miatt előfordulhat, hogy egyes objektumok között nem tudunk különbséget tenni. Az eredeti durvahalmazmodellben ezt egy ekvivalenciareláció, méghozzá egy úgynevezett *megkülönböztethetlenségi reláció* reprezentálja, ami azt modellezi, hogy a rendelkezésünkre álló információk alapján mely elemeket nem vagyunk képesek megkülönböztetni egymástól. Az évek során a durvahalmaz-modellt több megközelítéssel is általánosították és kiterjesztették. A durva halmazok fejlődésének első évtizedéről áttekintést ad a [69] mű, további kutatási irányokat és alkalmazásokat pedig a [70] cikk említ. Eredetileg Pawlak azt feltételezte, hogy ez a reláció ekvivalencia, de később több más relációtípussal definiált durvahalmaz-modell is a vizsgálat tárgyát képezte [75, 92, 36, 40, 42, 38, 48, 49, 109]. Az egyik általánosítási irány, hogy ekvivalencia helyett más típusú bináris relációt használunk, például kvázirendezéseket vagy toleranciákat [109, 38, 40].

A durva halmaz a hagyományos (*éles* vagy *crisp*) halmazfogalom kiterjesztésével keletkezik, ami figyelembe veszi, hogy a rendelkezésünkre álló tudás általában nem teljes és sok esetben bizonytalan.

Legyen az A halmaz részhalmaza az U alaphalmaznak és legyen $E \subseteq U \times U$ egy ekvivalenciareláció. Az (U, E) párt *approximációs térnek* nevezzük, ami- ben az A halmaz *alsó*, illetve *felső approximációját* (*közelítését*) a következőképpen definiálhatjuk:

$$A_E = \{x \in U \mid [x]_E \subseteq A\}, A^E = \{x \in U \mid [x]_E \cap A \neq \emptyset\}, \quad (2.2)$$

ahol $[x]_E$ az $x \in U$ elemhez tartozó ekvivalenciaosztály. Az U részhalmazain értelmezhetünk egy $\equiv$ ekvivalenciarelációt a következőképpen:

$$\text{Az } A, B \subseteq U \text{ halmazokra } A \equiv B \Leftrightarrow A_R = B_R \text{ és } A^R = B^R.$$

Az (U, E) approximációs térben az $A \subseteq U$ halmazhoz tartozó *durva halmazt* az (A_E, A^E) párral azonosítjuk.

Az E ekvivalencia osztályainak uniójaként kapott halmazokat *E-definiálható* halmaznak, vagy *egzakt* halmaznak nevezzük. Itt érdemes megjegyezni, hogy ha A egy E -definiálható halmaz, akkor $A_E = A^E = A$.

Ekvivalenciareláció helyett tetszőleges $R \in U \times U$ relációra értelmezhetjük az approximációs operátorokat:

$$A_R = \{x \in U \mid R(x) \subseteq A\}, A^R = \{x \in U \mid R(x) \cap A \neq \emptyset\}, \quad (2.3)$$

ahol $x \in U$ esetén $R(x) = \{y \in U \mid (x, y) \in R\}$. Ekvivalencia esetén $R(x) = [x]_R$. Az U alaphalmazon és R relációra értelmezett durva halmazok összességét $\mathcal{RS}(U, R)$ jelöli, amin a komponensenkénti tartalmazás által értelmezhető egy részbenrendezés:

$$(A_R, A^R) \leq (B_R, B^R) \Leftrightarrow A_R \subseteq B_R \text{ és } A^R \subseteq B^R. \quad (2.4)$$

Általánosságban véve $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, aminek a legkisebb eleme $(\emptyset, \emptyset)$, legnagyobb eleme pedig (U, U) .

Az *összes alsó approximáció halmazát* $\mathcal{P}(U)_R$, az *összes felső approximáció halmazát* pedig $\mathcal{P}(U)^R$ jelöli. Ismert, hogy $\mathcal{P}(U)_R$ és $\mathcal{P}(U)^R$ duálisan izomorf hálók, továbbá az is, hogy amennyiben R egy kvázirendezés, úgy $\mathcal{P}(U)_R$, $\mathcal{P}(U)^R$ és $\mathcal{RS}(U, R)$ teljesen disztributív hálók.

2.1. Tétel ([76, 14]). *Az $E \in U \times U$ ekvivalenciareláció esetén $(\mathcal{RS}(U, E), \vee, \wedge, \sim, (\emptyset, \emptyset), (U, U))$ egy reguláris dupla Stone-hálót alkot.*

2.3. Fuzzy halmazok és fuzzy relációk

A fuzzy halmazok elméletét Lotfi Zadeh vezette be [112]. Az A fuzzy halmazt a $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ *tagsági függvény*vel tudjuk megadni. Az $x \in U$ elemre nézve a $\mu_A(x) = 1$ tagsági érték azt jelenti, hogy az x elem teljes mértékkel beletartozik A -ba, míg a $\mu_A(x) = 0$ tagsági érték azt jelenti, hogy az x elem nulla mértékkel tartozik A -ba. Azt mondjuk, hogy az A fuzzy halmaz *véges értékkészletű*, ha az (éles) $\{\mu_A(x) \mid x \in U\}$ halmaz véges. Az U alaphalmazon értelmezett fuzzy halmazok összességét jelölje $\mathcal{F}(U)$.

Az U alaphalmazon értelmezett R (*bináris*) fuzzy reláció egy $U \times U$ halmazon értelmezett fuzzy halmaz, tehát a tagsági függvénye $\mu_R : U \times U \rightarrow [0, 1]$. Azt mondjuk, hogy az R fuzzy relációnak *véges értékkészlete van*, ha az értékei által meghatározott $\{\mu_R(x, y) \mid x, y \in U\}$ (éles) halmaz véges.

A későbbiekben a jelölések egyszerűsítése érdekében előfordulhat, hogy egy fuzzy halmazra vagy fuzzy relációra csak a tagsági függvényével hivatkozom, pl. az $f : U \rightarrow [0, 1]$ fuzzy halmaz, a $\theta : U \times U \rightarrow [0, 1]$ fuzzy reláció.

Egy *fuzzy hasonlósági reláció* (más néven *fuzzy ekvivalenciareláció*) egy reflexív, szimmetrikus és tranzitív fuzzy reláció. Fuzzy relációk esetén a *reflexív tulajdonság* azt jelenti, hogy $\mu_R(x, x) = 1$ minden $x \in U$ esetén, a *szimmetria* pedig azt, hogy $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ minden $x, y \in U$ esetén. Eleinte

akkor neveztek egy R fuzzy relációt *tranzitív*nak, ha $\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)) \leq \mu_R(x, z)$ teljesült minden $x, y, z \in U$ esetén [113]. Később ezt a fogalmat általánosították a t -normák alkalmazásával [99]. A $([0, 1], \leq)$ hálóban a $\sim x := 1 - x$ műveletet definiálva egy teljesen disztributív Kleene-algebrát kapunk.

A *háromszögnorma* (röviden *t-norma*) egy olyan monoton növekvő, kommutatív és asszociatív $\mathcal{T}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ leképezés, amelyre minden $x \in [0, 1]$ esetén teljesül, hogy $\mathcal{T}(1, x) = \mathcal{T}(x, 1) = x$. A $\mathcal{T}$ t -normát *pozitív*nak nevezzük [5], ha $x, y > 0$ esetén $\mathcal{T}(x, y) > 0$. A $\mu_R: U^2 \rightarrow [0, 1]$ fuzzy reláció $\mathcal{T}$ -tranzitív, ha

$$\mathcal{T}(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)) \leq \mu_R(x, z), \text{ minden } x, y, z \in U \text{ esetén.}$$

Ha az R fuzzy reláció reflexív és $\mathcal{T}$ -tranzitív, akkor *fuzzy $\mathcal{T}$ -kvázirendezésnek* nevezzük. Ha az R fuzzy reláció reflexív, szimmetrikus és $\mathcal{T}$ -tranzitív, akkor *$\mathcal{T}$ -ekvivalenciának*, vagy *fuzzy $\mathcal{T}$ -hasonlósági relációnak* nevezzük. Amikor $\mathcal{T}(x, y) = \min(x, y)$, akkor szokás simán *fuzzy hasonlósági relációnak* is nevezni. Jól ismert, hogy a minimumnorma egy pozitív t -norma, amellyel a korábbi tranzitivitási fogalmat kapjuk. Minden $\mathcal{T}$ t -norma kielégíti minden $x \in L$ esetén, hogy $\mathcal{T}(x, 0) = \mathcal{T}(0, x) = 0$.

A $\mathcal{T}$ t -normát (*balról*) *folytonosnak* nevezzük [25], ha függvényként balról folytonos a szokásos $[0, 1]^2$ intervallumtopológiában. Szokás még a t -normákat infix módon is jelölni, például a $\odot: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ t -norma esetén $\odot(x, y)$ helyett írhatjuk, hogy $x \odot y$.

Az $\oplus$ *háromszög-konorma* (röviden *t-konorma*) [84] egy kommutatív, asszociatív és monoton növekvő bináris művelet a $[0, 1]$ intervallumon, amely minden $x \in [0, 1]$ esetén kielégíti, hogy $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$. A $\oplus$ t -konorma (*balról*) *folytonos* [25], ha függvényként balról folytonos a szokásos topológiában.

2.4. Képtömörítéssel kapcsolatos tesztek

Az általam javasolt képtömörítési algoritmus teszteléséhez és kiértékeléséhez elkészítettem Petrosino és Ferone algoritmusának [73] és az általam javasolt továbbfejlesztésnek az implementációját. A megvalósítást C#-ban készítettem, a kapcsolódó teszteket a *Microsoft COCO: Common Objects in Context* [50] adathalmaz 2017-es címkézetlen képeinek (*2017 Unlabeled images*) rész-halmazát feldolgozva végeztem el.

A visszaállított kép minőségének mérésére a *csúcs jel-zaj viszonyt* (*PSNR, peak signal-to-noise ratio*) használtam, ami egy általánosan használt mérőszám a jelfeldolgozásban [28]. Legyen a kép szélessége w , magassága h , a kép y -edik sorának x -edik pixelének értékét jelölje a $c \in \{R, G, B\}$ színcsatornán $I_c(x, y)$, ugyanezt a tömörített képben pedig jelölje $C_c(x, y)$. A gyakorlatban szokás az eltérés mértékét az *átlagos négyzetes hibával* (*MSE, mean squared error*) számszerűsíteni:

$$MSE = \frac{1}{3 \cdot w \cdot h} \sum_{c \in \{R, G, B\}} \sum_{x=0}^w \sum_{y=0}^h (I_c(x, y) - C_c(x, y))^2. \quad (2.5)$$

Ekkor a jel-zaj viszonyt (decibelben) az alábbi képlet határozza meg:

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{MAX^2}{MSE} \right), \quad (2.6)$$

ahol MAX jelöli az adott pixel egy színcsatornájában a lehetséges értékek számát (más szavakkal a színcsatorna bináris reprezentációjának maximális értékét). A feldolgozott képek esetén 8 bites csatornákról van szó, így $MAX = 2^8 - 1 = 255$. Minél közelebb áll az eredeti képhez a tömörítés után helyreállított kép, a PSNR értéke annál nagyobb.

3. TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK

3.1. Multigranuláris durva halmazok

3.1.1. Elméleti áttekintés

A durva halmazok modelljére lehet úgy tekinteni, hogy egyetlen szakértő véleményét tükrözi arról, hogy melyek a megkülönböztethetetlen elemek. A multigranuláris durva halmazok modellje ezzel szemben jelentheti azt, hogy egy halmaz approximációinak meghatározásakor egy szakértő értékelése helyett több szakértő megállapítását is figyelembe vesszük. Így az objektumok megkülönböztethetlenségét nem csak egyetlen ekvivalenciareláció fogja kifejezni. Ennek modellezésére két elterjedt megközelítést adnak az optimista és a pesszimista multigranuláris durva halmaz modellek.

Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon. Ekkor az $A \subseteq U$ halmaz úgynevezett *optimista alsó közelítését* [78] a következőképpen definiáljuk:

$$A_{\sum_{i=1}^n P_i} = \{x \in U \mid P_1(x) \subseteq A \text{ vagy } P_2(x) \subseteq A \text{ vagy } \dots \text{ vagy } P_n(x) \subseteq A\}. \quad (3.1)$$

Az A halmaz *optimista felső közelítése*:

$$A^{\sum P_i} = \{x \in U \mid P_1(x) \cap A \neq \emptyset \text{ és } \dots \text{ és } P_n(x) \cap A \neq \emptyset\}, \quad (3.2)$$

A tömörség és olvashatóság érdekében a továbbiakban a $\sum P_i$ jelölést használom a $\sum_{i=1}^n P_i$ helyett. Legyen továbbá $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ és $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$ az összes optimista felső és összes optimista alsó közelítés halmaza U -n.

A pesszimista alsó és felső közelítéseket a $\bigcup_{i=1}^n P_i$ toleranciarelációt felhasználva az 2.3. képlet segítségével adjuk meg.

3.1.2. Főbb eredmények

A kutatásom során definiáltam az alábbi feltételeket a $P_1, P_2, \dots, P_n \subseteq U \times U$ ekvivalenciarelációkra.

- ($\star$) Minden $x \in U$ esetén létezik olyan $k_x \in \{1, 2, \dots, n\}$, amelyre $P_{k_x}(x) \subseteq P_i(x)$ teljesül minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén.
- ($\star$)^d Minden $x \in U$ esetén létezik $k_x \in \{1, \dots, n\}$ úgy, hogy $P_i(x) \subseteq P_{k_x}(x)$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén.
- (Si) $\left| \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) (x) \right| = 1 \Rightarrow$ létezik olyan $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, amire $|P_k(x)| = 1$.

Ezeket felhasználva az alábbi állításokat bizonyítottam.

3.1. Állítás. *Legyenek $P_1, \dots, P_n$ olyan ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, amelyek kielégítik a ($\star$) feltételt. Ekkor $RS(\sum P_i)$ egy teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló.*

3.2. Állítás. Ha $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, amelyek teljesítik a $(\star)^d$ feltételt, akkor $\bigcup P_i$ egy ekvivalenciareláció.

3.3. Következmény. Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, amelyek kielégítik $(\star)^d$ feltételt. Ekkor $RS(\bigcup P_i)$ egy teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló.

3.4. Tétel. Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_n$ ekvivalenciarelációk az U alaphalmazon, amelyek kielégítik a (Si) feltételt. Ekkor $RS(\sum P_i)$ egy teljes háló.

Ezenfelül definiáljuk a $\sum P_i$ -durva halmazok növekvő reprezentációját az alábbi módon:

$$IRS(\sum P_i) = \left\{ (A, B) \in \mathcal{P}(U)_{\sum P_i} \times \mathcal{P}(U)^{\sum P_i} \mid A \subseteq B \text{ és } (B \setminus A) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n S_i \right) = \emptyset \right\}.$$

Ezzel kapcsolatban az alábbi tételt bizonyítottam.

3.5. Tétel. $RS(\sum P_i)$ Dedekind–MacNeille-kiterjesztése $IRS(\sum P_i)$.

Továbbá néhány segédétel és a korábbi állítások felhasználásával kijelenttem és igazoltam az alábbi állítást.

3.6. Állítás. Az alábbi állítások ekvivalensek:

- (a) $IRS(\sum P_i)$ disztributív;
- (b) $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$ és $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ disztributívak;
- (c) $P_1, P_2, \dots, P_n$ kielégítik a $(\star)$ feltételt;
- (d) $\mathcal{P}(U)_{\sum P_i}$ és $\mathcal{P}(U)^{\sum P_i}$ Alexandroff-topológiát alkotnak;
- (e) $RS(\sum P_i)$ egy teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló.

3.1.3. Újdonság és hasznosíthatóság

A szakirodalomban korábban kevésbé vizsgálták részletesen a multigranuláris durva halmazok rendezési struktúráit általánosan, azaz $n \geq 2$ ekvivalenciareláció esetén. Az $n = 2$ esetre vonatkozó eredmények [41] általánosítása tetszőleges n esetre nagyban hozzájárul a tudományág elősegítésére, lehetőséget nyit még általánosabb esetek feldolgozására. Ezeken felül nemcsak a további elméleti elemzés, hanem gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából is fontos volt megvizsgálni, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkeznek. A multigranuláris durva halmazok modellje hasznosítható például az ajánlórendszerek területén.

3.1.4. I. TÉZIS

Megvizsgáltam az optimista és pesszimista multigranuláris durva halmazok rendezési struktúráit. Megállapítottam, hogy mikor alkotnak teljes hálót, valamint teljesen disztributív hálót. Megmutattam, hogy az optimista multigranuláris durva halmazok növekvő reprezentációja megegyezik a Dedekind–MacNeille-kiterjesztéssel. Meghatároztam, hogy a pesszimista, illetve az optimista multigranuláris durva halmazok milyen feltételek mellett alkotnak teljesen disztributív reguláris dupla Stone-hálót. (Ilyen hálót alkotnak a klasszikus Pawlak-féle durva halmazok is.)

Tézishez tartozó publikációim: [S7, S6, S5]

3.2. Fuzzy durva halmazok éles referencialhalmazzal

3.2.1. Elméleti áttekintés

A durva halmazok elméletének bevezetése óta többféle megközelítést is javasoltak a durva halmazok és a fuzzy halmazok elméletének kombinálására. A kutatásom során a kombinált modellek közül először olyan fuzzy durva halmazokkal foglalkoztam, ahol az approximációs tér fuzzy, de a referencialhalmaz éles.

Legyen (U, R) egy fuzzy approximációs tér, ahol U az alaphalmaz, és R egy fuzzy hasonlósági reláció, amelyet egy $\mu_R : U^2 \rightarrow [0, 1]$ tagsági függvény határoz meg. Legyen továbbá $A \subseteq U$ egy éles halmaz. Az A alsó approximációját az alábbi tagsági függvény adja meg:

$$\mu_{[A]_R}(x) = \inf\{1 - \mu_R(x, y) \mid y \notin A\},$$

míg az A felső approximációját a következő tagsági függvény határozza meg:

$$\mu_{[A]^R}(x) = \sup\{\mu_R(x, y) \mid y \in A\}.$$

Az éles A halmazhoz tartozó *fuzzy durva halmazt* a $(\mu_{[A]_R}, \mu_{[A]^R})$ párként definiálhatjuk. Ismert, hogy az (U, R) approximációs tér összes durva halmaza hálót alkot, amely számos érdekes tulajdonsággal bír [76, 14, 23, 26].

Az $S_R := \{\mu_R(x, y) \mid x, y \in U\} \subseteq [0, 1]$ halmazt R *spektrumának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az R fuzzy relációnak *duálisan jólrendezett spektruma van*, ha S_R minden nemüres részhalmazának van legnagyobb eleme.

Az R fuzzy hasonlósági relációra definiáljuk a következő éles ekvivalencia-relációkat:

$$E := \{(x, y) \in U^2 \mid \mu_R(x, y) = 1\}, \quad S = \{(x, y) \in U^2 \mid \mu_R(x, y) > 0\}.$$

Előbbit a fuzzy reláció magjának, utóbbit a tartójának nevezzük (fuzzy halmazokra hasonlóan értelmezhető a fogalom).

3.2.2. Főbb eredmények

A durva L -fuzzy approximációk tartóját és magját összefüggésbe hoztam az approximációs tér R fuzzy ekvivalenciarelációjának tartójával, illetve magjával – ehhez megfogalmaztam és bizonyítottam a következő lemmát.

3.7. Lemma. *Bármely $A \subseteq U$ halmazra teljesül, hogy*

$$(i) \ A^E = \{x \in U \mid \mu_{[A]_R}(x) = 1\}, \quad (ii) \ A_E = \{x \in U \mid \mu_{[A]_R}(x) > 0\},$$

$$(iii) \ A^S = \{x \in U \mid \mu_{[A]_R}(x) > 0\}, \quad (iv) \ A_S = \{x \in U \mid \mu_{[A]_R}(x) = 1\}.$$

Az éles referencialhalmazzal rendelkező fuzzy durva halmazok részben rendezett halmazát jelölje $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$. Az R reláció E magjához tartozó (hagyományos) durva halmazok hálóját pedig jelölje $(\mathcal{RS}(U, E), \leq)$. A kettő között az alábbi tétellel és bizonyításával teremtettem kapcsolatot.

3.8. Tétel. *Legyen R egy fuzzy ekvivalencia U -n, aminek duálisan jólrendezett spektruma van. Ekkor $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ egy teljes háló, ami izomorf $(\mathcal{RS}(U, E), \leq)$ -vel.*

Ennek közvetlen következménye:

3.9. Következmény. *Ha R egy fuzzy hasonlóság az U halmazon, amelynek spektruma duálisan jólrendezett, akkor $(\mathcal{RS}(U, R), \leq)$ egy teljesen disztributív reguláris dupla Stone-háló.*

Az egzakt halmaz fogalma általánosítható fuzzy durva halmazokra is. Az (U, R) fuzzy approximációs térben egy fuzzy durva halmaz akkor *egzakt*, ha minden $x \in U$ elemre teljesül, hogy $\mu_{[A]_R}(x) = \mu_{[A]_R}(x)$. A következő állítás írja le az egzakt fuzzy durva halmazok és a fuzzy hasonlósági reláció tartóhalmaza közötti kapcsolatot (éles referencialhalmaz esetén).

3.10. Állítás. *Legyen A az U alaphalmaz egy (éles) részhalmaza. Ekkor*

$$\mu_{[A]_R}(x) = \mu_{[A]_R}(x) \text{ minden } x \in U \Leftrightarrow A_S = A^S.$$

3.2.3. Újdonság és hasznosíthatóság

A fuzzy durva halmazok (akár éles, akár fuzzy referencialhalmazzal) hálóméleti szempontból a szakirodalomban kutatási résnek számítottak, így az eredmények újszerűek, és új utat nyitnak meg a témakör további vizsgálatához. Annak vizsgálata, hogy az éles referencialhalmazokkal rendelkező fuzzy halmazok mikor alkotnak teljesen disztributív reguláris dupla Stone-hálót, azért hasznos, mert ekkor ugyanúgy viselkednek, mint a hagyományos durva halmazok. Ez azzal jár továbbá, hogy ugyanolyan logikai struktúrák definiálhatók rajtuk, mint a durva halmazokon. Az elemzés az általánosabb elméleti vizsgálatoknak is utat nyitott, méghozzá a fuzzy referencialhalmazzal rendelkező fuzzy durva halmazok analíziséhez, amivel a IV. Tézisben foglalkozom.

3.2.4. II. TÉZIS

Megmutattam, hogy egy duálisan jólrendezett spektrumú fuzzy hasonlósági reláción értelmezett, éles referenciahalmazokra vonatkozó fuzzy durva halmazok hálójá teljes hálót alkot, ami izomorf a fuzzy reláció magján értelmezett durva halmazok hálójával. Megvizsgáltam a kapcsolatot az ilyen típusú fuzzy durva halmazok alsó, illetve felső approximációjának tartója és magja, valamint a fuzzy reláció tartóján, illetve magján értelmezett approximációk között. Bizonyítottam, hogy a fuzzy hasonlósági reláció tartójának egzakt halmazai – pontosabban azok karakterisztikus függvényei – meg egyeznek az egzakt fuzzy durva halmazokkal (éles referenciahalmaz mellett).

Tézishez tartozó publikációim: [S8, S4]

3.3. Durva L -fuzzy halmazok

3.3.1. Elméleti áttekintés

A $[0, 1]$ intervallumon felvett tagsági értékek helyett most a tagsági függvény egy tetszőleges korlátos L hálón felveheti értékét. Legyen U egy nemüres alaphalmaz, $f: U \rightarrow L$ egy L -fuzzy halmaz és $E \subseteq U \times U$ egy ekvivalenciareláció U felett. Az f alsó közelítését $\underline{f}: U \rightarrow L$ és felső közelítését $\bar{f}: U \rightarrow L$ az alábbiak szerint definiáljuk:

$$\underline{f}(x) := \bigwedge \{f(y) \mid y \in [x]_E\}, \quad x \in U, \quad (3.3)$$

$$\bar{f}(x) := \bigvee \{f(y) \mid y \in [x]_E\}, \quad x \in U, \quad (3.4)$$

Az L -fuzzy halmazok összességét jelölje $\mathcal{F}(U, L)$, a durva L -fuzzy halmazok összességét pedig $\mathcal{RF}(U, L)$. $\mathcal{F}(U, L)$ -ről ismert, hogy teljes hálót alkot.

Az E (éles) ekvivalenciareláció egytagú ekvivalenciaosztályainak halmazát jelölje S , azaz $S := \{s \in U \mid [s]_E = \{s\}\}$.

Továbbá azt mondjuk, hogy az $\alpha: U \rightarrow L$ leképezés *konstans az E ekvivalenciaosztályain*, (röviden *E -konstans*), ha minden $x, y \in U$ elempárra teljesül, hogy $(x, y) \in E$ esetén $\alpha(x) = \alpha(y)$.

Az $(U_1 \times U_2, R)$ approximációs teret az (U_1, R_1) és (U_2, R_2) approximációs terek *direkt szorzatának* nevezzük. Bármely $\varrho \subseteq U_1 \times U_2$ reláció alsó és felső approximációja $(U_1 \times U_2, R)$ -ben a szokásos módon definiálható.

A teljes L háló egy $x \neq 0$ eleme *teljesen egyesítés-irreducibilis*, ha bármely $T \subseteq L$ -re $x = \bigvee T$ esetén $x \in T$. A teljesen egyesítés-irreducibilis elemek halmazát J -vel jelöljük. Továbbá legyen $\triangle_L := \{(x, x) \mid x \in L\}$.

Bármely $x \in L$ esetén legyen $J(x) = \{j \in J \mid j \leq x\}$ és $A(x) = \{a \in A \mid a \leq x\}$. Az L háló *térszerű*, ha bármely $x \in L$ esetén $x = \bigvee J(x)$. Hasonlóan, az L háló *atomisztikus*, ha bármely $x \in L$ esetén $x = \bigvee A(x)$.

3.3.2. Főbb eredmények

3.11. Tétel. Legyen U egy nemüres alaphalmaz, és legyen L egy teljes háló. Az (f, g) L -fuzzy halmazpár, ahol $f, g: U \rightarrow L$, pontosan akkor az $E \subseteq U \times U$ ekvivalenciareláció által származtatott durva L -fuzzy halmaz, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

- (a) f és g konstans az E osztályain;
- (b) $f \leq g$;
- (c) $f(s) = g(s)$, minden $s \in S$ esetén.

3.12. Tétel. Legyen E egy ekvivalenciareláció az $U \neq \emptyset$ alaphalmazon, és legyen L egy teljes, térszerű, disztributív háló. Ekkor $\mathcal{RF}(U, L)$ izomorf az $(U \times J, R)$ approximációs tér zárt durva halmazainak hálójával, ahol $R = E \times \Delta_J$.

A hálótulajdonságokra vonatkozóan az alábbi állításokat, tételeket fogalmaztam meg, és bizonyítottam.

3.13. Állítás. Az L háló izomorf $\mathcal{RF}(U, L)$ egy főideáljával.

3.14. Következmény. $\mathcal{RF}(U, L)$ akkor és csakis akkor (teljesen) disztributív háló, ha L is (teljesen) disztributív. Speciális esetben: $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$ egy teljesen disztributív háló.

3.15. Állítás. (i) A $\mathcal{RF}(U, L)$ háló akkor és csak akkor pszeudokomplementumos, ha L pszeudokomplementumos.

(ii) $\mathcal{RF}(U, L)$ akkor és csak akkor (L_n) -háló, ha L (L_n) -háló.

(iii) Ha $L = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ egy Boole-háló, vagy $L = ([0, 1], \max, \min)$, akkor $\mathcal{RF}(U, L)$ egy Stone-algebra, ahol $(f, g)^*(x) = (\neg g(x), \neg g(x))$, illetve $(f, g)^*(x) = (g(x)^*, g(x)^*)$.

3.16. Tétel. Tegyük fel, hogy $E \subseteq U \times U$ különbözik az identitásrelációtól. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) $\mathcal{RF}(U, L)$ egy háromértékű Łukasiewicz-algebra, ahol $\nabla(f_1, f_2) := (f_2, f_2)$, $(f_1, f_2) \in \mathcal{RF}(U, L)$.
- (ii) $\mathcal{RF}(U, L)$ egy Nelson-algebra;
- (iii) $\mathcal{RF}(U, L)$ egy Kleene-algebra;
- (iv) L egy Boole-háló.

3.17. Állítás. Legyen E egy ekvivalenciareláció az $U \neq \emptyset$ alaphalmazon, és legyen L egy teljes, atomisztikus Boole-háló. Ekkor a $(\mathcal{RF}(U, L), \vee, \wedge, \simeq, \nabla, (0, 0), (1, 1))$ háromértékű Łukasiewicz-algebra izomorf az $(U \times A, R)$ approximációs térbeli $(RS(U \times A, R), \vee, \wedge, \sim, \nabla, (\emptyset, \emptyset), (U, U))$ durvahalmaz-algebrájával, ahol $R = E \times \Delta_A$.

3.3.3. Újdonság és hasznosíthatóság

A durva L -fuzzy halmazok hálóelméleti eszközökkel történő vizsgálata új elméleti eredményeket produkált, ami előkészíti az általánosabb eset vizsgálatát, amikor a referenciahalmaz és az approximációs tér egyaránt fuzzy. Továbbá számos hasznos tulajdonság öröklődik az L hálóról a durva L -fuzzy halmazokra, így az eredmények a jövőben a rajtuk értelmezhető logikai struktúrák vizsgálatát is megkönnyíti.

3.3.4. III. TÉZIS

Kijelentettem és bizonyítottam egy reprezentációs tételt, ami meghatározza, hogy egy L -fuzzy halmazpár mikor alkot durva L -fuzzy halmazt egy adott (éles) approximációs térben. Kapcsolatot teremtettem a durva L -fuzzy halmazok és a durva relációk között. Megmutattam, hogy milyen tulajdonságok öröklődnek az L hálóról a durva L -fuzzy halmazok hálójára. Megadtam, hogy milyen feltételek ekvivalensek azzal, hogy a durva L -fuzzy halmazok hálója háromértékű Łukasiewicz-algebrát alkosson.

Tézishez tartozó publikációm: [S10]

3.4. Fuzzy durva halmazok fuzzy referenciahalmazzal

3.4.1. Elméleti áttekintés

Az *implikátor* egy bináris művelet (leképezés) $\triangleright: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, amely az első változó szerint csökkenő, a második szerint növekvő, és kielégíti a következő határfeltételeket:

$$0 \triangleright 0 = 0 \triangleright 1 = 1 \triangleright 1 = 1 \text{ és } 1 \triangleright 0 = 0.$$

A $\triangleright$ egy *határimplikátor*, ha minden $x \in [0, 1]$ esetén teljesül, hogy $1 \triangleright x = x$.

Legyen $\odot$ egy t -norma, és $\triangleright$ egy határimplikátor a $[0, 1]$ intervallumon.

3.18. Definíció. Ha (U, θ) egy fuzzy approximációs tér, akkor bármely $f \in \mathcal{F}(U)$ fuzzy halmazhoz rendelt $\underline{\theta}(f)$ fuzzy alsó approximációt és $\bar{\theta}(f)$ fuzzy felső approximációt a következőképpen definiáljuk:

$$\underline{\theta}(f)(x) := \bigwedge \{ \theta(x, y) \triangleright f(y) \mid y \in U \}, \text{ minden } x \in U \text{ esetén.}$$

$$\bar{\theta}(f)(x) := \bigvee \{ \theta(x, y) \odot f(y) \mid y \in U \}, \text{ minden } x \in U \text{ esetén.}$$

Az $(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f)) \in \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U)$ párt az (U, θ) approximációs térben definiált fuzzy durva halmaznak nevezzük.

3.19. Definíció. Legyen (U, θ) egy fuzzy approximációs tér, $a, b \in U$ és $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(g)$. Ekkor

$$(i) (a, b) \in R(F) \Leftrightarrow F(a) = \theta(a, b) \odot F(b);$$

$$(ii) (a, b) \in \varrho(G) \Leftrightarrow G(a) = \theta(a, b) \triangleright G(b).$$

Tekintsük továbbá a következő két – $E(F)$ és $\varepsilon(G)$ – ekvivalenciarelációt:

$$E(F) := R(F) \cap R(F)^{-1} \text{ és } \varepsilon(G) := \varrho(G) \cap \varrho(G)^{-1}.$$

A (U, θ) fuzzy approximációs tér esetén bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\text{Fix}(\underline{\theta}) = \{f \in \mathcal{F}(U) \mid \underline{\theta}(f) = f\}, \text{Fix}(\bar{\theta}) = \{f \in \mathcal{F}(U) \mid \bar{\theta}(f) = f\}.$$

Az elemzéshez megfogalmaztam többek között az alábbi feltételt is:

(ID) Legyen $\odot$ egy balról folytonos t -norma és $\triangleright$ a belőle származó R -implikátor; vagy legyen n egy involutív negátor, $\oplus$ egy t -konorma, amely n -duálisa $\odot$ -nak, és $\triangleright$ az általuk meghatározott S -implikátor. Ha θ egy $\odot$ -tranzitív fuzzy reláció, akkor bármely $f, g \in \mathcal{F}(U)$ esetén teljesül, hogy $\bar{\theta}(\bar{\theta}(f)) = \bar{\theta}(f)$ és $\underline{\theta}(\underline{\theta}(g)) = \underline{\theta}(g)$ [17, 54, 84].

3.4.2. Főbb eredmények

A fuzzy durva halmazok analízise során több lényeges állítást kijelentettem és bizonyítottam. Ezek a kutatásom két fő eredményéhez vezettek. Az egyik fő eredmény az alábbi reprezentációs tétel.

3.20. Tétel. Tegyük fel, hogy az (ID) feltételei teljesülnek, és legyen (U, θ) egy fuzzy approximációs tér, ahol θ egy véges értékészletű $\odot$ -hasonlósági reláció, valamint $F, G \in \mathcal{F}(U)$. Ekkor (F, G) pontosan akkor egy véges értékészletű fuzzy halmazból származtatott fuzzy durva halmaz, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

- (1) $G \in \text{Fix}(\underline{\theta})$, $F \in \text{Fix}(\bar{\theta})$, $G \leq F$, továbbá F és G véges értékészletűek;
- (2) Ha $\mathcal{E}$ egy olyan maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, amelynek minden $\{a\} \subseteq \mathcal{E}$ eleme egy maximális $E(F)$ -osztály, akkor létezik olyan $u \in \mathcal{E}$ elem, amire $G(u) = F(u)$;
- (3) Ha E egy olyan maximális $E(F)$ -osztály, amelynek minden $\{a\} \subseteq E$ eleme egy maximális $\varepsilon(G)$ -osztály, akkor létezik olyan $v \in E$ elem, amire $G(v) = F(v)$.

A bizonyításban egy konstrukciót is megadtam egy olyan f fuzzy halmaz megadására, amelyre $F = \bar{\theta}(f)$, $G = \underline{\theta}(f)$.

A hálóelméleti vizsgálat során pedig az alábbi tételt jelentettem ki, és bizonyítottam.

3.21. Tétel. Legyen $\theta: U \times U \rightarrow L$ egy hasonlósági reláció véges értékkészlettel, és tegyük fel, hogy $x \odot y = \min(x, y)$, $x \triangleright y := \max(n(x), y)$, és n egy involutív negátor, amire $n(L) \subseteq L$.

- (i) Ha a $\bigwedge_{i \in I} f_i$, $\bigwedge_{i \in I} \bar{\theta}(f_i)$, $f_i \in \mathcal{F}(U, L)$, $i \in I$ fuzzy halmazok véges értékkészletűek, akkor a $(\underline{\theta}(f_i), \bar{\theta}(f_i))$, $i \in I$ fuzzy durva halmazok infimuma létezik $(\mathcal{FR}(U, L), \leq)$ -ben, és komponensei véges értékkészletűek.
- (ii) $(\mathcal{H}, \leq) = (\{(\underline{\theta}(f), \bar{\theta}(f)) \mid f \in \mathcal{F}_r(U, L)\}, \leq)$ egy háló.
- (iii) Ha U vagy L véges, akkor $(\mathcal{FR}(U, L), \leq)$ egy teljes háló.

3.4.3. Újdonság és hasznosíthatóság

A fuzzy referencialhalmazzal rendelkező fuzzy durva halmazok rendezési struktúrái a szakirodalomban kevésbé vizsgált területnek számított, így a kapcsolódó reprezentációs tétel és a hálóelméleti vizsgálat egyaránt új eredmények. Az általánosabb eset vizsgálata lehetőséget ad további kutatási irányvonalak feltárására – az előző eredményekkel kombinálva megfelelő alapot adhat például multigranuláris fuzzy durva halmazok vizsgálatának.

3.4.4. IV. TÉZIS

Az általánosabb keretrendszerben – tehát fuzzy approximációs térben és fuzzy referencialhalmaz esetén – kijelentettem és bizonyítottam egy reprezentációs tételt, amely megadja, hogy véges értékkészletű fuzzy hasonlósági reláció esetén milyen feltételek mellett alkot fuzzy durva halmazt egy fuzzy halmazpár. A konstruktív bizonyításban egy eljárást is megadok, amivel előállítható az a fuzzy halmaz, aminek alsó és felső approximációja megegyezik az adott fuzzy halmazpárral. Ezenfelül meghatároztam olyan feltételeket, amelyek mellett a fuzzy durva halmazok hálót, illetve teljes hálót alkotnak.

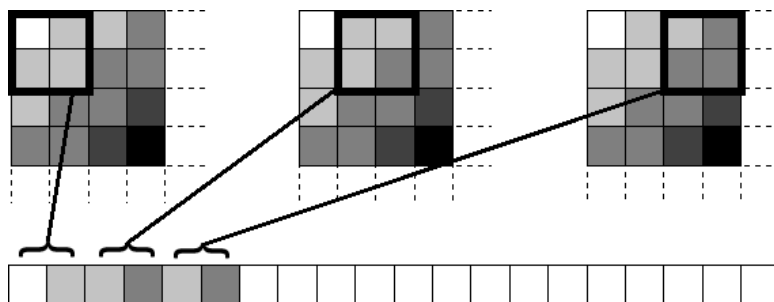
Tézishez tartozó publikációim: [S9, S1]

3.5. Fuzzy durva halmazok alkalmazása képtömörítésre

3.5.1. Elméleti háttér és előzmény

Petrosino és Ferone [73] durva fuzzy halmazokon alapuló képtömörítési módszere alapvetően egy blokkos tömörítést valósít meg szürkeárnyaltos képeken. A kép minden pixeléhez annak fényerőssége (luminosity) alapján rendel egy fuzzy halmazt – így a fekete szín 0 tagsági értéknek, a fehér szín pedig 1 tagsági értéknek felel meg. Maga a módszer három fázisra bontható: kódtábla felépítése, kódolás, dekódolás.

A kódtábla felépítésére tekinthetünk úgy, mint egyfajta "betanításra". Ekkor az algoritmus feldolgoz néhány ismert képet. Először a képeket egyforma méretű (pl. 4×4 -es) blokkokra osztjuk, majd minden egyes blokkon végigcsúsztatunk egy kisebb (pl. 2×2 -es ablakot). A módszer néhány lépését a 3.1. ábra szemlélteti. Az ablakra úgy tekintünk, hogy adott lépésben éppen egy (éles) ekvivalenciareláció egy osztályát mutatja. Erre az osztályra kiszámoljuk az alsó és a felső approximációjához tartozó tagsági értékeket, és elhelyezzük őket egy vektorba.



3.1. ábra. Blokkhoz tartozó vektor felépítése az ablak csúsztatásával.

A feldolgozás után a tanítóképek minden egyes blokkjához megkapjuk a hozzá tartozó vektort. A keletkező vektorhalmaz alkotja a kódtáblát. Viszont mivel ez nagyméretű lehet, ezért valamilyen vektorkvantálást célszerű alkalmazni rá.

Miután a mögöttes modellt felépítettük, vagyis túl vagyunk a kódtábla felépítésének fázisán, átadhatunk az algoritmusnak egy képet tömörítésre. Ehhez először a kódtábla felépítéséhez is használt módon blokkokra osztjuk a képet, és minden egyes blokkhoz kiszámoljuk a kapcsolódó vektort az ismertetett módon. Ezután megnézzük, hogy a blokkhoz melyik vektor áll a legközelebb a kódtáblában, és a tömörített képbe csupán annak sorszámát helyezzük.

Dekódolás során a tömörített képben tárolt sorszámok alapján kikeresünk a kódtáblából a megfelelő vektorokat az egyes blokkokhoz, majd rekonstruáljuk a pixeleket. Egy adott pixelre tekinthetünk úgy, hogy négy olyan ekvivalenciareláció osztályainak metszete, amelyekben a mozgóablak sarka volt az adott pixel.

A pixelhez a vektorból ki tudjuk olvasni a kapcsolódó négy ekvivalenciaosztályhoz tartozó alsó és felső approximáció értékeket. Ezeket a durva fuzzy halmazokon értelmezett szorzat felhasználásával összeszorozzuk, és megkapjuk a képpont fényerősségének alsó és felső approximációját. Lokális folytonosságot feltételezve ezek átlaga adja a dekódolt értéket.

3.5.2. Főbb eredmények

A módszer fő továbbfejlesztési lépése, hogy durva fuzzy halmazok helyett fuzzy durva halmazokat használ – tehát az alkalmazott ekvivalenciareláció is

fuzzy. Ehhez általánosítottam a durva fuzzy halmazokon értelmezett szorzás műveletét a következőképpen:

3.22. Definíció. Legyenek $\theta_1, \theta_2 : U \times U \rightarrow [0, 1]$ fuzzy hasonlósági relációk. Legyen $\sigma = \inf\{\theta_1, \theta_2\}$, továbbá legyenek $(\underline{f}, \bar{f}) \in \mathcal{RF}(U, \theta_1)$ és $(\underline{g}, \bar{g}) \in \mathcal{RF}(U, \theta_2)$ fuzzy durva halmazok. Ekkor $(\underline{f}, \bar{f})$ és $(\underline{g}, \bar{g})$ szorzata egy olyan $(\underline{h}, \bar{h})$ fuzzy durva halmaz az (U, σ) approximációs térben, amire

$$\begin{aligned}\underline{h}(x) &= \bigwedge \{ \max(1 - \sigma(x, y), \underline{f}(y), \underline{g}(y)) \mid y \in U \}, \\ \bar{h}(x) &= \bigvee \{ \min(\sigma(x, y), \bar{f}(y), \bar{g}(y)) \mid y \in U \}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Az approximációs térhez valamilyen távolságfüggő fuzzy tagsági függvénnyel megadott ekvivalenciarelációt célszerű választani, például q és r pixelekre:

$$\theta(q, r) = \max(0, 1 - w \cdot d(q, r)).\tag{3.6}$$

A kódtábla felépítése és a kódolás során a 2×2 -es tolóablak helyett (ami egy éles ekvivalenciarelációnak felel meg) a távolságfüggő θ fuzzy relációt használjuk. A dekódolás során pedig a kép minden pixeléhez kapunk egy alsó és egy felső approximációs értéket. Ezek viszont még nem az adott pixelhez tartozó approximációk, ugyanis a szorzás műveletét végre kell még hajtani. Ezután kapjuk csak meg a helyreállított kép pixeleinek alsó és felső approximációit, amiből átlagolással számíthatjuk ki a visszaállított pixel színét.

Mindkét módszert implementáltam, és a 2.6, képlet alapján számított PSNR értékeket összehasonlítottam. Blokkméretnek 4×4 -et választottam mindkét esetben, az általam javasolt módszernél pedig ezenfelül a hagyományos euklideszi távolságot használtam, θ -nak pedig a 3.6 képletben található függvényt alkalmaztam $w = 0.75$ értékkel. A tesztek során az adathalmazból véletlenszerűen kiválasztottam öt különböző képet: ebből négyet a kódtábla felépítéséhez használtam, egyet pedig az így kapott modell segítségével tömörítettem, és visszaállítottam. Ezt megismételtem 20-szor. Tömörítéshez Petrosino és Ferone eredeti módszerét, valamint az általam javasolt, továbbfejlesztett módszert használtam.

A kapott PSNR értékeket a 3.1. táblázat mutatja. Ebből leolvasható, hogy az esetek túlnyomó többségében az új algoritmus jobb PSNR értéket produkál, tehát a visszaállított kép jobban hasonlít az eredetihez az új eljárást használva. Mindössze egyetlen olyan teszt volt (a táblázatban a 13-as futtatási sorszámmal rendelkezik), ahol Petrosino és Ferone eredeti módszere jobb PSNR-t adott – azonban ekkor is csak kicsivel jobbat.

Futtatás sorszáma	PSNR (régí módszer)	PSNR (új módszer)
1	28.2225	29.9399
2	25.2634	29.2819
3	24.7308	27.1482
4	23.8007	27.4343
5	21.9129	26.3070
6	24.8420	28.6957
7	20.5667	24.1792
8	26.8563	31.5673
9	30.9175	34.9920
10	27.7519	30.6260

Futtatás sorszáma	PSNR (régí módszer)	PSNR (új módszer)
11	24.9529	28.8005
12	19.3297	21.8729
13	31.4335	31.3789
14	20.3734	25.8441
15	28.4270	29.8161
16	25.1752	27.4108
17	22.2726	25.7903
18	20.5832	24.4854
19	25.2152	28.1125
20	25.5951	27.8098

Összesített PSNR-érték a javasolt új módszerrel:	27.1310
Összesített PSNR-érték a régi módszerrel:	23.7300

3.1. táblázat. A tesztek során kapott PSNR értékek összehasonlítása.

3.5.3. Újdonság és hasznosíthatóság

Mivel a korábbi képtömörítési eljárás a durva fuzzy halmazokon alapult, így a továbbfejlesztett algoritmus, ami fuzzy durva halmazokat és egy általánosított szorzás műveletet használ, új eredményt szolgáltat. Az elvégzett kísérletek során tapasztalt javulás további vizsgálatok elvégzésére ad motivációt: ugyanis fennáll a lehetősége annak, hogy jobb paraméterezéssel, esetleg más távolságfüggvénnyel vagy fuzzy relációval a javulás fokozható.

3.5.4. V. TÉZIS

Kialakítottam egy fuzzy durva halmazokon alapuló képtömörítési eljárást egy durva fuzzy halmazokon alapuló korábbi módszer továbbfejlesztésével. Az általam javasolt procedúra már az általánosabb fuzzy durva halmazokat veszi alapul, amihez általánosítottam a durva fuzzy halmazokon végzett szorzás műveletét is. A régi és az új eljárást is implementáltam, valamint összevetettem a keletkező tömörített képek minőségét több tesztfuttatás során. Az eredmények alapján az általam javasolt módszer konzisztens módon olyan tömörített képet eredményezett, amelynek PSNR értéke általában jobb.

Tézishez tartozó publikációim: [S2, S3]

4. ÖSSZEFOGLALÁS

4.1. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS KUTATÁS IRÁNYOK

A kutatásaim során a durva halmazok modelljének általánosabb változatait vizsgáltam főként hálóelméleti szempontból. Az egyik általánosított modellt a multigranuláris durva halmaz koncepciójából kapjuk, amikor az approximációk meghatározásához nem egyetlen ekvivalenciareláció tartozik, hanem több is. Ebből kiindulva kétféle megközelítést is elemeztem hálóelméleti szempontból: az optimista és a pesszimista változatot. A koherens relációk fogalmát általánosítottam n relációra kétféleképpen, majd a kapott feltételek segítségével beazonosítottam, hogy az optimista és a pesszimista multigranuláris durva halmazok, mikor alkotnak teljes hálót vagy akár teljesen disztributív hálót. Mivel általános esetben a multigranuláris durva halmazok csak részbenrendezett halmazok, nem feltétlenül hálók, így vizsgáltam az optimista multigranuláris durva halmazok által alkotott rendezési struktúra Dedekind–MacNeille-kiterjesztését is. Ismertettem továbbá néhány alkalmazást is az információs rendszerek és az ajánlórendszerek területéről.

A durva halmazok modelljének és a fuzzy halmazok modelljének vegyítésére többféle megközelítés létezik attól függően, hogy a referenciahalmazt vagy az approximációs teret (az alaprelációt) fuzzyként kezeljük. Először azt az esetet elemeztem, amikor a referenciahalmaz éles, az approximációs tér viszont fuzzy. Megvizsgáltam, hogy a fuzzy alsó és felső approximációk magja vagy tartója hogyan viszonyul a fuzzy alapreláció magja vagy tartója által származtatott (hagyományos) alsó és felső approximációkhoz. Megmutattam továbbá, hogy az éles referenciahalmazzal rendelkező fuzzy durva halmazok hálójá izomorf a fuzzy reláció magja által származtatott durva halmazok hálójával. Továbbá megmutattam, hogy ilyen típusú fuzzy durva halmazok esetén az egzakt fuzzy halmazok megegyeznek a származtató fuzzy reláció tartójának egzakt halmazával, pontosabban az előbbi tagsági függvénye egyezik meg az utóbbi karakterisztikus függvényével.

A durva fuzzy halmazok esetén az approximációs tér éles, a referenciahalmaz pedig fuzzy. Ennél egy általánosabb esetet vizsgáltam, ugyanis nemcsak a $[0, 1]$ halmazon vizsgáltam a keletkező algebrai struktúrát, hanem általánosabban egy L hálón. Megmutattam, hogy az $E \subseteq U \times U$ ekvivalenciareláció által indukált durva L -fuzzy halmazok esetén az L háló tulajdonságai átöröklődnek az ezekből képzett $\mathcal{RF}(U, L)$ hálóra: ha L egy pseudokomplementumos, (L_n) osztályba tartozó háló, akkor $\mathcal{RF}(U, L)$ is pseudokomplementumos, és ugyanabba az osztályba tartozik; ha L Heyting-algebra, akkor $\mathcal{RF}(U, L)$ is Heyting-algebra; ha L egy De Morgan-algebra struktúráját veszi fel, akkor $\mathcal{RF}(U, L)$ -en is indukálható De Morgan-algebra, és fordítva. Ezek a tulajdonságok lényegében annak következményei, hogy $\mathcal{RF}(U, L)$ izomorf a $L^{[2]}$ és L hálók egy speciális szubdirekt szorzatával. Vizsgáltam ezenfelül, hogy a durva L -fuzzy halmazok hálóján mikor definiálható háromértékű Łukasiewicz-algebra, kapcsolatot teremtettem a durva L -fuzzy halmazok és

a durva relációk között, és külön kidolgoztam, hogy $L = [0, 1]$ esetén milyen tulajdonságokkal rendelkezik $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$. Megmutattam azt is, hogy a durva L -fuzzy halmazok hálójá a $\mathcal{IF}(U, L)$ intervallumértékű fuzzy halmazok hálójának egy teljes részhalóját alkotja. Továbbá megfogalmaztam egy reprezentációs tételt arra vonatkozóan, hogy egy (f, g) L -fuzzy halmazpár mikor felel meg egy fuzzy halmaz alsó és felső approximációjának.

Az általánosabb fuzzy durva halmaz modell esetén az approximációs tér is és a referenciahalmaz is fuzzy. Az alsó és felső approximációkhoz kapcsolódóan definiáltam két kvázirendezést. A belőlük származtatott ekvivalenciarelációk segítségével megadtam a fuzzy durva halmazok reprezentációs tételét, amely meghatározza, hogy egy fuzzy halmazpár milyen feltételek teljesülése esetén felel meg egy fuzzy durva halmaznak. A kvázirendezések és a belőlük származtatott ekvivalenciarelációk tulajdonságait szintén részletesen tárgyaltam. Ezenfelül olyan feltételeket is megfogalmaztam, amelyeknek a teljesülése magával vonja, hogy a fuzzy durva halmazok hálót alkotnak, továbbá vizsgáltam annak tulajdonságait.

Bemutattam ezeken felül egy képtömörítési alkalmazást is, ami egy 2009-ben publikált módszer [73] továbbfejlesztett változata. Az eredeti eljárás a durva fuzzy halmazok modelljén alapszik, amit tulajdonképpen jellemzőkinyerésre használ, majd a kapott jellemzővektorokon végrehajt egy kvantálást. A kép visszaállítása a durva fuzzy halmazokon értelmezett szorzás művelete segítségével történik. Az általam javasolt módszer az általánosabb fuzzy durva halmazmodellt veszi alapul, ahol már nemcsak maga a pixel tekinthető fuzzy halmaznak a fényerőssége (színértéke) által, hanem a pixelek közötti távolság is meghatároz egy fuzzy hasonlósági relációt. Az eljárás a pixelekhez meghatározott fuzzy alsó és felső approximációkat blokkonként egy-egy vektorba helyezi el, majd ezen a vektorhalmazon hajt végre egy redukciót (kvantálást). A dekódolás során pedig egy általánosabb, fuzzy durva halmazokon értelmezett szorzásműveletet használok. A tesztfuttatások azt mutatták, hogy az általam javasolt algoritmus esetén a tömörített kép minősége a PSNR érték alapján konzisztens módon jobbnak bizonyult. A jövőben szeretnék átfogóbb teszteket is végezni, ami vizsgálja, hogy milyen hatással van a képminőségre például a paraméterek változtatása, más távolságfüggvény, vagy másik fuzzy hasonlósági reláció használata.

A disszertációban tárgyalt témakörök számos kutatási irányvonalat felárnak. A jövőben szeretném jellemezni a rendezési struktúráit a multigranuláris durva halmazok és a fuzzy halmazok kombinált modelljeinek is. A fuzzy durva halmazmodell esetén szeretném megvizsgálni annak lehetőségeit, hogy mennyire lehet enyhíteni a jelenlegi eredményekhez felhasznált végességi feltételeken. Amennyiben a fuzzy durva halmazok hálót alkotnak, az nem feltétlenül disztributív. Így nyitott kérdés továbbá az is, hogy az általánosabb keretrendszerben a fuzzy durva halmazok milyen feltételek mellett disztributívak. A multigranuláris témakörnél tárgyalt alkalmazási lehetőségeket szeretném jobban kidolgozni, valamint javaslatot tenni a fuzzy módszerekkel kombinált változatra. Továbbá szeretnék egyéb alkalmazási lehetősé-

geket is vizsgálni, többek között a döntéelméleti durva halmazok [111] és a játékelméleti durva halmazok [32] általánosabb (fuzzy és/vagy multigranuláris) modelljeivel kapcsolatban. A bemutatott képtömörítési eljárást pedig az idődimenzió bevonásával szeretném kiterjeszti videótömörítésre is.

5. SUMMARY

5.1. SUMMARY AND FUTURE RESEARCH DIRECTIONS

In my research, I studied more general variants of the rough set model primarily from a lattice-theoretic perspective. One of the generalized models arises from the concept of multigranular rough sets, where approximations are determined not by a single equivalence relation but by multiple ones. I analyzed two approaches from a lattice-theoretic viewpoint: the optimistic and the pessimistic variants. I generalized the notion of coherent relations to n relations in two different ways, and using the resulting conditions, I identified when the optimistic and pessimistic multigranular rough sets form a complete lattice, or even a completely distributive lattice. Furthermore, since multigranular rough sets, in general, are only partially ordered sets and not necessarily lattices, I also investigated the Dedekind–MacNeille completion of the order structure formed by the optimistic multigranular rough sets. I also presented several applications in the fields of information systems and recommender systems.

There exist several approaches to combining the rough set model with the fuzzy set model, depending on whether the reference set or the approximation space (the underlying relation) is treated as fuzzy. I first analyzed the case where the reference set is crisp but the approximation space is fuzzy. I examined how the core or support of fuzzy lower and upper approximations relate to the (traditional) lower and upper approximations derived from the core or support of the underlying fuzzy relation. I also showed that the lattice of fuzzy rough sets with a crisp reference set is isomorphic to the lattice of rough sets derived from the core of the fuzzy relation. Furthermore, I proved that in the case of such fuzzy rough sets, the exact fuzzy sets coincide with the exact sets of the support of the fuzzy relation, more precisely, the membership function of the former matches the characteristic function of the latter.

In the case of rough fuzzy sets, the approximation space is crisp while the reference set is fuzzy. I examined a more general case, since I considered the resulting algebraic structure not only on the $[0, 1]$ interval but on a lattice L . I showed that in the case of rough L -fuzzy sets induced by an equivalence relation $E \subseteq U \times U$, the properties of lattice L are inherited by $\mathcal{RF}(U, L)$: if L is a pseudocomplemented lattice belonging to class (L_n) , then $\mathcal{RF}(U, L)$ is also pseudocomplemented and belongs to the same class; if L is a Heyting algebra, then $\mathcal{RF}(U, L)$ is also a Heyting algebra; if L has the structure of a De Morgan algebra, then a De Morgan algebra can also be induced on $\mathcal{RF}(U, L)$, and vice versa. These properties essentially follow from the fact that $\mathcal{RF}(U, L)$ is isomorphic to a special subdirect product of the lattices $L^{[2]}$ and L . I also investigated under what conditions a three-valued Łukasiewicz algebra can be defined on the lattice of rough L -fuzzy sets, established connections between rough L -fuzzy sets and rough relations, and elaborated

on the specific properties of $\mathcal{RF}(U, [0, 1])$. I also showed that the lattice of rough L -fuzzy sets forms a complete sublattice of $\mathcal{IF}(U, L)$, i.e. the lattice of interval-valued fuzzy sets. Additionally, I formulated a representation theorem that characterizes when a pair of L -fuzzy sets (f, g) corresponds to the lower and upper approximations of a fuzzy set.

In a more general fuzzy rough set model, both the approximation space and the reference set are fuzzy. Based on the lower and upper approximations, I defined two quasi-orders. Using the equivalence relations derived from them, I provided a representation theorem for fuzzy rough sets that characterizes the conditions under which a pair of fuzzy sets corresponds to a fuzzy rough set. I also discussed the properties of the quasi-orders and the derived equivalence relations in detail. Moreover, I formulated conditions whose satisfaction implies that the fuzzy rough sets form a lattice, and I studied its properties.

In addition, I presented an image compression application, which is an improved version of a method published in 2009 [73]. The original procedure is based on the model of rough fuzzy sets, which is essentially used for feature extraction, then quantization is applied to the obtained feature vectors. The image reconstruction is carried out using the product defined on rough fuzzy sets. The method I proposed is based on the more general fuzzy rough set model, in which not only the pixel itself is considered a fuzzy set (by its brightness or color value), but the distance between pixels also defines a fuzzy similarity relation. The procedure places the fuzzy lower and upper approximations determined for each pixel into a vector for each block, then performs a reduction (quantization) on this set of vectors. During decoding, I use a more general product defined on fuzzy rough sets. The test runs demonstrate that the quality of the compressed image is consistently better using my proposed method in terms of PSNR value. In the future I would like to perform more extensive testing, where I examine the effect of changing the parameters, the distance function or the fuzzy similarity relation.

The topics discussed in the dissertation reveal several directions for further research. In the future, I would like to characterize the order structures of combined models of multigranular rough sets and fuzzy sets. Regarding the fuzzy rough set model, I intend to investigate the extent to which the finiteness assumptions used in the current results can be relaxed. If the fuzzy rough sets form a lattice, it is not necessarily distributive. Thus, it remains an open question under what conditions fuzzy rough sets are distributive. I also plan to further elaborate on the application possibilities discussed for multigranular rough sets and propose a variant combined with fuzzy methods. Additionally, I would like to explore other potential applications, including generalized (fuzzy and/or multigranular) models of decision-theoretic rough sets [111] and game-theoretic rough sets [32]. Finally, I aim to extend the presented image compression method to video compression by incorporating the time dimension.

5.2. THESES

I. THESIS

I investigated the order structures of optimistic and pessimistic multigranular rough sets. I determined under what conditions they form complete lattices and completely distributive lattices. I showed that the increasing representation of optimistic multigranular rough sets coincides with the Dedekind–MacNeille completion. I identified the conditions under which pessimistic and optimistic multigranular rough sets form a completely distributive regular double Stone lattice. (The classical Pawlakian rough sets also form such a lattice.)

My publications concerning this thesis: [S7, S6, S5]

II. THESIS

I showed that the lattice of fuzzy rough sets with crisp reference sets and defined over a fuzzy similarity relation with a dually well-ordered spectrum forms a complete lattice, which is isomorphic to the lattice of rough sets defined over the core of the fuzzy relation. I examined the relationship between the support and core of the lower and upper approximations of such fuzzy rough sets, and the approximations defined over the support and core of the fuzzy relation. I proved that the exact sets of the support of the fuzzy similarity relation—more precisely, their characteristic functions—coincide with the exact fuzzy rough sets (with a crisp reference set).

My publications concerning this thesis: [S8, S4]

III. THESIS

I stated and proved a representation theorem that characterizes when a pair of L -fuzzy sets corresponds to a rough L -fuzzy set over a given (crisp) approximation space. I established a connection between rough L -fuzzy sets and rough relations. I demonstrated which properties of lattice L are inherited by the lattice of rough L -fuzzy sets. I provided equivalent conditions for the lattice of rough L -fuzzy sets to form a three-valued Łukasiewicz algebra.

My publications concerning this thesis: [S10]

IV. THESIS

In the more general framework—namely, with a fuzzy approximation space and fuzzy reference sets—I stated and proved a representation theorem that specifies the conditions under which a fuzzy set pair corresponds to a fuzzy rough set, assuming a fuzzy similarity relation with a finite range. In the constructive proof I also provided the method to determine a fuzzy set whose lower and upper approximations match the given fuzzy set pair. Additionally, I determined the conditions under which fuzzy rough sets form a lattice, or even a complete lattice.

My publications concerning this thesis: [S9, S1]

V. THESIS

I developed an image compression procedure based on fuzzy rough sets as an improvement of a previously proposed method based on rough fuzzy sets. The procedure I propose is based on the more general fuzzy rough set model, for which I also generalized the product defined over rough fuzzy sets. I implemented both the old and the new method, and I compared the quality of the compressed image in multiple test runs. According to the results, my proposed method consistently outperforms the original method, generally resulting in a compressed image with better PSNR value.

My publications concerning this thesis: [S2, S3]

Irodalomjegyzék

- [1] Krassimir T. Atanassov. “Intuitionistic fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 20.1 (1986), 87–96. old. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3).
- [2] Raymond Balbes és Philip Dwinger. *Distributive Lattices*. University of Missouri Press, 1974.
- [3] Mohua Banerjee. “Rough Sets and 3-valued Lukasiewicz Logic”. *Fundamenta Informaticae* 31.3-4 (1997), 213–220. old. DOI: <https://doi.org/10.3233/FI-1997-313401>.
- [4] Mohua Banerjee és Mihir K. Chakraborty. “Rough Sets Through Algebraic Logic”. *Fundamenta Informaticae* 28.3-4 (1996), 211–221. old. DOI: <https://doi.org/10.3233/FI-1996-283401>.
- [5] Ismat Beg és Samina Ashraf. “Fuzzy equivalence relations”. *Kuwait Journal of Science & Engineering* 35.1A (2008), 33–51. old.
- [6] Garrett Birkhoff. *Lattice Theory*. 3. kiad. Colloquium Publications, Vol. 25. Providence, RI: American Mathematical Society, 1967.
- [7] W. J. Blok. “Varieties of interior algebras”. *PhD Thesis, University of Amsterdam* (1976).
- [8] D. Boixader, J. Jacas és J. Recasens. “Upper and lower approximations of fuzzy sets”. *International Journal of General Systems* 29.4 (2000), 555–568. old. DOI: <https://doi.org/10.1080/03081070008960961>.
- [9] Stanley Burris és H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*. Springer-Verlag, 1981. ISBN: 978-0-9880552-0-9.
- [10] L Farinas del Cerro és Henri Prade. “Rough sets, twofold fuzzy sets and modal logic—Fuzziness in indiscernibility and partial information”. *The Mathematics of Fuzzy Systems* 88 (1986), 103–120. old.
- [11] Roberto Cignoli. “The class of Kleene algebras satisfying an interpolation property and Nelson algebras”. *Algebra Universalis* 23.3 (1986), 262–292. old.
- [12] Davide Ciucci és Didier Dubois. “Three-Valued Logics, Uncertainty Management and Rough Sets”. *Transactions on Rough Sets XVII*. Szerk. James F. Peters és Andrzej Skowron. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014, 1–32. old. ISBN: 978-3-642-54756-0. DOI: [10.1007/978-3-642-54756-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-54756-0_1).

- [13] Doğan Çoker. “Fuzzy rough sets are intuitionistic L-fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 96.3 (1998), 381–383. old. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(97\)00249-2](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00249-2).
- [14] Stephen D. Comer. “On connections between information systems, rough sets and algebraic logic”. *Banach Center Publications* 28.1 (1993), 117–124. old. DOI: <https://doi.org/10.4064/-28-1-117-124>.
- [15] Chris Cornelis, Martine De Cock és Anna Radzikowska. “Fuzzy Rough Sets: From Theory into Practice”. 2008. júl. 24. fej., 533–552. old. ISBN: 9780470724163. DOI: <https://doi.org/10.1002/9780470724163.ch24>.
- [16] Gábor Czédli. *Hálóelmélet*. Szeged: JATEPress, 1999. ISBN: 963-482-348-3.
- [17] Lynn D’eer és tsai. “A comprehensive study of implicator–conjunctor-based and noise-tolerant fuzzy rough sets: Definitions, properties and robustness analysis”. *Fuzzy Sets and Systems* 275 (2015), 1–38. old. ISSN: 0165-0114. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2014.11.018>.
- [18] Jianhua Dai és Qing Xu. “Attribute selection based on information gain ratio in fuzzy rough set theory with application to tumor classification”. *Applied Soft Computing* 13.1 (2013), 211–221. old. ISSN: 1568-4946. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2012.07.029>.
- [19] B. A. Davey és H. A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. 2. kiad. Cambridge University Press, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511809088>.
- [20] B. A. Davey és H. A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. 2. kiad. Cambridge University Press, 2002.
- [21] Martine De Cock, Chris Cornelis és Etienne E. Kerre. “Fuzzy Rough Sets: The Forgotten Step”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 15.1 (2007), 121–130. old. DOI: <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2006.889762>.
- [22] Didier Dubois és Henri Prade. “Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets”. *International Journal of General Systems* 17.2-3 (1990), 191–209. old. DOI: <https://doi.org/10.1080/03081079008935107>.
- [23] I. Düntsch. “A logic for rough sets”. *Theoretical Computer Science* 179 (1997), 427–436. old. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0304-3975\(96\)00334-9](https://doi.org/10.1016/S0304-3975(96)00334-9).

- [24] Alessio Ferone. “Exploiting Higher Order Uncertainty in Image Analysis”. PhD thesis. Milan, Italy: University of Milan, Doctoral School in Computer Science, 2011.
- [25] János Fodor. “Left-continuous t-norms in Fuzzy Logic: an Overview”. *Acta Polytechnica Hungarica* 1.2 (2004), 35–47. old.
- [26] M. Gehrke és E. Walker. “On the structure of rough sets”. *Bulletin of Polish Academy of Sciences, Mathematics* 40.3 (1992), 235–245. old.
- [27] J. A. Goguen. “L-fuzzy sets”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 18.1 (1967), 145–174. old. ISSN: 0022-247X. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(67\)90189-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90189-8).
- [28] Rafael Gonzalez és Richard Woods. *Digital Image Processing Global Edition*. Pearson Deutschland, 2017, 1024. old. ISBN: 9781292223049.
- [29] Siegfried Gottwald és Sándor Jenei. “A new axiomatization for involutive monoidal t-norm-based logic”. *Fuzzy Sets and Systems* 124.3 (2001). Fuzzy Logic, 303–307. old. ISSN: 0165-0114. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(01\)00100-2](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(01)00100-2).
- [30] Salvatore Greco, Benedetto Matarazzo és Roman Słowiński. “Fuzzy Similarity Relation as a Basis for Rough Approximations”. *Rough Sets and Current Trends in Computing*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998, 283–289. old.
- [31] D. Gupta, V. K és C. K. Singh. “Using Natural Language Processing techniques and fuzzy-semantic similarity for automatic external plagiarism detection”. *2014 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*. 2014, 2694–2699. old.
- [32] Joseph P. Herbert és JingTao Yao. “Game-Theoretic Rough Sets”. *Fundamenta Informaticae* 108.3-4 (2011), 267–286. old. DOI: <https://doi.org/10.3233/FI-2011-423>.
- [33] Qinghua Hu és tsai. “Kernelized Fuzzy Rough Sets and Their Applications”. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* 23.11 (2011), 1649–1667. old. DOI: <https://doi.org/10.1109/TKDE.2010.260>.
- [34] M Inuiguchi. “Classification- versus approximation-oriented fuzzy rough sets”. *Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, IPMU*. Szerk. B. Bouchon-Meunier, G. Coletti és R. R. Yager. 2004, CD-ROM.

- [35] Tadeusz B. Iwiński. “Algebraic approach to rough sets”. *Bulletin of Polish Academy of Sciences. Mathematics* 35 (1987), 673–683. old.
- [36] Jouni Järvinen. “Knowledge Representation and Rough Sets”. Dissz. University of Turku, Turku Center for Computer Science, 1999.
- [37] Jouni Järvinen, László Kovács és Sándor Radeleczki. “Rough Sets Defined by Multiple Relations”. *Rough Sets*. Szerk. Tamás Mihálydeák és tsai. Cham: Springer International Publishing, 2019, 40–51. old. ISBN: 978-3-030-22815-6. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-22815-6_4.
- [38] Jouni Järvinen, Piero Pagliani és Sándor Radeleczki. “Information completeness in Nelson algebras of rough sets induced by quasiorders”. *Studia logica* 101.5 (2013), 1073–1092. old. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11225-012-9421-z>.
- [39] Jouni Järvinen és Sándor Radeleczki. “Defining rough sets as core–support pairs of three-valued functions”. *International Journal of Approximate Reasoning* 135 (2021), 71–90. old. ISSN: 0888-613X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2021.05.002>.
- [40] Jouni Järvinen és Sándor Radeleczki. “Rough sets determined by tolerances”. *International Journal of Approximate Reasoning* 55.6 (2014), 1419–1438. old. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2013.12.005>.
- [41] Jouni Järvinen és Sándor Radeleczki. “The Structure of Multigranular Rough Sets”. *Fundamenta Informaticae* 176.1 (2020. okt.), 17–41. old. DOI: <https://doi.org/10.3233/FI-2020-1961>.
- [42] Jouni Järvinen, Sándor Radeleczki és Laura Veres. “Rough Sets Determined by Quasiorders”. *Order* 26 (2009), 337–355. old. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11083-009-9130-z>.
- [43] Yangsheng Ji és tsai. “Apply a Rough Set-Based Classifier to Dependency Parsing”. *International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Lecture Notes in Computer Science* 5009 (2008), 97–105. old. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-79721-0_18.
- [44] S. Senthil Kumar és H. Hannah Inbarani. “Optimistic Multi-granulation Rough Set Based Classification for Medical Diagnosis”. *Procedia Computer Science* 47 (2015), 374–382. old. ISSN: 1877-0509. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.03.219>.

- [45] Ludmila Ilieva Kuncheva. “Fuzzy rough sets: Application to feature selection”. *Fuzzy Sets and Systems* 51.2 (1992), 147–153. old. ISSN: 0165-0114. DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(92\)90187-9](https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90187-9).
- [46] K. B. Lee. “Equational Classes of Distributive Pseudo-Complemented Lattices”. *Canadian Journal of Mathematics* 22.4 (1970), 881–891. old. DOI: <https://doi.org/10.4153/CJM-1970-101-4>.
- [47] Guoping Lin, Jiye Liang és Yuhua Qian. “An information fusion approach by combining multigranulation rough sets and evidence theory”. *Information Sciences* 314 (2015), 184–199. old. ISSN: 0020-0255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.03.051>.
- [48] Tsau Young Lin. “Granular Computing on Binary Relations I: Data Mining and Neighborhood Systems”. *Rough Sets In Knowledge Discovery*. Szerk. L. Polkowski és A. Skowron. Heidelberg: Physica-Verlag, 1998, 107–121. old.
- [49] Tsau Young Lin. “Granular Computing on Binary Relations II: Rough Set Representations and Belief Functions”. *Rough Sets In Knowledge Discovery*. Szerk. L. Polkowski és A. Skowron. Heidelberg: Physica-Verlag, 1998, 122–140. old.
- [50] Tsung-Yi Lin és tsai. “Microsoft COCO: Common Objects in Context”. *CoRR* abs/1405.0312 (2014). URL: <http://arxiv.org/abs/1405.0312>.
- [51] Y. Linde, A. Buzo és R. Gray. “An Algorithm for Vector Quantizer Design”. *IEEE Transactions on Communications* 28.1 (1980), 84–95. old. DOI: <https://doi.org/10.1109/TCOM.1980.1094577>.
- [52] Guilong Liu. “Axiomatic systems for rough sets and fuzzy rough sets”. *International Journal of Approximate Reasoning* 48.3 (2008), 857–867. old. ISSN: 0888-613X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2008.02.001>.
- [53] Guilong Liu. “Lattice Structures of Rough Fuzzy Sets”. *Proceedings of the 12th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009, 253–260. old. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-10646-0_31.

- [54] Zhen Ming Ma és Bao Qing Hu. “Topological and lattice structures of L-fuzzy rough sets determined by lower and upper sets”. *Information Sciences* 218 (2013), 194–204. old. ISSN: 0020-0255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2012.06.029>.
- [55] Ju-Sheng Mi és Wen-Xiu Zhang. “An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets”. *Information Sciences* 160.1 (2004), 235–249. old. ISSN: 0020-0255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2003.08.017>.
- [56] Peter Milne. “Algebras of Intervals and a Logic of Conditional Assertions”. *Journal of Philosophical Logic* 33.5 (2004), 497–548. old. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:LOGI.0000046072.61596.32>.
- [57] António Monteiro. “Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz tri-valentes”. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la République Populaire Roumaine* 7 (55).1/2 (1963), 3–12. old.
- [58] António Monteiro. “Sur les algèbres de Heyting symétriques”. *Portugaliae mathematica* 39.1-4 (1980), 1–237. old. ISSN: 0032-5155.
- [59] Nehad Morsi és M. Yakout. “Axiomatics for fuzzy rough sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 100.1 (1998), 327–342. old. ISSN: 0165-0114. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(97\)00104-8](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00104-8).
- [60] V. Muralidharan és V. Sugumaran. “Rough set based rule learning and fuzzy classification of wavelet features for fault diagnosis of monoblock centrifugal pump”. *Measurement* 46.9 (2013), 3057–3063. old. ISSN: 0263-2241. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2013.06.002>.
- [61] Akira Nakamura. “Fuzzy rough sets”. *Note on Multiple-Valued Logic in Japan* 9.8 (1988), 1–8. old.
- [62] S. Nanda és S. Majumdar. “Fuzzy rough sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 45.2 (1992), 157–160. old. DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(92\)90114-J](https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90114-J).
- [63] P. Pagliani. “Rough Set Theory and Logic-Algebraic Structures”. *Incomplete Information: Rough Set Analysis. Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Szerk. E. Orłowska. Heidelberg: Physica, 1998, 109–190. old. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1888-8_6.

- [64] S.K. Pal és P. Mitra. “Multispectral image segmentation using the rough-set-initialized EM algorithm”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 40.11 (2002), 2495–2501. old. DOI: [10.1109/TGRS.2002.803716](https://doi.org/10.1109/TGRS.2002.803716).
- [65] Zdzisław Pawlak. “On rough relations”. *Bulletin of Polish Academy of Sciences, Computer and Information Science* 34.9-10 (1985), 587–590. old.
- [66] Zdzisław Pawlak. “Rough sets”. *International Journal of Computer & Information Sciences* 11.5 (1982), 341–356. old. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01001956>.
- [67] Zdzisław Pawlak. “Rough sets and fuzzy sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 17.1 (1985), 99–102. old. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(85\)80029-4](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(85)80029-4).
- [68] Zdzisław Pawlak. “Rough sets, rough relations and rough functions”. *Fundamenta informaticae* 27.2, 3 (1996), 103–108. old.
- [69] Zdzisław Pawlak. *Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data*. 9. köt. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [70] Zdzisław Pawlak és Andrzej Skowron. “Rudiments of rough sets”. *Information Sciences* 177.1 (2007), 3–27. old. ISSN: 0020-0255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.06.003>.
- [71] Daowu Pei. “A generalized model of fuzzy rough sets”. *International Journal of General Systems* 34.5 (2005), 603–613. old. DOI: <https://doi.org/10.1080/03081070500096010>.
- [72] A. Petrosino és G. Salvi. “Rough fuzzy set based scale space transforms and their use in image analysis”. *International Journal of Approximate Reasoning* 41.2 (2006). Advances in Fuzzy Sets and Rough Sets, 212–228. old. ISSN: 0888-613X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2005.06.015>.
- [73] Alfredo Petrosino és Alessio Ferone. “Rough fuzzy set-based image compression”. *Fuzzy Sets and Systems* 160.10 (2009). Special Issue: Fuzzy Sets in Interdisciplinary Perception and Intelligence, 1485–1506. old. ISSN: 0165-0114. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2008.11.011>.
- [74] Evaggelia Pitoura, Kostas Stefanidis és Georgia Koutrika. “Fairness in rankings and recommendation systems”. *The VLDB Journal* 31 (2022), 431–458. old. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00778-021-00697-y>.

- [75] L. Polkowski, A. Skowron és J. Zytkow. “Tolerance Based Rough Sets”. *Soft Computing: Rough Sets, Fuzzy Logic, Neural Networks, Uncertainty Management*. Szerk. T.Y. Lin és A.M. Wildberger. Simulation Councils, Inc., San Diego, 1995, 55–58. old.
- [76] J. Pomykała és J. A. Pomykała. “The Stone algebra of rough sets”. *Bulletin of Polish Academy of Sciences. Mathematics* 36 (1988), 495–512. old.
- [77] Lakshmi Tharun Ponnamm és tsai. “Movie recommender system using item based collaborative filtering technique”. *2016 International Conference on Emerging Trends in Engineering, Technology and Science (ICETETS)*. 2016, 1–5. old. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICETETS.2016.7602983>.
- [78] Yuhua Qian és tsai. “MGRS: A multi-granulation rough set”. *Information Sciences* 180.6 (2010). Special Issue on Modelling Uncertainty, 949–970. old. ISSN: 0020-0255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.11.023>.
- [79] Yuhua Qian és tsai. “Multigranulation decision-theoretic rough sets”. *International Journal of Approximate Reasoning* 55.1, Part 2 (2014). Special issue on Decision-Theoretic Rough Sets, 225–237. old. ISSN: 0888-613X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2013.03.004>.
- [80] Yuhua Qian és tsai. “Pessimistic rough set based decisions: A multi-granulation fusion strategy”. *Information Sciences* 264 (2014). Serious Games, 196–210. old. ISSN: 0020-0255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.12.014>.
- [81] Sándor Radeleczki. “On certain classes of non-distributive (L_n)-lattices”. *Contributions to General Algebra* 14 (2003), 145–150. old.
- [82] Sándor Radeleczki és Jouni Järvinen. “Representation of Nelson algebras by rough sets determined by quasiorders”. *Algebra Universalis* 66 (2011), 163–179. old. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00012-011-0149-9>.
- [83] Sándor Radeleczki és Jouni Järvinen. “Representing regular pseudo-complemented Kleene algebras by tolerance-based rough sets”. *Journal of the Australian Mathematical Society* 105.1 (2018), 57–78. old. DOI: <https://doi.org/10.1017/S1446788717000283>.

- [84] Anna Maria Radzikowska és Etienne E. Kerre. “A comparative study of fuzzy rough sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 126.2 (2002), 137–155. old. ISSN: 0165-0114. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(01\)00032-X](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(01)00032-X).
- [85] Anna Maria Radzikowska és Etienne E. Kerre. “Fuzzy Rough Sets Based on Residuated Lattices”. *Transactions on Rough Sets II*. Springer Berlin, 2005, 278–296. old.
- [86] Anna Maria Radzikowska és Etienne E. Kerre. “On L-Fuzzy Rough Sets”. *Artificial Intelligence and Soft Computing - ICAISC 2004*. Szerk. Leszek Rutkowski és tsai. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004, 526–531. old. ISBN: 978-3-540-24844-6. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-24844-6_78.
- [87] Jordi Recasens. *Indistinguishability Operators, Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations*. 260. köt. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-16222-0>.
- [88] Bernd Schröder. *Ordered sets: An introduction*. Birkhäuser, Boston, MA, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0053-6>.
- [89] Haresh Kumar Sharma, Kriti Kumari és Samarjit Kar. “A rough set approach for forecasting models”. *Decision Making: Applications in Management and Engineering* 3.1 (2020), 1–21. old. DOI: <https://doi.org/10.31181/dmame2003001s>.
- [90] Yan-Hong She és Guo-Jun Wang. “An axiomatic approach of fuzzy rough sets based on residuated lattices”. *Computers & Mathematics with Applications* 58.1 (2009), 189–201. old. ISSN: 0898-1221. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.03.100>.
- [91] Yanhong She és Xiaoli He. “On the structure of the multigranulation rough set model”. *Knowledge-Based Systems* 36 (2012. dec.), 81–92. old. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2012.05.019>.
- [92] Andrzej Skowron és Jaroslaw Stepaniuk. “Tolerance Approximation Spaces”. *Fundamenta Informaticae* 27.2,3 (1996), 245–253. old. ISSN: 0169-2968.
- [93] Roman W. Swiniarski és Andrzej Skowron. “Rough set methods in feature selection and recognition”. *Pattern Recognition Letters* 24.6 (2003), 833–849. old. ISSN: 0167-8655. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-8655\(02\)00196-4](https://doi.org/10.1016/S0167-8655(02)00196-4).

- [94] Huiyi Tan, Junfei Guo és Yong Li. “E-learning Recommendation System”. *2008 International Conference on Computer Science and Software Engineering*. 5. köt. 2008, 430–433. old. DOI: <https://doi.org/10.1109/CSSE.2008.305>.
- [95] Chen Ting, Luo Jingqing és Shen Bing. “Research on Rough Set-Neural Network and Its Application in Radar Signal Recognition”. *2007 8th International Conference on Electronic Measurement and Instruments*. 2007, 3–764–3–768. old. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICEMI.2007.4351029>.
- [96] B.K. Tripathy és Urmi Bhambhani. “Properties of Multigranular Rough Sets on Fuzzy Approximation Spaces and their Application to Rainfall Prediction”. *International Journal of Intelligent Systems and Applications* 10 (2018. nov.), 76–90. old. DOI: <https://doi.org/10.5815/ijisa.2018.11.08>.
- [97] B.K. Tripathy és M. Nagaraju. “On Some Topological Properties of Pessimistic Multigranular Rough Sets”. *International Journal of Intelligent Systems and Applications* 4.8 (2012), 10–17. old. DOI: <https://doi.org/10.5815/ijisa.2012.08.02>.
- [98] B.K. Tripathy és R. Raghavan. “On Some Topological Properties of Multigranular Rough Sets”. *Journal of Advances in Applied Science Research* 2 (2011. jan.), 536–543. old.
- [99] L. Valverde. “On the structure of F-indistinguishability operators”. *Fuzzy Sets and Systems* 17.3 (1985), 313–328. old. DOI: [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(85\)90096-X](https://doi.org/10.1016/0165-0114(85)90096-X).
- [100] Changzhong Wang és tsai. “Fuzzy rough set-based attribute reduction using distance measures”. *Knowledge-Based Systems* 164.15 (2019), 205–212. old. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2018.10.038>.
- [101] Chun Yong Wang. “Topological structures of L-fuzzy rough sets and similarity sets of L-fuzzy relations”. *International Journal of Approximate Reasoning* 83 (2017), 160–175. old. ISSN: 0888-613X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2017.01.002>.
- [102] Chun Yong Wang és Bao Qing Hu. “Fuzzy rough sets based on generalized residuated lattices”. *Information Sciences* 248 (2013), 31–49. old. ISSN: 0020-0255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.03.051>.

- [103] Wei-Zhi Wu, Yee Leung és Ju-Sheng Mi. “On characterizations of (I,T)-fuzzy rough approximation operators”. *Fuzzy Sets and Systems* 154.1 (2005), 76–102. old. ISSN: 0165-0114. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.02.011>.
- [104] Wei-Zhi Wu, Ju-Sheng Mi és Wen-Xiu Zhang. “Generalized fuzzy rough sets”. *Information Sciences* 151 (2003), 263–282. old. ISSN: 0020-0255. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-0255\(02\)00379-1](https://doi.org/10.1016/S0020-0255(02)00379-1).
- [105] Weihua Xu, Qiaorong Wang és Xiantao Zhang. “Multi-granulation rough sets based on tolerance relations”. *Soft Computing* 17.7 (2013), 1241–1252. old. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-012-0979-1>.
- [106] Hai-Long Yang és tsai. “Bipolar fuzzy rough set model on two different universes and its application”. *Knowledge-Based Systems* 35 (2012), 94–101. old. ISSN: 0950-7051. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2012.01.001>.
- [107] Wei Yao, Yanhong She és Ling-Xia Lu. “Metric-based L-fuzzy rough sets: Approximation operators and definable sets”. *Knowledge-Based Systems* 163 (2019), 91–102. old. ISSN: 0950-7051. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2018.08.023>.
- [108] Y. Y. Yao. “Combination of Rough and Fuzzy Sets Based on α -Level Sets”. *Rough Sets and Data Mining: Analysis of Imprecise Data*. Boston, MA: Springer US, 1997. 15. fejr., 301–321. old. ISBN: 978-1-4613-1461-5. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-1461-5_15.
- [109] Y. Y. Yao. “Generalized rough set models”. *Rough sets in knowledge discovery* 1 (1998), 286–318. old.
- [110] Y. Y. Yao és T. Wang. “On Rough Relations: An Alternative Formulation”. *New Directions in Rough Sets, Data Mining, and Granular-Soft Computing. RSFDGrC 1999. Lecture Notes in Computer Science*. 1711. köt. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999, 82–90. old. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-48061-7_12.
- [111] Yiyu Yao. “Decision-Theoretic Rough Set Models”. *Rough Sets and Knowledge Technology*. Szerk. JingTao Yao és tsai. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, 1–12. old. ISBN: 978-3-540-72458-2. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-72458-2_1.
- [112] L. A. Zadeh. “Fuzzy sets”. *Information and Control* 8.3 (1965), 338–353. old. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).

- [113] L.A. Zadeh. “Similarity relations and fuzzy orderings”. *Information Sciences* 3.2 (1971), 177–200. old. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-0255\(71\)80005-1](https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80005-1).
- [114] Qinghua Zhang, Qin Xie és Guoyin Wang. “A survey on rough set theory and its applications”. *CAAI Transactions on Intelligence Technology* 1.4 (2016), 323–333. old. ISSN: 2468-2322. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trit.2016.11.001>.
- [115] Jian Zhou és tsai. “Speech Emotion Recognition Based on Rough Set and SVM”. *2006 5th IEEE International Conference on Cognitive Informatics*. 1. köt. 2006, 53–61. old. DOI: <https://doi.org/10.1109/COGINF.2006.365676>.
- [116] Paweł Żwan és tsai. “Automatic Singing Voice Recognition Employing Neural Networks and Rough Sets”. *Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms*. Szerk. Marzena Kryszkiewicz és tsai. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007, 793–802. old. ISBN: 978-3-540-73451-2.

Saját publikációim

- [S1] Dávid Gégény. “A fuzzy durva halmaz modell vizsgálata hálóelméleti eszközökkel”. *XXVI. Tavaszi Szél Konferencia 2023: Tanulmánykötet I.* 2023, 352–363. old.
- [S2] Dávid Gégény. *An image compression method based on fuzzy rough sets (manuscript)*. 2025.
- [S3] Dávid Gégény. “Durva halmazok a képfeldolgozásban”. *Doktoranduszok fóruma: Miskolc, 2018. november 22, 28. : Gépészmérnöki- és Informatikai Kar szekciókiadványa*. 2019, 26–33. old.
- [S4] Dávid Gégény. “Fuzzy durva halmazok hálójának jellemzése”. *Doktoranduszok fóruma: Miskolc, 2020. november 19-20. : Gépészmérnöki- és Informatikai Kar szekciókiadványa*. 2022, 47–52. old.
- [S5] Dávid Gégény. “Multigranuláris durva halmazok hálóstruktúrájának jellemzése”. *Tavaszi Szél 2022 / Spring Wind 2022 Tanulmánykötet II.* 2022, 274–284. old.
- [S6] Dávid Gégény. “Multigranuláris durva halmazok optimista approximációk esetén”. *Doktoranduszok fóruma: Miskolc, 2021. november 18., 26. : Gépészmérnöki- és Informatikai Kar szekciókiadványa*. 2022, 42–47. old.

- [S7] Dávid Gégény, László Kovács és Sándor Radeleczki. “Lattices defined by multigranular rough sets”. *International Journal of Approximate Reasoning* 151 (2022), 413–429. old. ISSN: 0888-613X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2022.10.007>.
- [S8] Dávid Gégény, László Kovács és Sándor Radeleczki. “Notes on the lattice of fuzzy rough sets with crisp reference sets”. *International Journal of Approximate Reasoning* 126 (2020), 124–132. old. ISSN: 0888-613X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2020.08.007>.
- [S9] Dávid Gégény és Sándor Radeleczki. “On the lattice of fuzzy rough sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 488 (2024), 108999. old. ISSN: 0165-0114. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2024.108999>.
- [S10] Dávid Gégény és Sándor Radeleczki. “Rough L-fuzzy sets: Their representation and related structures”. *International Journal of Approximate Reasoning* 142 (2022), 1–12. old. ISSN: 0888-613X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijar.2021.11.002>.