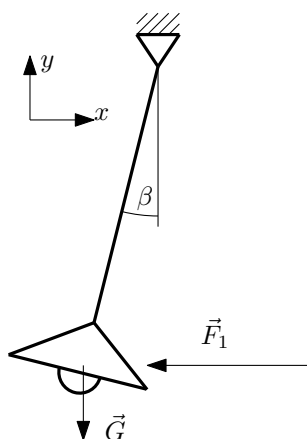


# Műszaki mechanika gyakorlati példák

## 1. hét: Közös ponton támadó erőrendszer síkban, kötélerők számítása

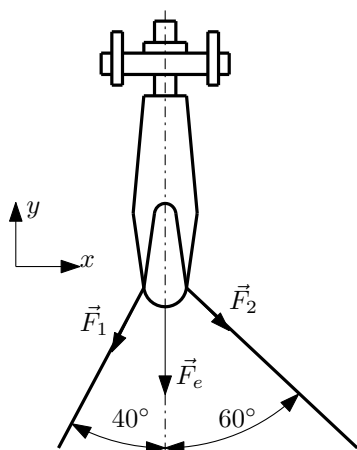
1.1 Az ábrán látható  $G = 220$  N súlyerejű lámpát fújja a szél. Ennek hatására a kótél a függőlegetől  $\beta = 20^\circ$ -ban tér ki. Mekkora a lámpa  $\vec{F}_1$  légellenállása és a kótélben ébredő erő?



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_1 = (-80,07\vec{e}_x) \text{ N}; \quad \vec{F}_k = (80,07\vec{e}_x + 220\vec{e}_y) \text{ N}.$$

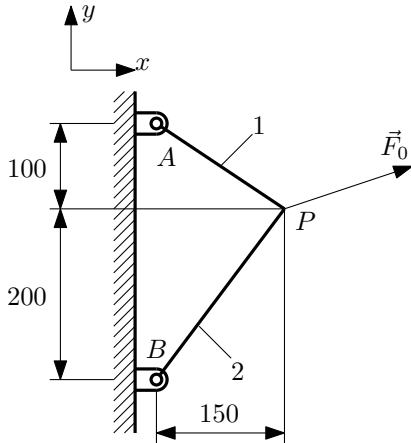
1.2 Egy daru teherhorgára  $F_1$  és  $F_2$  erő eredőjeként függőlegesen  $F_e = 30$  kN erő hat. Mekkora erők lépnek fel a kötelekben?



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_1 = (-16,96\vec{e}_x - 20,21\vec{e}_y) \text{ kN}; \quad \vec{F}_2 = (16,96\vec{e}_x - 9,79\vec{e}_y) \text{ kN}.$$

1.3 Az ábrán egy  $\vec{F}_0 = (900\vec{e}_x + 300\vec{e}_y)$  N erővel megfeszített húr látható. Határozza meg a húr száraiban ébredő  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  erőket!

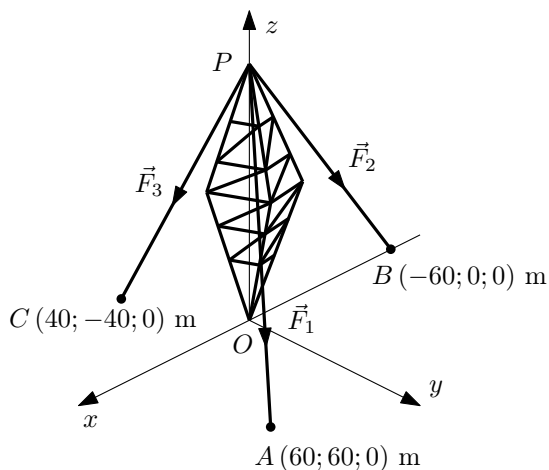


Végeredmények:

$$\vec{F}_1 = (-450\vec{e}_x + 300\vec{e}_y) \text{ N}; \quad \vec{F}_2 = (-450\vec{e}_x - 600\vec{e}_y) \text{ N}.$$

## 2. hét: Közös ponton támadó erőrendszer térben, támasztóerők, kötélerek számítása

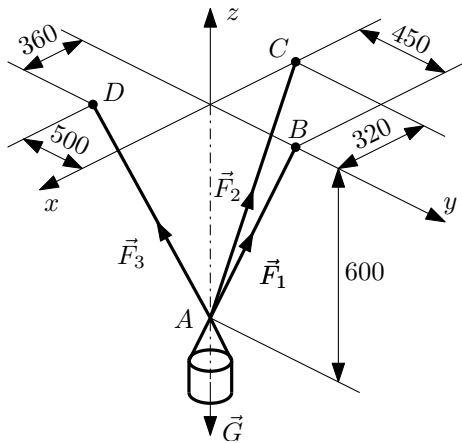
2.1 Egy 80 m magas antennatorony 3 drótkötéllal van kikötve. A  $PB$  kötélágban mérjük az erőt, amely  $F_2 = 2$  kN. Határozza meg az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_3$  erőket, ha tudjuk, hogy  $\vec{F}_1$ ;  $\vec{F}_2$ ;  $\vec{F}_3$  eredője függőleges! Mekkora az  $O$ -ban ébredő támasztóerő, ha a torony súlya  $G = 25$  kN?



Végeredmények:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= (0,6\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_y - 0,8\vec{e}_z) \text{ kN}; & \vec{F}_2 &= (-1,2\vec{e}_x - 1,6\vec{e}_z) \text{ kN}; \\ \vec{F}_3 &= (0,6\vec{e}_x - 0,6\vec{e}_y - 1,2\vec{e}_z) \text{ kN}; & \vec{F}_O &= (28,6\vec{e}_z) \text{ kN}. \end{aligned}$$

**2.2** A három drótkötéllal az ábrán látható módon felfüggesztett üst súly  $G = 4$  kN. Határozza meg az egyes kötelekben ébredő erőket!

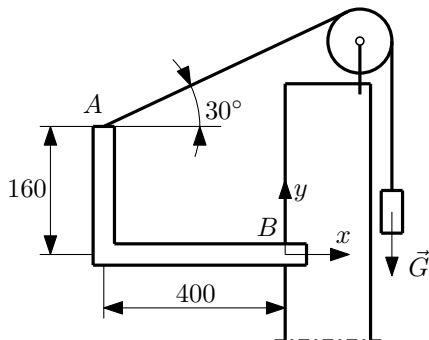


**Végeredmények:**

$$\vec{F}_1 = (1,03\vec{e}_y + 1,37\vec{e}_z) \text{ kN}; \quad \vec{F}_2 = (-0,74\vec{e}_x + 1,39\vec{e}_z) \text{ kN};$$

$$\vec{F}_3 = (0,74\vec{e}_x - 1,03\vec{e}_y + 1,24\vec{e}_z) \text{ kN}.$$

**2.3** A csigán átvett kötélt  $G = 800$  N terhet tart. Mekkora a konzol  $A$  pontjában a konzolt terhelő erő nyomatéka a  $B$  pontra?

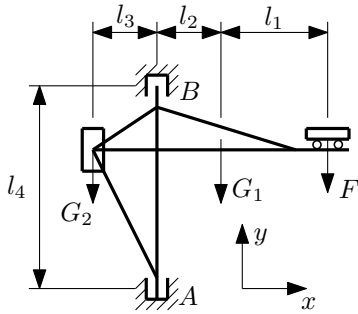


**Végeredmény:**

$$\vec{M}_B = (-270,85\vec{e}_z) \text{ Nm}.$$

**2.4** Adott az ábrán látható daruszerkezet a ráható terhelésekkel és megtámasztásokkal együtt. Adatok:  $l_1 = 3,6$  m;  $l_2 = 0,9$  m;  $l_3 = 1,2$  m;  $l_4 = 5,4$  m;  $G_1 = 9$  kN;  $G_2 = 16$  kN;  $F = 10$  kN. Határozza meg a támaszokban ébredő

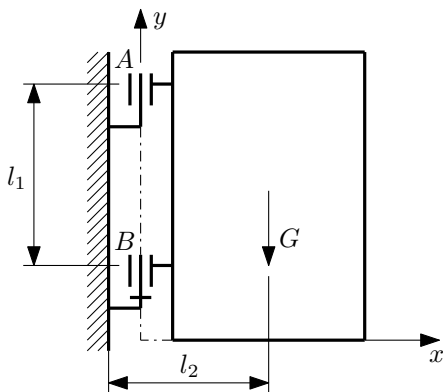
- $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_B$  reakcióerőket, ha minden terhelés hat a szerkezetre;
- $\vec{F}_A^*$  és  $\vec{F}_B^*$  reakcióerőket, ha csak a  $G_1$  és  $G_2$  erő hat ( $F = 0$ );
- $\vec{F}_A^{**}$  és  $\vec{F}_B^{**}$  reakcióerőket, ha csak a  $G_1$  és  $F$  erő hat ( $G_2 = 0$ )!



**Végeredmények:**

- $\vec{F}_A = (6,278\vec{e}_x + 35\vec{e}_y)$  kN;  $\vec{F}_B = (-6,278\vec{e}_x)$  kN.
- $\vec{F}_A^* = (-2,06\vec{e}_x + 25\vec{e}_y)$  kN;  $\vec{F}_B^* = (2,06\vec{e}_x)$  kN.
- $\vec{F}_A^{**} = (9,83\vec{e}_x + 19\vec{e}_y)$  kN;  $\vec{F}_B^{**} = (-9,83\vec{e}_x)$  kN.

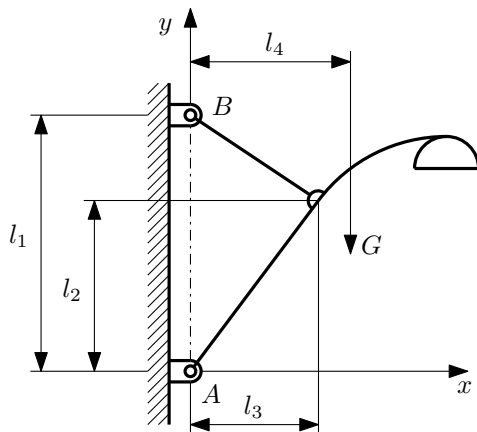
**2.5** Az ábrán látható ajtóra saját  $G$  súlyereje hat. Adatok:  $G = 800$  N;  $l_1 = 1$  m;  $l_2 = 0,6$  m. Határozza meg a támasztóerőket!



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (-480\vec{e}_x)$$
 N;  $\vec{F}_B = (480\vec{e}_x + 800\vec{e}_y)$  N.

**2.6** Adott az ábrán látható lámpa, és annak felfüggesztése, terhelése. Adatok:  $l_1 = 3$  m;  $l_2 = 2,7$  m;  $l_3 = 1$  m;  $l_4 = 1,2$  m;  $G = 600$  N. Határozza meg a támasztóerő-rendszert!

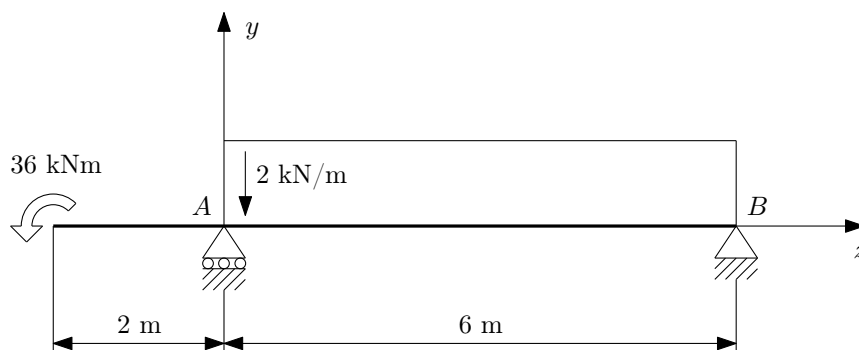


**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (240\vec{e}_x + 528\vec{e}_y) \text{ N}; \quad \vec{F}_B = (-240\vec{e}_x + 72\vec{e}_y) \text{ N}.$$

### 3. hét: Egyszerű szerkezetek statikája, támasztóerő-rendszer meghatározása

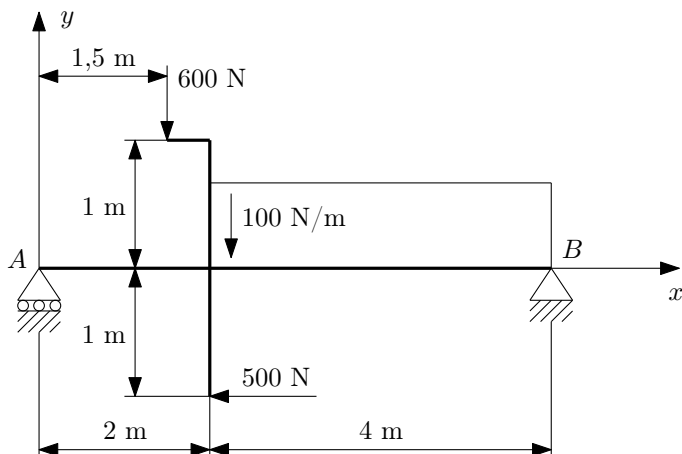
**3.1 (Mechanikai Példatár I. 5.6)** Határozza meg az ábrán vázolt, tartós nyugalomban lévő tartó  $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_B$  támasztóerőit számítással!



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (12\vec{e}_y) \text{ kN}; \quad \vec{F}_B = \vec{0}.$$

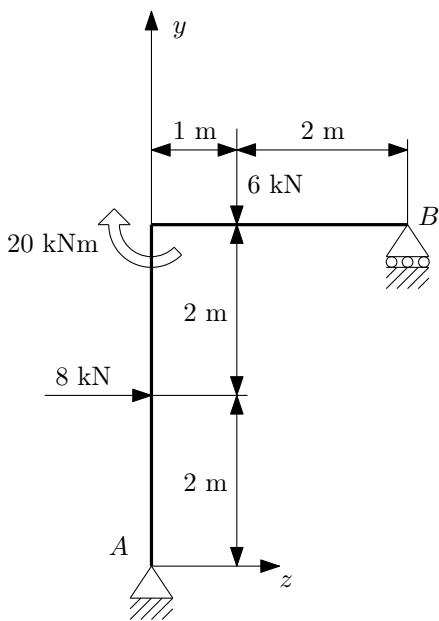
**3.2 (MP. I. 5.13)** Határozza meg az ábrán vázolt, tartós nyugalomban lévő tartó  $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_B$  támasztóerőit számítással!



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (500\vec{e}_y) \text{ N}; \quad \vec{F}_B = (500\vec{e}_x + 500\vec{e}_y) \text{ N}.$$

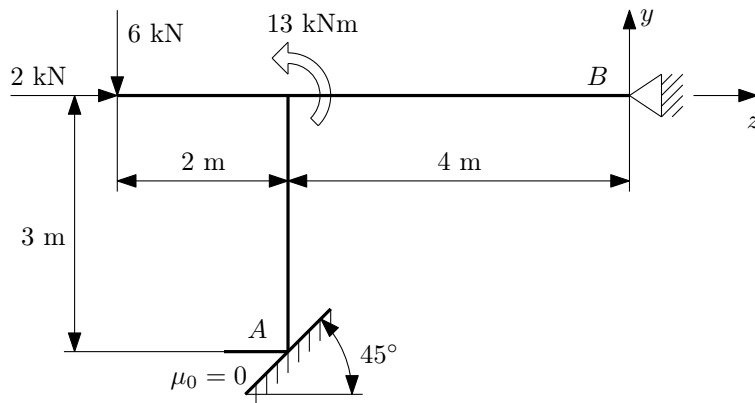
**3.3 (MP. I. 5.14)** Határozza meg az ábrán vázolt, tartós nyugalomban lévő tartó  $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_B$  támasztóerőit számítással!



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (-8\vec{e}_y - 8\vec{e}_z) \text{ kN}; \quad \vec{F}_B = (14\vec{e}_y) \text{ kN}.$$

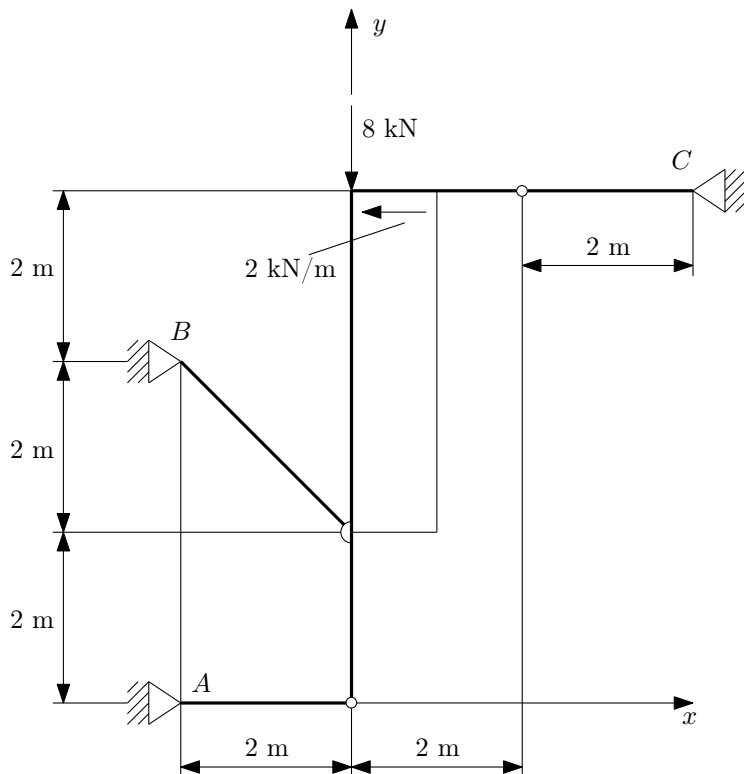
**3.4 (MP. I. 5.21)** Határozza meg az ábrán vázolt, tartós nyugalomban lévő tartó  $\vec{F}_A$  és  $\vec{F}_B$  támasztóerőit számítással!



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (7\vec{e}_y - 7\vec{e}_z) \text{ kN}; \quad \vec{F}_B = (-\vec{e}_y + 5\vec{e}_z) \text{ kN}.$$

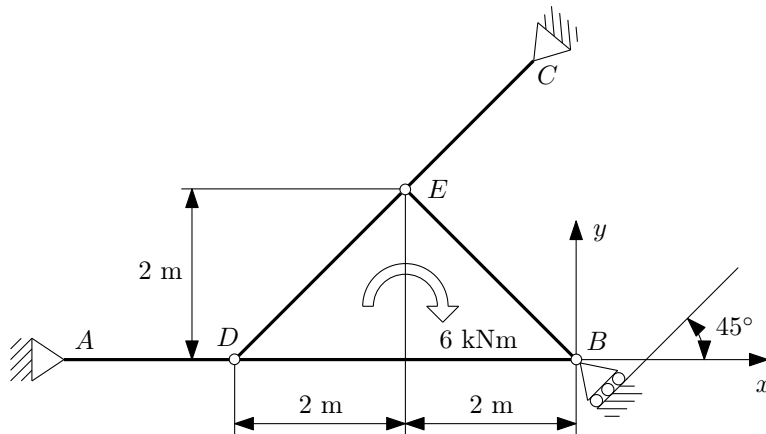
**3.5 (MP. I. 5.34)** Határozza meg számítással az ábrán vázolt, tartós nyugalomban lévő szerkezet támasztóerő-rendszerét!



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (8\vec{e}_x) \text{ kN}; \quad \vec{F}_B = (-8\vec{e}_x + 8\vec{e}_y) \text{ kN}; \quad \vec{F}_C = (8\vec{e}_x) \text{ kN}.$$

**3.6 (MP. I. 5.38)** Határozza meg számítással az ábrán vázolt, tartós nyugalomban lévő szerkezet támasztóerő-rendszerét!



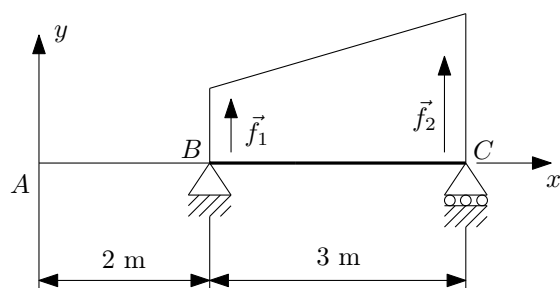
**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (3\vec{e}_x) \text{ kN}; \quad \vec{F}_B = (-1,5\vec{e}_x + 1,5\vec{e}_y) \text{ kN}; \quad \vec{F}_C = (-1,5\vec{e}_x - 1,5\vec{e}_y) \text{ kN}.$$

## 4. hét: Statikai nyomaték, súlypont meghatározása

**4.1 (MP. I. 1.118 módosítva)** Adott az ábrán látható BC rúdra ható,  $x$  tengely mentén lineárisan megoszló erőrendszer.  $\vec{f}_1 = (2\vec{e}_y) \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $\vec{f}_2 = (4\vec{e}_y) \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ .

- Határozza meg az erőrendszer  $A$  pontba redukált  $(\vec{F}; \vec{M}_A)_A$  vektorkettősét!
- Határozza meg az  $\vec{F}_B$  és  $\vec{F}_C$  támasztóerőket!



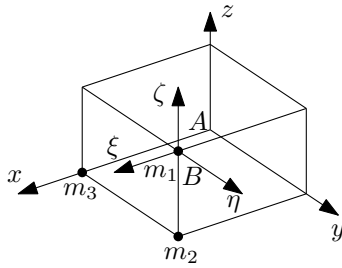
**Végeredmények:**

- $\vec{F} = (9\vec{e}_y) \text{ kN}; \quad \vec{M}_A = (33\vec{e}_z) \text{ kNm}.$
- $\vec{F}_B = (-4\vec{e}_y) \text{ kN}; \quad \vec{F}_C = (-5\vec{e}_y) \text{ kN}.$



**4.2 (MP. I. 1.144)** Adott az anyagi pontokból álló skalárrendszer.  $m_1 = 5$  kg,  $m_2 = 2$  kg,  $m_3 = 3$  kg,  $\vec{r}_B = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 3\vec{e}_z)$  m. Számítsa ki a tömegpontrendszer

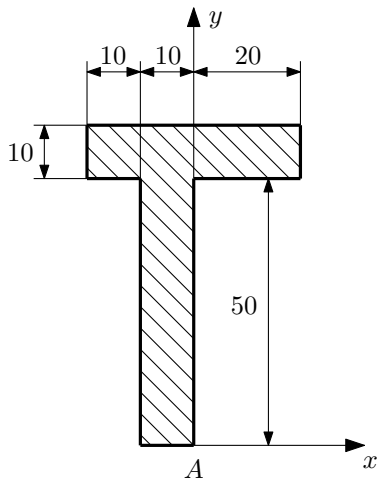
- $A$ , illetve  $B$  pontra vonatkozó  $\vec{S}_A$  illetve  $\vec{S}_B$  statikai nyomatékát;
- $\xi\eta$ ,  $\eta\zeta$  és  $\xi\zeta$  koordinátasíkokra vonatkozó statikai nyomatékát;
- $T$  tömegközéppontjának  $\vec{r}_T$  helyvektorát!



**Végeredmények:**

- $\vec{S}_A = (40\vec{e}_x + 28\vec{e}_y + 15\vec{e}_z)$  kgm;  $\vec{S}_B = (-12\vec{e}_y - 15\vec{e}_z)$  kgm;
- $S_{\xi\eta} = -15$  kgm;  $S_{\eta\zeta} = 0$ ;  $S_{\xi\zeta} = -12$  kgm;
- $\vec{r}_T = (4\vec{e}_x + 2,8\vec{e}_y + 1,5\vec{e}_z)$  m.

**4.3 (MP. I. 1.149 d)** Számítsa ki az ábrán vázolt keresztmetszet  $x$ , illetve  $y$  tengelyre vonatkozó  $S_x$ , illetve  $S_y$ , valamint az  $A$  pontra vonatkozó  $\vec{S}_A$  statikai nyomatékát és súlypontjának  $\vec{r}_S$  helyvektorát!



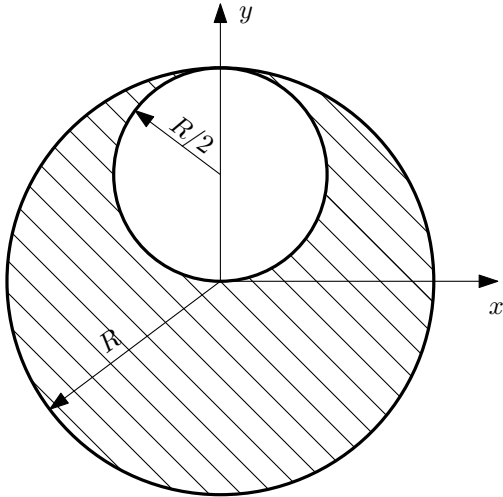
**Végeredmények:**

$$S_x = 34500 \text{ mm}^3; \quad S_y = -2500 \text{ mm}^3;$$

$$\vec{S}_A = (-2500\vec{e}_x + 34500\vec{e}_y) \text{ mm}^3; \quad \vec{r}_S = (-2,78\vec{e}_x + 38,33\vec{e}_y) \text{ mm}.$$

4.4 (MP. I. 1.151) Határozza meg az ábrán vázolt, bevonalkázott síkidom

- $x$  és  $y$  tengelyekre vonatkozó statikai nyomatékát;
- súlypontjának  $x_S$  és  $y_S$  koordinátáját!

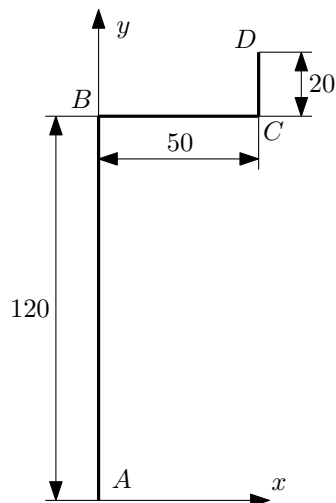


Végeredmények:

- $S_x = -\frac{R^3}{8}\pi$ ;  $S_y = 0$ ;
- $x_S = 0$ ;  $y_S = -\frac{R}{6}$ .

4.5 (MP. I. 1.152) Számítsa ki az  $ABCD$  törtvonal

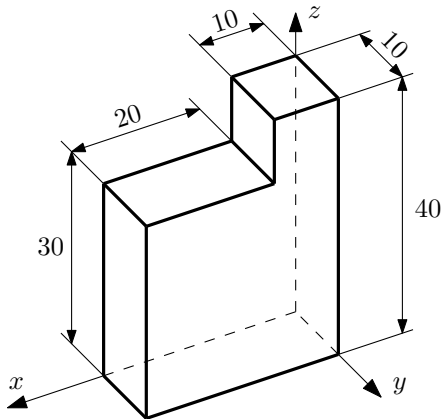
- $A$  pontra vonatkozó  $\vec{S}_A$  statikai nyomatékát;
- súlypontjának  $x_S$  és  $y_S$  koordinátáját!



**Végeredmények:**

- a)  $\vec{S}_A = (2250\vec{e}_x + 15800\vec{e}_y) \text{ mm}^2$ ;  
 b)  $x_S = 11,84 \text{ mm}$ ;  $y_S = 83,16 \text{ mm}$ .

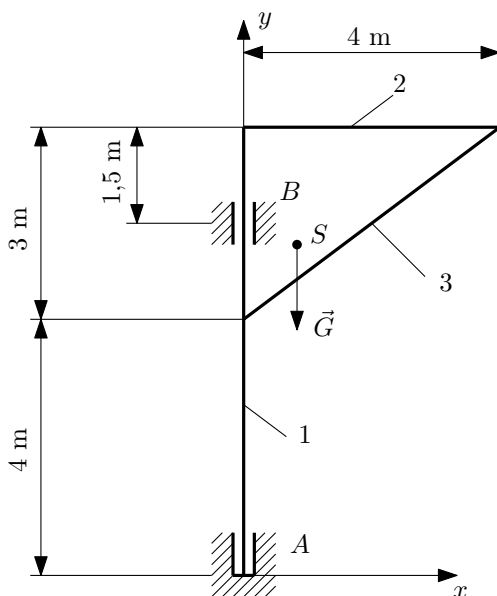
**4.6 (MP. I. 1.146)** Határozza meg az ábrán vázolt homogén test súlypontjának  $\vec{r}_S$  helyvektorát!



**Végeredmény:**

$$\vec{r}_S = (14\vec{e}_x + 5\vec{e}_y + 17\vec{e}_z) \text{ mm}.$$

**4.7** Határozza meg az ábrán vázolt fali forgódaru origóra számított  $\vec{S}_A$  statikai nyomatékát, súlypontjának  $\vec{r}_S$  helyvektorát, majd számítsa ki az  $A$  és  $B$  támaszokban ébredő reakcióerőket, ha a daru minden eleme  $q = 262 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  folyómétersúlyú anyagból készült!



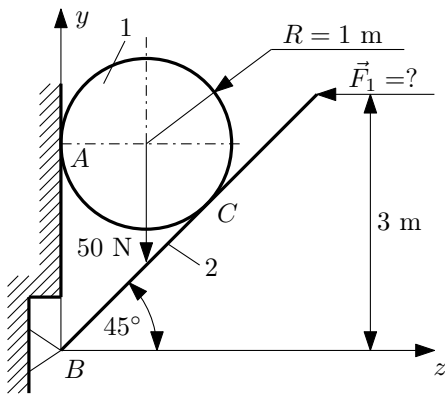
Végeredmények:

$$\vec{S}_A = (18\vec{e}_x + 80\vec{e}_y) \text{ m}^2; \quad \vec{r}_S = (1,125\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \text{ m};$$

$$\vec{F}_A = (857,45\vec{e}_x + 4192\vec{e}_y) \text{ N}; \quad \vec{F}_B = (-857,45\vec{e}_x) \text{ N}.$$

## 5 hét: Összetett szerkezetek statikája

**5.1 (MP. I. 5.64)** A súlyos korongból és súlytalan rúdból álló szerkezet a vázolt helyzetben tartós nyugalomban van. Határozza meg a ?-lel jelölt erőt, a támasztóerőket és a belső erőket!

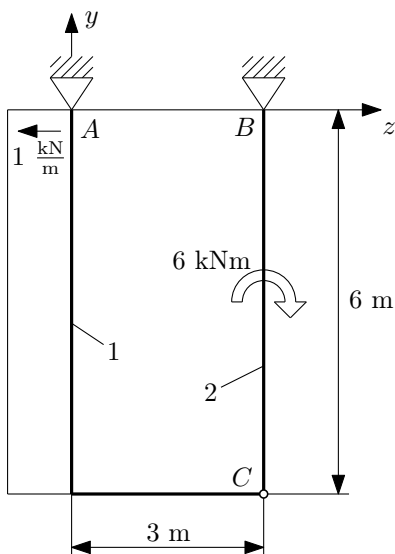


Végeredmények:

$$\vec{F}_1 = (-56,904\vec{e}_z) \text{ N}; \quad \vec{F}_A = (50\vec{e}_z) \text{ N}; \quad \vec{F}_B = (50\vec{e}_y + 6,904\vec{e}_z) \text{ N};$$

$$\vec{F}_{12} = (-50\vec{e}_y + 50\vec{e}_z) \text{ N}.$$

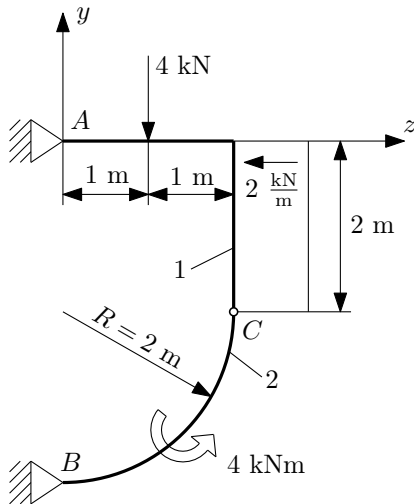
**5.2 (MP. I. 5.74)** Határozza meg számítással az ábrán vázolt rúdszerkezet támasztó- és belső erőit! A rudak súlya elhanyagolható!



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (-8\vec{e}_y + 7\vec{e}_z) \text{ kN}; \quad \vec{F}_B = (8\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ kN}; \quad \vec{F}_{12} = (-8\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ kN};$$

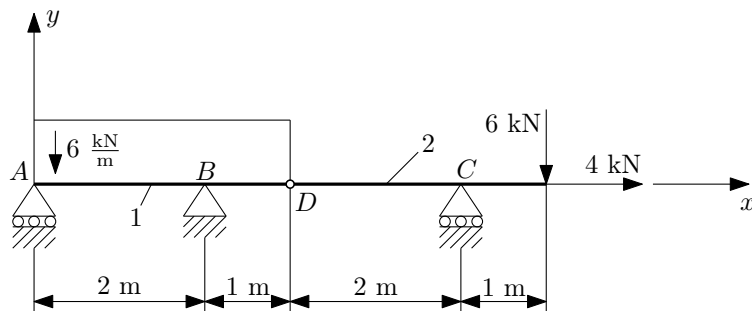
**5.3 (MP. I. 5.75)** Határozza meg számítással az ábrán vázolt rúdszerkezet támasztó- és belső erőit! A rudak súlya elhanyagolható!



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \text{ kN}; \quad \vec{F}_B = (3\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ kN}; \quad \vec{F}_{12} = (-3\vec{e}_y - \vec{e}_z) \text{ kN};$$

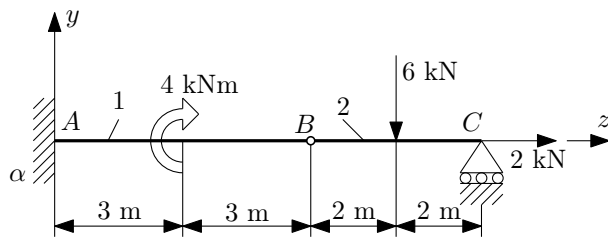
**5.4 (MP. I. 5.90)** Határozza meg az ábrán vázolt Gerber-tartó támasztóerő-rendszerét és belső erőit!



**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (6\vec{e}_y) \text{ kN}; \quad \vec{F}_B = (-4\vec{e}_x + 9\vec{e}_y) \text{ kN}; \quad \vec{F}_C = (9\vec{e}_y) \text{ kN}; \quad \vec{F}_{12} = (-4\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \text{ kN}.$$

**5.5 (MP. I. 5.91)** Határozza meg az ábrán vázolt Gerber-tartó támasztóerő-rendszerét és belső erőit!

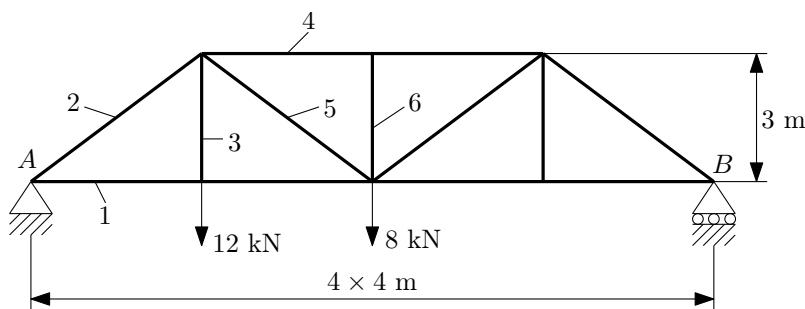


**Végeredmények:**

$$\vec{F}_A = (3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) \text{ kN}; \quad \vec{M}_A = (-22\vec{e}_x) \text{ kNm}; \quad \vec{F}_C = (3\vec{e}_y) \text{ kN}; \quad \vec{F}_{12} = (3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) \text{ kN}.$$

## 6. hét: Rácsos tartók rúderőinek meghatározása, igénybevételek

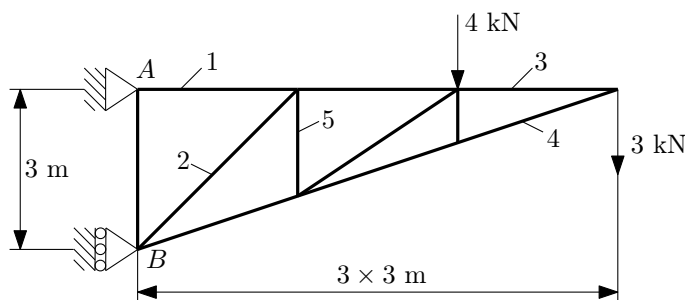
**6.1 (MP. I. 5.101)** Határozza meg az ábrán vázolt rácsos szerkezet kijelölt rúdjaiban ébredő rúderőket!



**Végeredmények:**

$$N_1 = 17,333 \text{ kN}; \quad N_2 = -21,667 \text{ kN}; \quad N_3 = 12 \text{ kN}; \quad N_4 = -18,667 \text{ kN}; \\ N_5 = 1,667 \text{ kN}; \quad N_6 = 0.$$

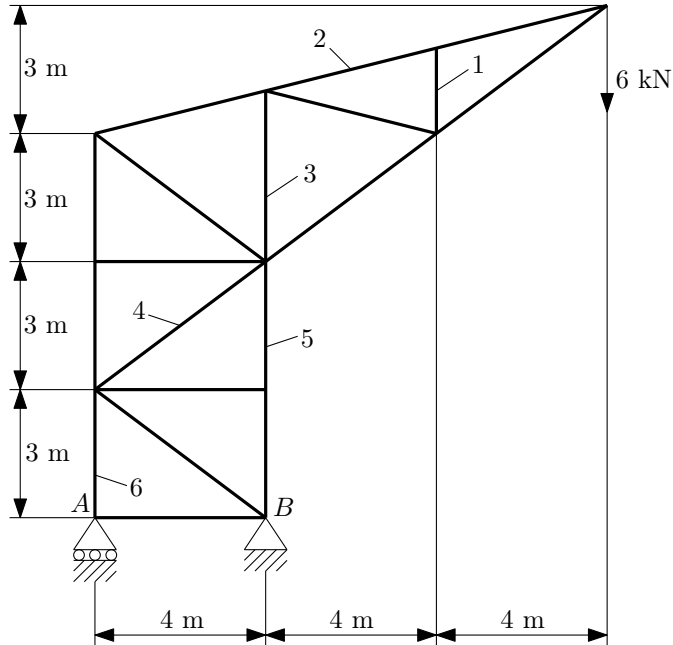
**6.2 (MP. I. 5.106)** Határozza meg az ábrán vázolt rácsos szerkezet kijelölt rúdjaiban ébredő rúderőket!



**Végeredmények:**

$$N_1 = 17 \text{ kN}; \quad N_2 = -2,828 \text{ kN}; \quad N_3 = 9 \text{ kN}; \quad N_4 = -9,487 \text{ kN}; \quad N_5 = 2 \text{ kN}.$$

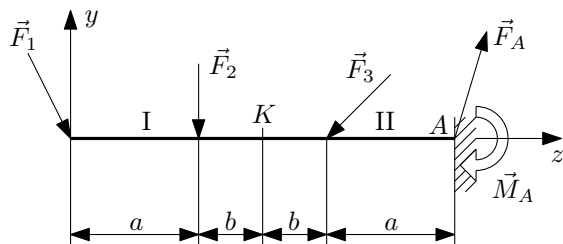
**6.3 (MP. I. 5.108)** Határozza meg az ábrán vázolt rácsos szerkezet kijelölt rúdjaiban ébredő rúderőket!



**Végeredmények:**

$$N_1 = 0; \quad N_2 = 12,369 \text{ kN}; \quad N_3 = 0; \quad N_4 = 0; \quad N_5 = -18 \text{ kN}; \quad N_6 = 12 \text{ kN}.$$

**6.4 (MP. II. 1.1)** Ismeretes a befogott rúd terhelése és támasztóerő-rendszere.  $\vec{F}_1 = (-2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$  kN;  $\vec{F}_2 = (-4\vec{e}_y)$  kN;  $\vec{F}_3 = (-4\vec{e}_y - 4\vec{e}_z)$  kN;  $\vec{F}_A = (10\vec{e}_y + 3\vec{e}_z)$  kN;  $\vec{M}_A = (9\vec{e}_x)$  kNm;  $a = 0,5$  m;  $b = 0,25$  m. Határozza meg



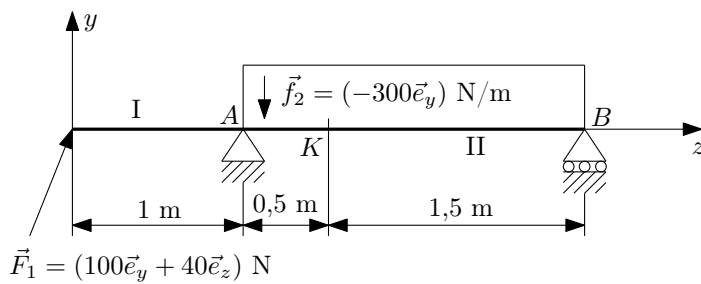
- az I jelű rúdrész egyensúlya alapján a  $K$  keresztmetszet mentén e részre ható feszültségeknek a  $K$  keresztmetszet  $S$  súlypontjába redukált vektorkettősét, vagyis az  $\vec{F}_S^I$  feszültségi eredő erőt és az  $\vec{M}_S^I$  feszültségi eredő erópárt;
- a II jelű rúdrész egyensúlya alapján a  $K$  keresztmetszetben e részre ható  $\vec{F}_S^{II}$  feszültségi eredő erőt és  $\vec{M}_S^{II}$  feszültségi eredő erópárt;

- c) a  $K$  keresztmetszet igénybevétele, vagyis az  $N_K$  rúderőt, a  $T_K$  nyíróerőt és  $M_{hK}$  hajlítónyomatékot!

**Végeredmények:**

- a)  $\vec{F}_S^I = (6\vec{e}_y - \vec{e}_z)$  kN;  $\vec{M}_S^I = (2,5\vec{e}_x)$  kNm.  
 b)  $\vec{F}_S^{II} = (-6\vec{e}_y + \vec{e}_z)$  kN;  $\vec{M}_S^{II} = (-2,5\vec{e}_x)$  kNm.  
 c)  $N_K = -1$  kN;  $T_K = -6$  kN;  $M_{hK} = 2,5$  kNm.

**6.5 (MP. II. 1.3)** Ismeretes a kéttámaszú tartó terhelése. Határozza meg a  $K$  keresztmetszetben



- a) az I jelű rúdrészre ható feszültségeknek a keresztmetszet  $S$  súlypontjába redukált  $(\vec{F}_S^I; \vec{M}_S^I)$  vektorkettősét, illetve  
 b) a II jelű rúdrészre ható feszültségeknek a keresztmetszet súlypontjába redukált  $(\vec{F}_S^{II}; \vec{M}_S^{II})$  vektorkettősét, majd  
 c) az  $N_K$  rúderőt, a  $T_K$  nyíróerőt és az  $M_{hK}$  hajlítónyomatékot!

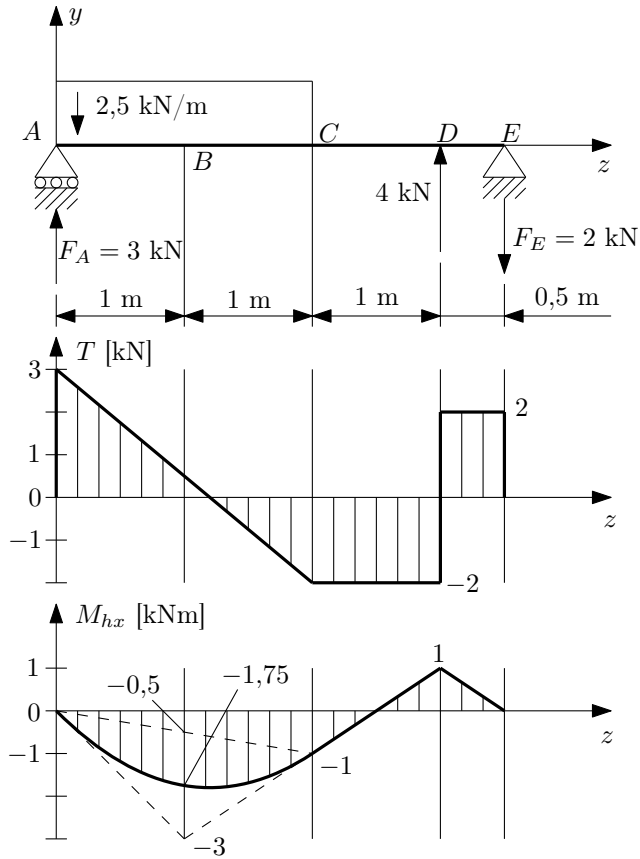
**Végeredmények:**

- a)  $\vec{F}_S^I = (-100\vec{e}_y)$  N;  $\vec{M}_S^I = (-187,5\vec{e}_x)$  Nm.  
 b)  $\vec{F}_S^{II} = (100\vec{e}_y)$  N;  $\vec{M}_S^{II} = (187,5\vec{e}_x)$  Nm.  
 c)  $N_K = 0$ ;  $T_K = 100$  N;  $M_{hK} = -187,5$  Nm.

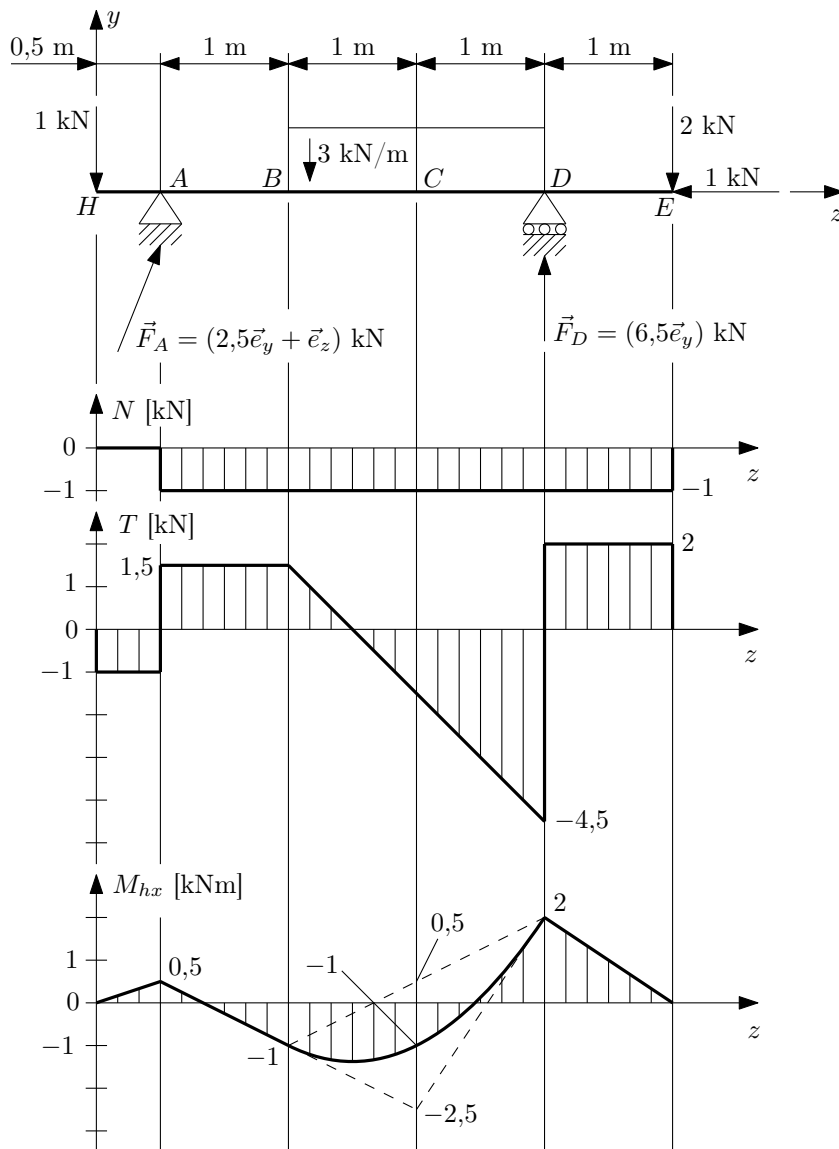


## 7) Igénybevételi ábrák szerkesztése

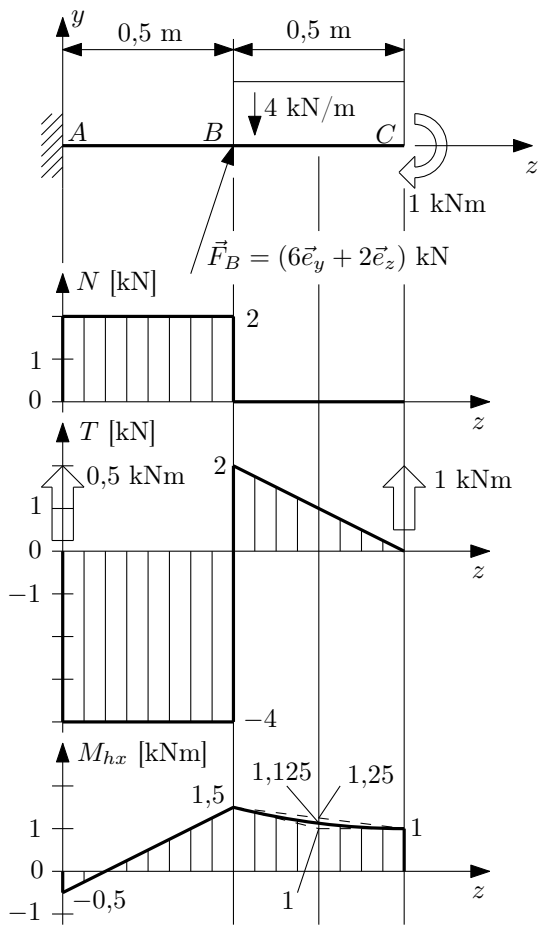
7.1 (MP. II. 1.34) Adott a kéttámaszú tartó terhelése és támasztóerő-rendszere. Rajzolja meg az egész tartóra az igénybevételi ábrákat!



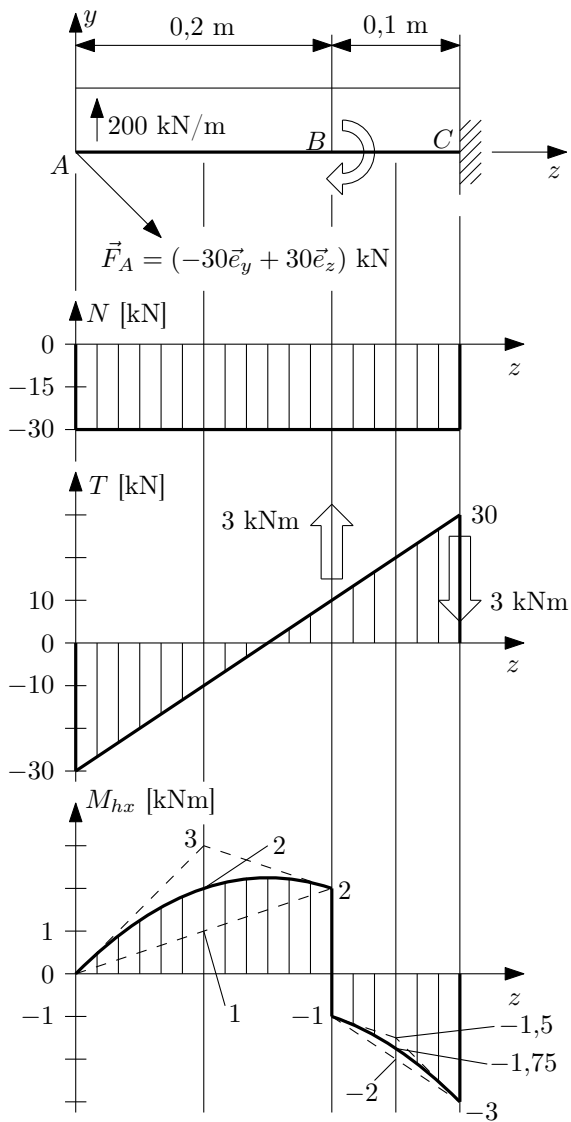
7.2 (MP. II. 1.35) Adott a kéttámaszú tartó terhelése és támasztóerő-rendszere. Rajzolja meg az egész tartóra az igénybevételi ábrákat!



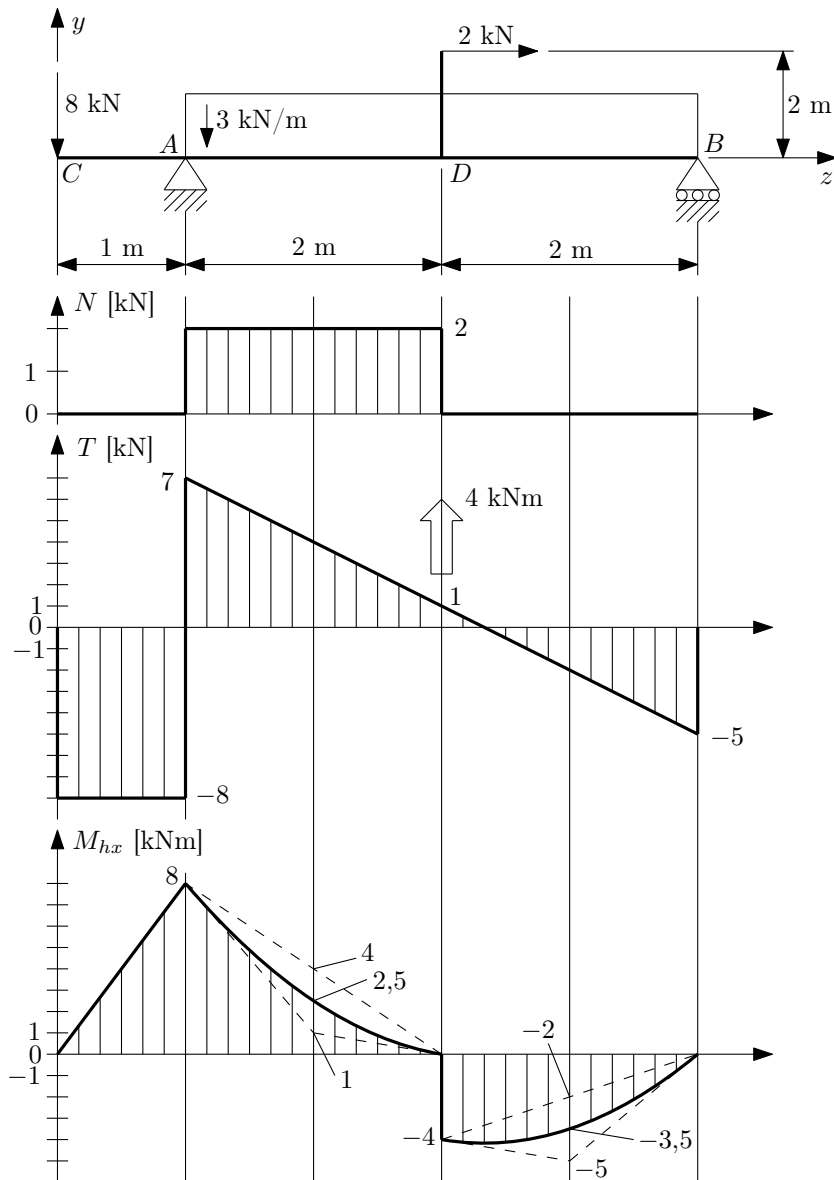
**7.3 (MP. II. 1.30)** Rajzolja meg az adott terhelésű befogott rúd  $N(z)$  rúderő-,  $T(z)$  nyírőerő- és  $M_h(z)$  hajlítónyomatéki ábráját, a számszerű értékeknek, illetve a görbe szakaszok végértékeinek a megadásával!



**7.4 (MP. II. 1.31)** Rajzolja meg az adott terhelésű befogott rúd  $N(z)$  rúderő-,  $T(z)$  nyírőerő- és  $M_h(z)$  hajlítónyomatéki ábráját, a számszerű értékeknek, illetve a görbe szakaszok végértékeinek a megadásával!

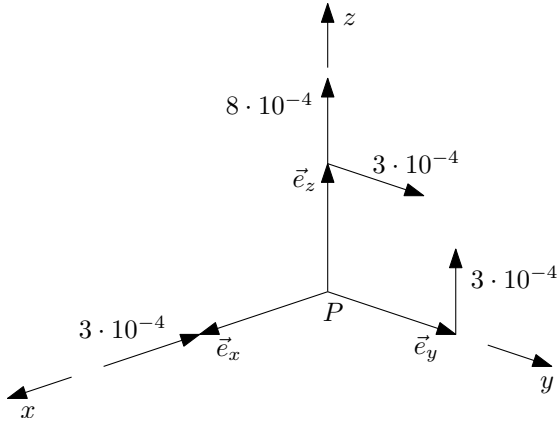


7.5 Adott az ábrán látható tartó és terhelése. Határozza meg a támasztóerőket, majd szerkessze meg a tartó igénybevételi ábráit!



## 8. hét: Szilárdságtani bevezetés, alakváltozási állapot, feszültség állapot

**8.1 (MP. II. 3.12 a, d)** Egy rugalmas test  $P$  pontjában az alakváltozási állapotot az ábra szemlélteti.



- a) Írja fel az  $\underline{\underline{A}}_P$  alakváltozási tenzor mátrixát!
- b) Számítsa ki az  $\vec{e}_n = 0,8\vec{e}_y + 0,6\vec{e}_z$  és  $\vec{e}_m = 0,6\vec{e}_y - 0,8\vec{e}_z$  egységvektorhoz tartozó  $\varepsilon_n$  fajlagos nyúlást és  $\gamma_{mn}$  fajlagos szögtorzulást!

**Végeredmények:**

a) 
$$\left[ \underline{\underline{A}}_P \right] = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

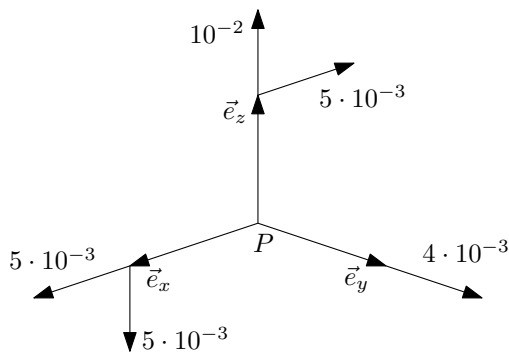
b)  $\varepsilon_n = 5,76 \cdot 10^{-4}; \quad \gamma_{mn} = -9,36 \cdot 10^{-4}.$

**8.2 (MP. II. 3.13)** Az  $xyz$  koordináta-rendszer  $P$  pontjában ismeretesek egy rugalmas test alakváltozási jellemzői:  $\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_y = 4 \cdot 10^{-3}$ ;  $\varepsilon_z = 10^{-2}$ ;  $\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$  és  $\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = -10^{-2}$ .

- a) Szemléltesse elemi triéderen a  $P$  pontbeli alakváltozási állapotot!
- b) Számítsa ki az  $\varepsilon_n$  fajlagos nyúlást és a  $\gamma_{yn}$  szögtorzulást, ha  $\vec{e}_n = 0,8\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_z$ !

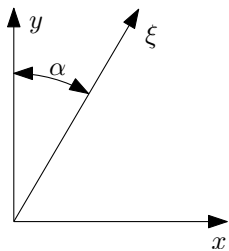
### Végeredmények:

a) szemléltetés



b)  $\varepsilon_n = 2 \cdot 10^{-3}$ ;  $\gamma_{yn} = 0$ .

**8.3 (MP. II. 3.15 a)** Ismert egy test sík felületének egy pontjában az ábrán vázolt három irányban, valamint a síkra merőleges irányban (amely alakváltozási főtengely) a fajlagos nyúlás.  $\varepsilon_x = -4 \cdot 10^{-4}$ ;  $\varepsilon_y = 6 \cdot 10^{-4}$ ;  $\varepsilon_\xi = 6 \cdot 10^{-4}$ ;  $\varepsilon_z = 5 \cdot 10^{-4}$ ;  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$ ;  $\alpha = 30^\circ$ . Számítsa ki a  $\gamma_{xy}$  szögváltozás értékét!



### Végeredmény:

$$\gamma_{xy} = 5,774 \cdot 10^{-4}.$$

**8.4 (MP. II. 3.20)** Egy szilárd test  $P$  pontjában ismert a  $\underline{T}_P$  feszültségi tenzor mátrixa:

$$\left[ \underline{T}_P \right] = \begin{bmatrix} 400 & -500 & 0 \\ -500 & 0 & 500 \\ 0 & 500 & -500 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

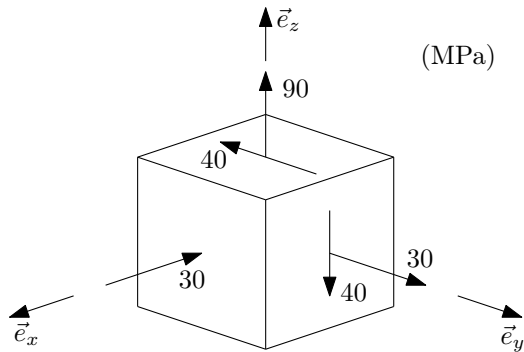
Határozza meg a  $P$  pontban

- az  $\vec{e}_x$ ;  $\vec{e}_y$ ;  $\vec{e}_z$  normálvektorokhoz tartozó  $\vec{\rho}_x$ ;  $\vec{\rho}_y$ ;  $\vec{\rho}_z$  feszültségvektorokat;
- az  $\vec{n} = 0,8\vec{e}_y + 0,6\vec{e}_z$  normálisú elemi felületen a  $\vec{\rho}_n$  feszültségvektort, a  $\sigma_n$  normálfe-  
szültséget és a  $\vec{\tau}_n$  csúsztatófeszültség-vektort!

**Végeredmények:**

- a)  $\vec{\rho}_x = (400\vec{e}_x - 500\vec{e}_y)$  MPa;  $\vec{\rho}_y = (-500\vec{e}_x + 500\vec{e}_z)$  MPa;  $\vec{\rho}_z = (500\vec{e}_y - 500\vec{e}_z)$  MPa.  
 b)  $\vec{\rho}_n = (-400\vec{e}_x + 300\vec{e}_y + 100\vec{e}_z)$  MPa;  $\sigma_n = 300$  MPa;  
 $\vec{\tau}_n = (-400\vec{e}_x + 60\vec{e}_y - 80\vec{e}_z)$  MPa.

**8.5 (MP. II. 3.21)** A  $P$  pontban keletkező feszültségi állapot a pont környezetéből kivett elemi kockán adott.

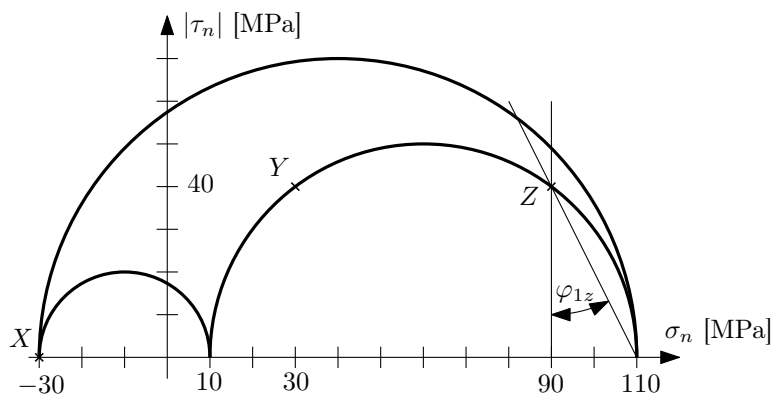


- a) Írja fel a feszültségi tenzor mátrixát!  
 b) Rajzolja meg a feszültségi állapot teljes Mohr-féle feszültségi kördiagramját!  
 c) A kördiagram segítségével határozza meg a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat!  
 d) Számítsa ki külön a Mohr-, és külön a Huber-Mises-Hencky-féle elmélet szerinti redukált feszültség értékét!

**Végeredmények:**

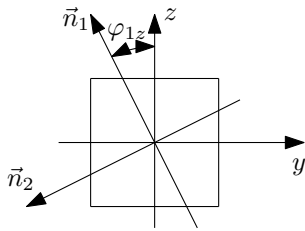
a) 
$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

- b) Mohr-féle feszültségi kördiagram





c)  $\sigma_1 = 110 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_2 = 10 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_3 = -30 \text{ MPa}$ ;  $\varphi_{1z} = 26,5651^\circ$ .



d)  $\sigma_{\text{red}}^{\text{Mohr}} = 140 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = 124,9 \text{ MPa}$ .

**8.6 (Fejezetek a Szilárdságtanból (FSz.): 67. old. 2.7)** Adott a feszültségi tenzor mátrixa az  $xyz$  koordináta-rendszerben:

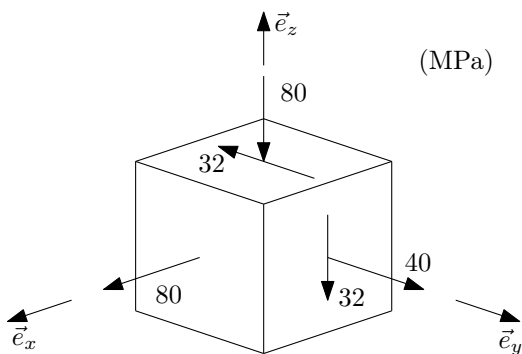
$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -32 \\ 0 & -32 & -80 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Írja fel a feszültségi tenzor diadikus előállítását, szemléltesse a feszültségi állapotot az elemi kockán és számítsa ki az  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{17}}(4\vec{e}_y - \vec{e}_z)$  és az  $\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{17}}(\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$  normálisú felületelemeken ébredő  $\sigma_n$  és  $\sigma_m$  normálfeszültséget, valamint a  $\tau_{mn}$  nyírófeszültséget. Írja fel a feszültségi tenzor mátrixát, illetve diadikus előállítását az  $\vec{e}_x$ ;  $\vec{n}$ ;  $\vec{m}$  egységvektorok által kifizített kartéziszi koordináta-rendszerben!

**Végeredmények:**

Diadikus alak:  $\underline{T} = 80\vec{e}_x \circ \vec{e}_x + (40\vec{e}_y - 32\vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + (-32\vec{e}_y - 80\vec{e}_z) \circ \vec{e}_z$  MPa.

Szemléltetés az elemi kockán:

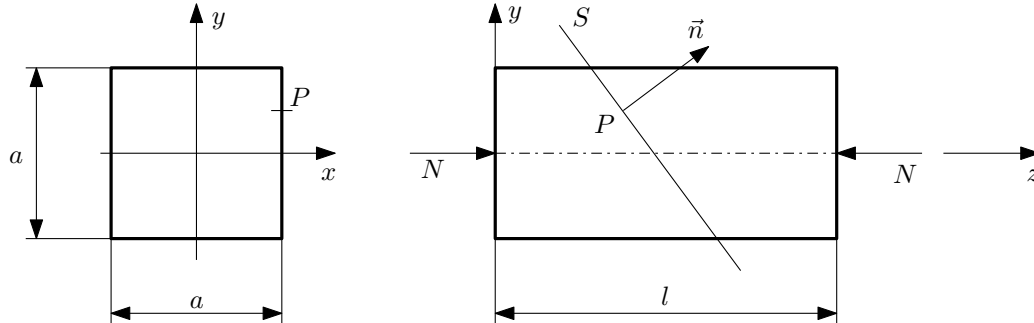


$\sigma_n = 48 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_m = -88 \text{ MPa}$ ;  $\tau_{mn} = 0$ .

$$[\underline{T}]_{x,m,n} = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & -88 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

## 10. hét: Egyszerű igénybevételek: húzás, nyomás

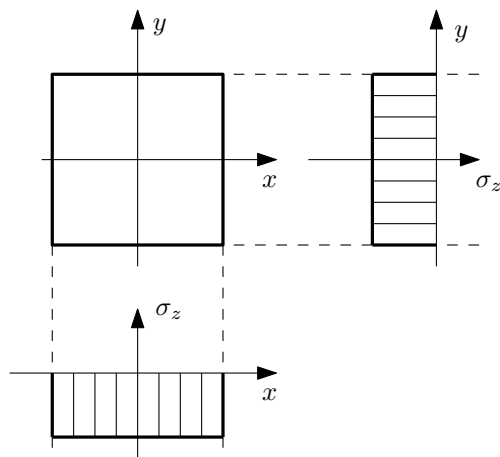
10.1 (MP. II. 4.2) A négyzet keresztmetszetű zömök rúdszakasz nyomásra van igénybevéve.  $N = -600$  kN;  $a = 50$  mm;  $l = 100$  mm;  $\vec{n} = 0,6\vec{e}_y + 0,8\vec{e}_z$ ;  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa;  $\nu = 1/3$ .



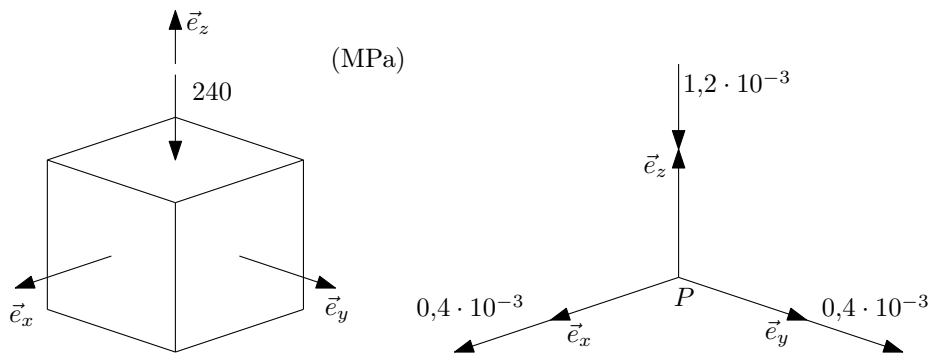
- Rajzolja meg a  $z = 0$  keresztmetszetben ébredő feszültségek eloszlásának jellegét az  $x$  és  $y$  koordináták függvényében!
- Határozza meg a  $P(25; 12,5; 40)$  mm pontbeli  $\underline{T}_P$  feszültségi tenzor valamint az  $\underline{A}_P$  alakváltozási tenzor mátrixát, és szemléltesse is azokat!
- Szerkessze meg a  $P$  pontbeli feszültségi állapot Mohr-féle kördiagramját!
- Határozza meg a  $P$  ponton átmenő  $\vec{n}$  normálisú  $S$  síkon fellépő  $\sigma_n$  feszültséget!

**Végeredmények:**

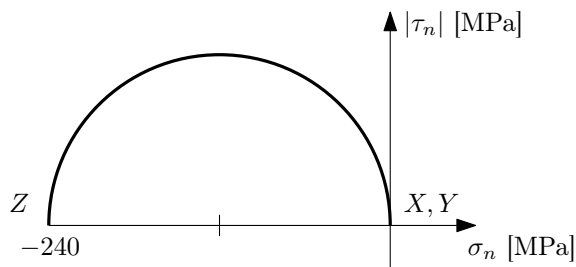
- feszültségeloszlás:



$$b) \left[ \underline{T}_P \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -240 \end{bmatrix} \text{ MPa}; \quad \left[ \underline{A}_P \right] = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & -1,2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$



c) Mohr-féle kördiagram:



d)  $\sigma_n = -153,6$  MPa.

**10.2 (BS Példatár 5.8)** Méretezzünk vontatórudat. Szükséges vontatóerő  $F = 25$  kN, a rúd körkeresztmetszetű, anyagára vonatkozó folyáshatár  $\sigma_F = 210$  MPa;  $n_F = 1,5$ ;  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa. Mekkora a tényleges biztonsági tényező, ha  $d = 15$  mm-t választunk? Mekkora a 3 m hosszú rúd megnyúlása?

**Végeredmények:**

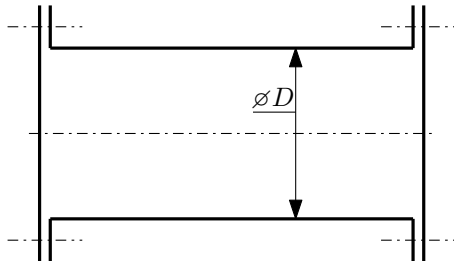
$$d \geq 15,079 \text{ mm}; \quad n_F^{\text{tényl.}} = 1,48; \quad \Delta l = 2,1225 \text{ mm}.$$

**10.3 (BS Példatár 5.11)** Egy acélsodrony kötélnek  $F = 90$  kN terhet kell tartania. Határozza meg, hány acélszálnak kell alkotnia a sodronyt! Egy acélszál átmérője:  $d = 1,6$  mm;  $\sigma_{\text{meg}} = 200$  MPa.

**Végeredmény:**

$$k = 224 \text{ db}.$$

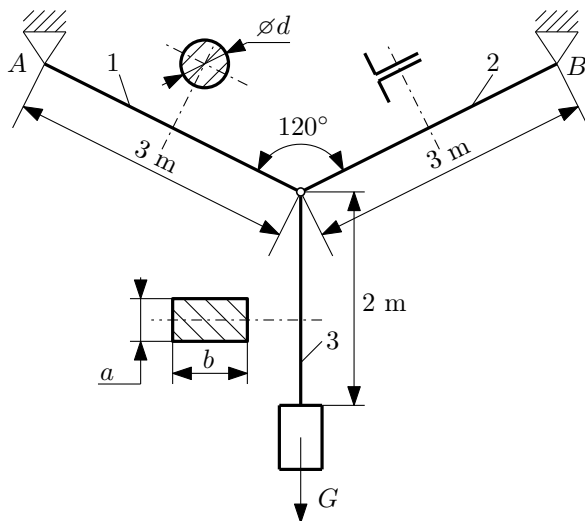
**10.4 (MP. II. 4.19)** A  $D$  átmérőjű hengeres tartály fedelét  $k$  számú csavar szorítja le. A tartály  $p$  nyomású gázt tárol.  $p = 10$  MPa;  $k = 20$ ;  $D = 500$  mm. A csavarok anyagának  $\sigma_F = 160$  MPa a folyási határa, és  $n_F = 4$  az erre vonatkoztatott biztonsági tényező. Határozza meg, hogy mekkora az egyes csavarok magkeresztmetszetének  $A_{sz}$  szükséges mérete (a szereléskor fellépő feszültségek elhanyagolását a nagy biztonsági tényező indokolja)!



**Végeredmény:**

$$A_{sz} = 2,454 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \implies d_{sz} \geq 55,9 \text{ mm.}$$

**10.5 (MP. II. 4.14)** Három rúdból összeépített szerkezet függőleges rúdján  $G$  súlyú test függ.  $G = 150$  kN;  $d = 40$  mm;  $2a = b$ ;  $E = 200$  GPa; a rudak anyagának  $\sigma_{meg} = 120$  MPa a megengedett feszültsége.



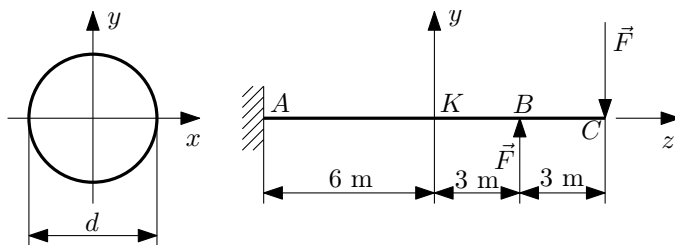
- Ellenőrizze az 1-es jelű rúd bejelölt keresztmetszetét!
- Határozza meg a 2-es és 3-as jelű rudak  $A_{2sz}$  és  $A_{3sz}$  szükséges keresztmetszetét, majd méretezze a 2-es jelű rudat 2 db egyenlőtlen szárú L szelvényre, és a 3-as jelű rudat téglalap keresztmetszetűre!
- Határozza meg az egyes rudakban felhalmozódó  $U_1$ ;  $U_2$ ;  $U_3$  belső energia értékét!

### Végeredmények:

- a)  $\sigma_1 = 119,37 \text{ MPa} < \sigma_{\text{meg}} \implies$  megfelel.
- b)  $A_{2sz} = A_{3sz} = 1250 \text{ mm}^2 \implies$   
a választott L szelvény:  $L55 \times 75 \times 5$   
a téglalap méretei:  $a = 25 \text{ mm}$ ;  $b = 50 \text{ mm}$ .
- c)  $U_1 = 134,3 \text{ J}$ ;  $U_2 = 133,93 \text{ J}$ ;  $U_3 = 90 \text{ J}$ .

## 11. hét: Egyszerű igénybevételek: hajlítás

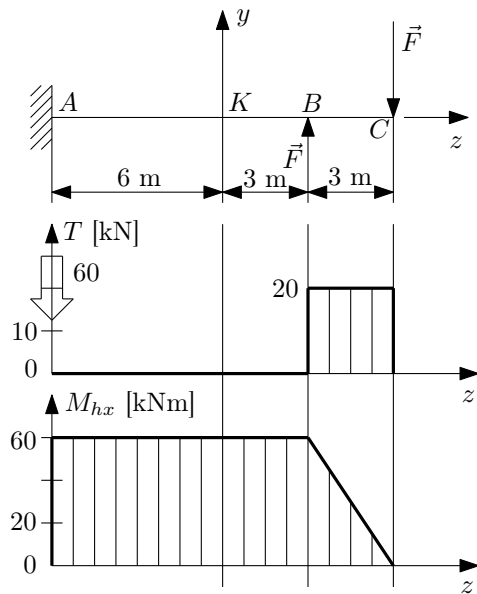
**11.1 (MP. II. 4.55)** Az egyik végén befogott körkeresztmetszetű prizmatikus rudat  $\vec{F}$  és  $-\vec{F}$  erők terhelik.  $|\vec{F}| = 20 \text{ kN}$ ;  $d = 160 \text{ mm}$ .



- a) Rajzolja meg a tartó hajlítónyomatéki ábráját a jellemző metszések feltüntetésével!
- b) Határozza meg a tartó veszélyes keresztmetszetét, illetve veszélyes keresztmetszeteit!
- c) Határozza meg a tartó  $z = 0$  keresztmetszetében a feszültségek eloszlását, mint az  $x$  és  $y$  koordináták függvényét!
- d) Határozza meg a  $P(0; 80; 0)$  mm pontban a  $\underline{\underline{T}}_P$  feszültségi tenzor mátrixát!
- e) Szemléltesse a  $P$  pontbeli feszültségi állapotot (az  $xyz$  koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos élű) elemi kockán!
- f) Rajzolja meg a  $P$  pontbeli feszültségi állapot Mohr-féle kördiagramját!

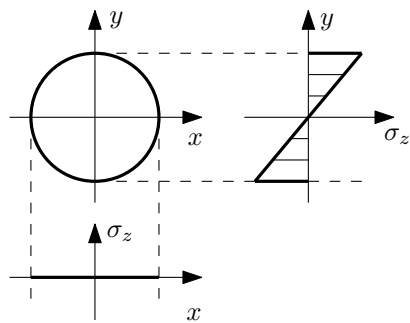
### Végeredmények:

a) Igénybevételi ábrák:



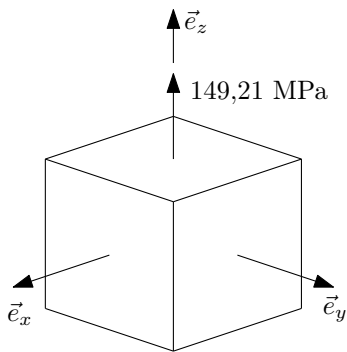
b) A rúd  $\overline{AB}$  szakaszán minden keresztmetszet veszélyes.

c)  $\sigma_z = 1,865y$

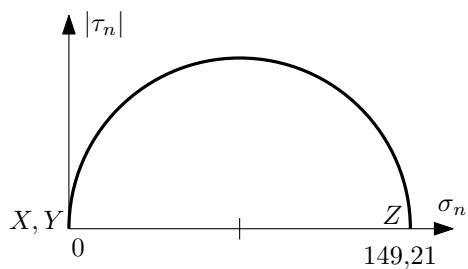


d) 
$$\left[ \underline{T} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 149,21 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

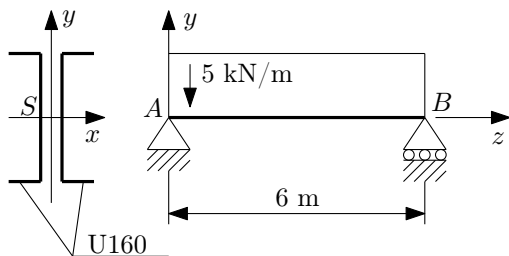
e) szemléltetés:



f) Mohr-körök:



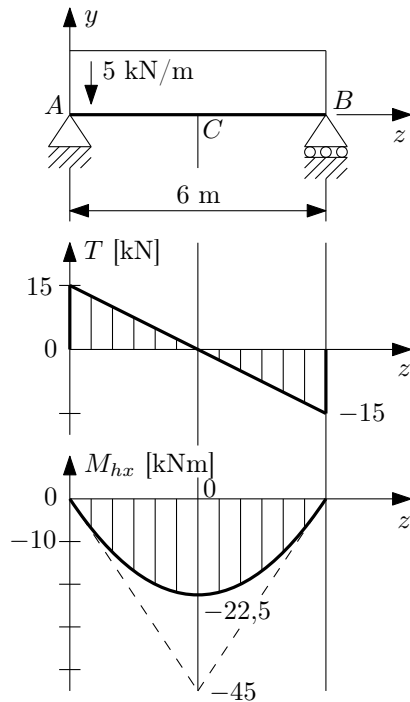
**11.2 (MP. II. 4.57)** Ismeretes az állandó keresztmetszetű kéttámaszú tartó terhelése.



- Az igénybevételi ábrák megrajzolása után határozza meg a tartó veszélyes keresztmetszetét, illetve veszélyes keresztmetszeteit!
- Határozza meg a  $\sigma_z^{\max}$  maximális normál feszültség értékét, továbbá a tartó maximális feszültségű  $P$  pontjának, illetve pontjainak  $x, y, z$  koordinátáit!
- Ellenőrizze a tartót feszültségcsúcsra, ha a tartó anyagára  $\sigma_{\text{meg}} = 150$  MPa a megengedett feszültség!

### Végeredmények:

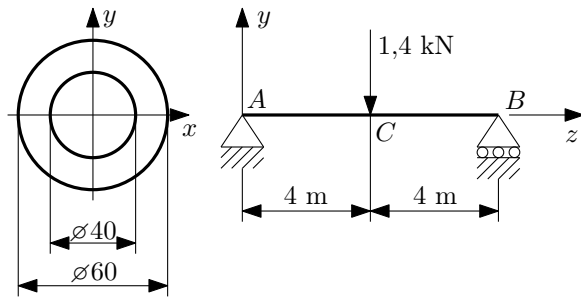
a) Igénybevételi ábrák alapján a veszélyes keresztmetszet:  $C$



b)  $\sigma_z^{\max} = 120,48 \text{ MPa}$ ;  $P(-64 \leq x \leq 64; y = \pm 80; z = 3000) \text{ mm}$ .

c) Mivel  $\sigma_z^{\max} \leq \sigma_{\text{meg}} \implies$  megfelel.

**11.3 (MP. II. 4.60)** Ismeretes az állandó keresztmetszetű kéttámaszú tartó terhelése.



a) Az igénybevételi ábrák megrajzolása után határozza meg a tartó veszélyes keresztmetszetét, illetve veszélyes keresztmetszeteit!

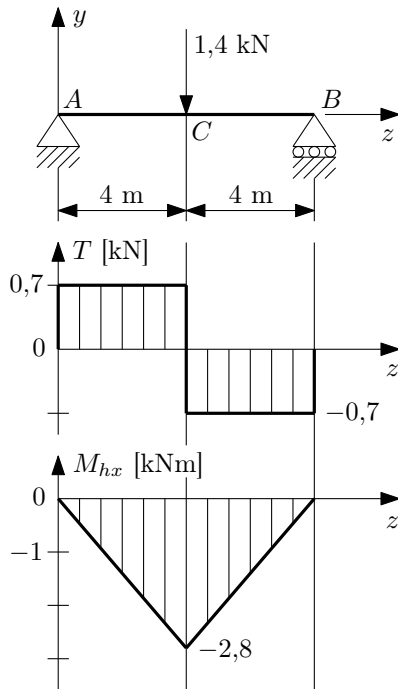
b) Határozza meg a  $\sigma_z^{\max}$  maximális normál feszültség értékét, továbbá a tartó maximális feszültségű  $P$  pontjának, illetve pontjainak  $x, y, z$  koordinátáit!

c) Ellenőrizze a tartót feszültségcsúcsra, ha a tartó anyagára  $\sigma_{\text{meg}} = 150 \text{ MPa}$  a megengedett feszültség!



**Végeredmények:**

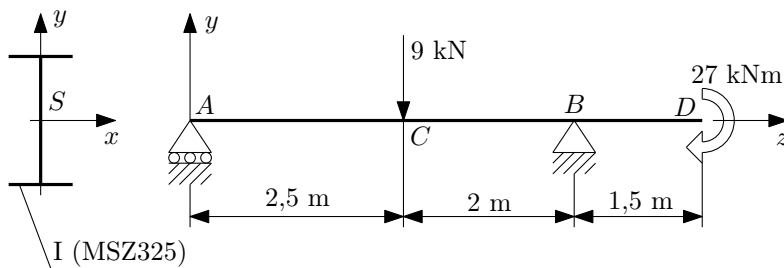
a) Az igénybevételi ábrák alapján a veszélyes keresztmetszet:  $C$



b)  $\sigma_z^{\max} = 164,54 \text{ MPa}; \quad P(0; \pm 30; 4000) \text{ mm}.$

c) Mivel  $\sigma_z^{\max} > \sigma_{\text{meg}} \implies$  nem felel meg.

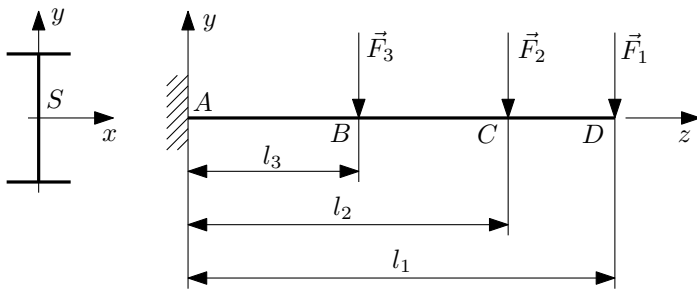
**11.4 (MP. II. 4.63)** Ismeretes a prizmatikus tartó terhelése, keresztmetszetének alakja, anyagának  $\sigma_F$  folyási határa és az előírt  $n_F$  biztonsági tényező.  $\sigma_F = 330 \text{ MPa}; n_F = 2$ . Méretezze a tartót feszültségcsúcsra!



**Végeredmény:**

$K_x^{\text{szüks}} = 163636,36 \text{ mm}^3$  így a választott I tartó: I200.

**11.5 (BS Példatár 5.183)** Ismeretes az ábrán vázolt I tartó és annak terhelése. Méretezze a tartót feszültségcsúcsra!  $\sigma_{\text{meg}} = 120 \text{ MPa}$ ;  $F_1 = 15 \text{ kN}$ ;  $F_2 = 9 \text{ kN}$ ;  $F_3 = 20 \text{ kN}$ ;  $l_1 = 2 \text{ m}$ ;  $l_2 = 1,5 \text{ m}$ ;  $l_3 = 0,8 \text{ m}$ .

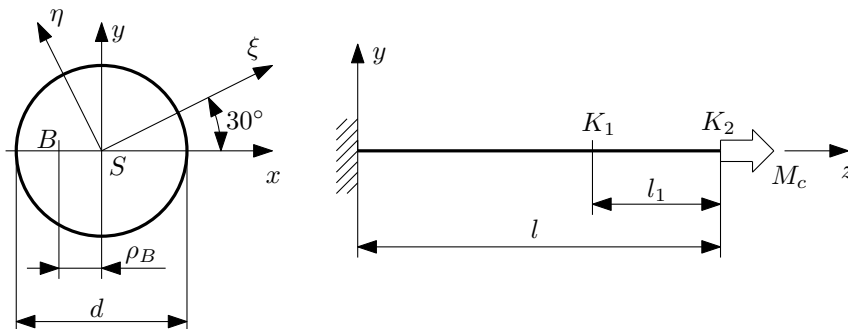


**Végeredmény:**

$K_x^{\text{szüks}} = 495833 \text{ mm}^3$  így a választott I tartó: I280.

## 12. hét: Egyszerű igénybevételek: csavarás

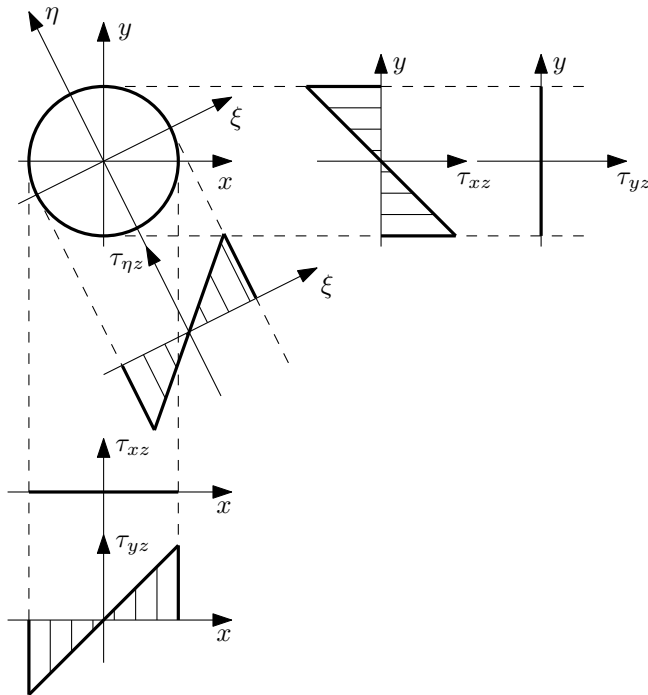
**12.1 (MP. II. 4.79)** A körkeresztmetszetű,  $d$  átmérőjű, egyik végén befalazott  $l$  hosszúságú rudat  $M_c$  csavarónyomaték terheli.  $M_c = 40 \text{ Nm}$ ;  $l = 500 \text{ mm}$ ;  $l_1 = 160 \text{ mm}$ ;  $d = 20 \text{ mm}$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\rho_B = 5 \text{ mm}$ .



- Határozza meg a  $K_1$  keresztmetszetben ható  $\tau_{yz}(x)$ ,  $\tau_{xz}(y)$ , és  $\tau_{\eta z}(\xi)$  csúsztatófeszültség eloszlását az  $x$ ,  $y$  illetve  $\xi$  tengely mentén!
- Határozza meg a  $K_1$  keresztmetszet  $B$  pontjában a  $\underline{\underline{T}}_B$  feszültségi tenzor mátrixát, és szemléltesse azt a  $B$  pont környezetéből kivett (az  $xyz$  koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos élű) elemi kockán!
- Határozza meg az  $\underline{\underline{A}}_B$  alakváltozási tenzor mátrixát a  $B$  pontban, és szemléltesse az elemi triéderen!
- Határozza meg a  $K_1$ ,  $K_2$  keresztmetszetek egymáshoz viszonyított  $\psi_{12}$  szögelfordulását!
- Határozza meg a rúd  $l$  hosszúságú szakaszán felhalmozódott  $U$  belső energia értékét!

## Végeredmények:

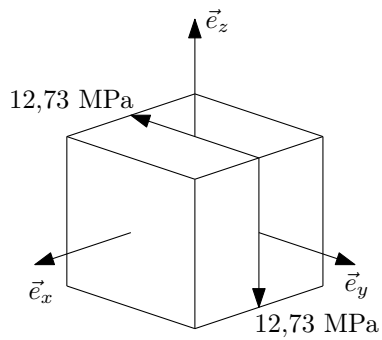
a) a feszültségeloszlások:



$$\tau_{yz}(x) = 2,55x; \quad \tau_{xz}(y) = -2,55y; \quad \tau_{\eta z}(\xi) = 2,55\xi.$$

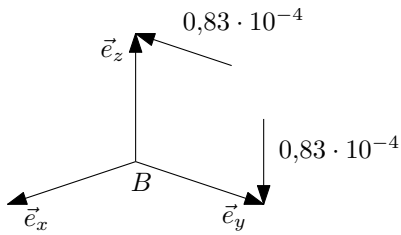
b) 
$$\left[ \underline{T}_{\underline{B}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12,73 \\ 0 & -12,73 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

szemléltetés:



c) 
$$\left[ \underline{A}_{\underline{B}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,83 \\ 0 & -0,83 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

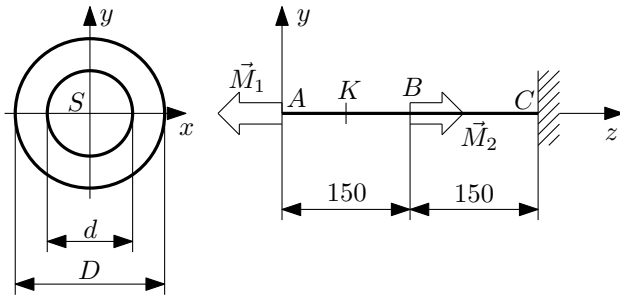
szemléltetés:



d)  $\psi_{12} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,3^\circ$ .

e)  $U = 0,33 \text{ J}$ .

**12.2 (MP. II. 4.80)** Az egyik végén befogott körgyűrű keresztmetszetű prizmatikus rudat  $\vec{M}_1$  és  $\vec{M}_2$  nyomatékú erőpárok terhelik.  $\vec{M}_1 = -M_1 \vec{e}_z$ ;  $\vec{M}_2 = (0,12 \vec{e}_z)$  kNm;  $D = 40$  mm;  $d = 20$  mm; a rúd anyagának csavarásra megengedett csúsztató feszültsége  $\tau_{\text{meg}} = 60$  MPa;  $G = 80$  GPa.

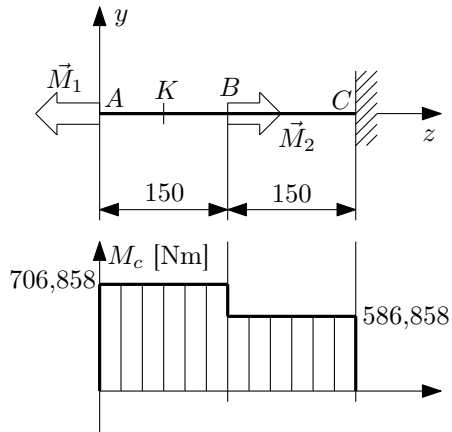


- Mekkora  $M_1$  nyomaték esetén lesz a  $K$  keresztmetszetben a legnagyobb csúsztatófeszültség éppen  $\tau_{\text{meg}}$ ?
- Határozza meg a rúd csavarónyomatéki ábráját a jellemző metszések számszerű fel-tüntetésével, és számolja ki az  $A$  keresztmetszetnek a  $C$  keresztmetszethez viszonyított  $\psi_{AC}$  szögelfordulását!
- Számítsa ki a terhelés hatására a rúdban felhalmozódó  $U$  belső energia értékét!

**Végeredmények:**

a)  $M_1 = 706,858 \text{ Nm}$ .

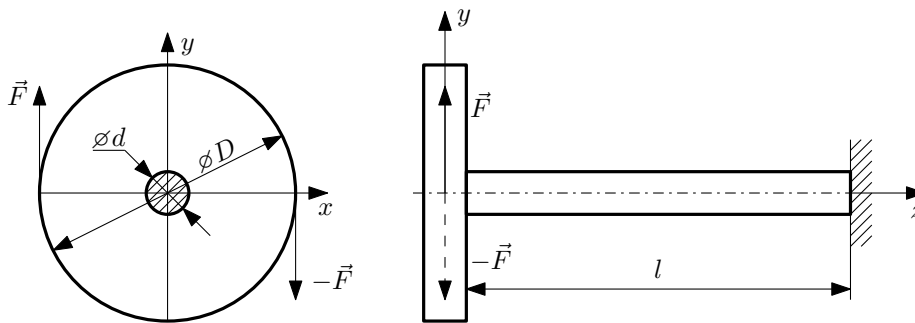
b) Igénybevételi ábra:



$$\psi_{AC} = 0,0102 \text{ rad} = 0,59^\circ.$$

c)  $U = 3,358 \text{ J}$ .

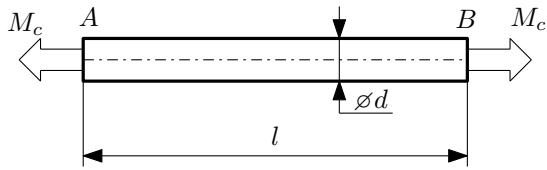
**12.3 (MP. II. 4.81)** A  $d$  átmérőjű rúdhoz mereven kapcsolódó  $D$  átmérőjű tárcsa ke-  
rületén állandó  $\vec{F}$  és  $-\vec{F}$  erőkből álló erőpár működik.  $|\vec{F}| = 5 \text{ kN}$ ;  $D = 0,4 \text{ m}$ ;  $d = 60$   
mm. Ellenőrizze a rudat, ha a rúd anyagára  $\tau_{\text{meg}} = 60 \text{ MPa}$  a csavarásra megengedett  
csúsztatófeszültség!



**Végeredmény:**

$$\tau_{\text{max}} = 47,16 \text{ MPa} < \tau_{\text{meg}} \implies \text{megfelel.}$$

**12.4 (MP. II. 4.86)** Az  $l$  hosszúságú,  $d$  átmérőjű körkeresztmetszetű rudat  $M_c$  csavarónyomaték terheli.  $M_c = 860 \text{ Nm}$ ;  $G = 80 \text{ GPa}$ ;  $l = 0,2 \text{ m}$ .



a) Méretezze a rudat, ha a két szélső ( $A$  és  $B$ ) keresztmetszetek egymáshoz viszonyított szögelfordulásának megengedett értéke  $\phi_{\text{meg}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ !

b) Ellenőrizze a rudat feszültségcsúcsra, ha  $\tau_{\text{meg}} = 60 \text{ MPa}$ !

**Végeredmények:**

a)  $d \geq 57,52 \text{ mm}$ .

b)  $\tau_{\text{max}} = 23,01 \text{ MPa} < \tau_{\text{meg}} \implies$  megfelel.

**12.6 (BS Példatár 5.161)** A  $D = 280 \text{ mm}$  külső átmérőjű acélcsövet  $4,9 \cdot 10^4 \text{ Nm}$  csavarónyomaték veszi igénybe.

a) Mekkora lehet legfeljebb a cső belső átmérője, ha a legnagyobb csavarófeszültség  $32 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  lehet?

b) Mekkora a cső méterenkénti szögelfordulása?

**Végeredmények:**

a)  $d \leq 250,9 \text{ mm}$ .

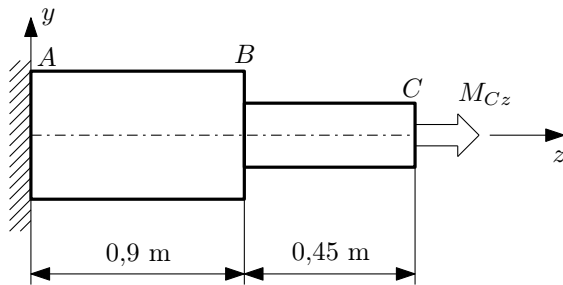
b)  $\psi = 2,79 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,16^\circ$ .

**12.7 (FSz. 125. old. 4.10)** Melegvíz kút fúrásakor a fúrófej a 900 m mélységet érte el. Újraindításkor azt figyelték meg, hogy a 200 mm külső átmérőjű acél fúrócső egy teljes fordulatot végez, mielőtt a fúrófej újra munkához kezdene. Mekkora a fúrócsőben a csavarásból adódó nyírófeszültség maximuma? ( $G_{\text{acél}} = 80 \text{ GPa}$ )

**Végeredmény:**

$\tau_{\text{max}} = 55,85 \text{ MPa}$ .

**12.8 (FSz. 125. old. 4.11)** Az ábrán vázolt rúd  $AB$  szakaszán 36 MPa,  $BC$  szakaszán pedig 90 MPa a megengedett nyírófeszültség. Az  $AB$  szakasznak 92 mm, a  $BC$  szakasznak pedig 70 mm az átmérője. Mekkora lehet a rudat terhelő  $M_{Cz}$  csavarónyomaték maximuma, ha nem vesszük figyelembe a keresztmetszet-változás feszültséggyűjtő hatását?

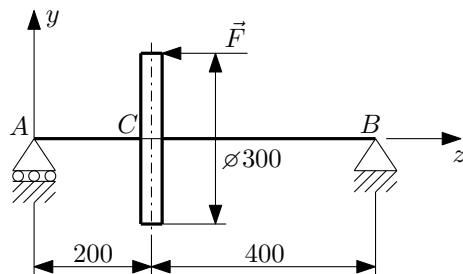


**Végeredmény:**

$$M_{Cz}^{\max} = 5,504 \text{ kNm.}$$

## 13. hét: Összetett igénybevételek

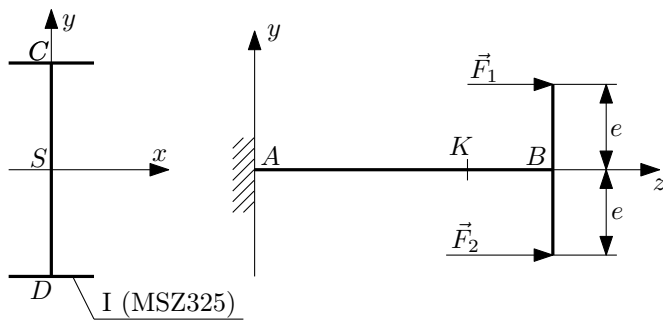
**13.1 (MP. II. 5.6 a)** A kéttámaszú tartónak tekinthető körkeresztmetű tengelyre ékelt tárcsa kerületén tengelyirányú  $\vec{F}$  erő hat.  $\vec{F} = (-5\vec{e}_z)$  kN;  $E = 200$  GPa. Méretezze az  $AB$  tengelyt feszültségcsúcsra, ha a tartó anyagának  $\sigma_{\text{meg}} = 130$  MPa a megengedett feszültsége!



**Végeredmény:**

$$d \geq 33,96 \text{ mm.}$$

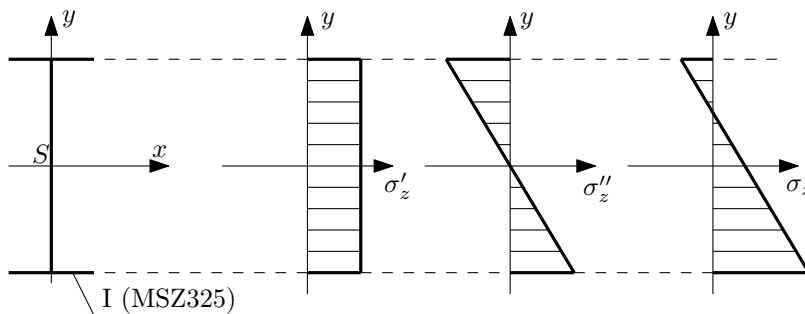
**13.2 (MP. II. 5.9 módosítva)** Ismert az ábrán látható I tartó  $AB$  szakaszának keresztmetszete, melyre  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  erők hatnak.  $|\vec{F}_1| = 80 \text{ kN}$ ;  $|\vec{F}_2| = 120 \text{ kN}$ ;  $e = 250 \text{ mm}$ .



- Határozza meg a  $K$  keresztmetszetben ébredő feszültségek eloszlását az  $y$  tengely mentén!
- Méretezze a tartót, ha a megengedett feszültség  $\sigma_{\text{meg}} = 100 \text{ MPa}$ !
- Határozza meg a  $K$  keresztmetszet  $C$ ,  $S$  és  $D$  pontjában a  $\underline{\underline{T}}_C$ ,  $\underline{\underline{T}}_S$  és  $\underline{\underline{T}}_D$  feszültségi tenzor mátrixát!

**Végeredmények:**

- A feszültségeloszlás:



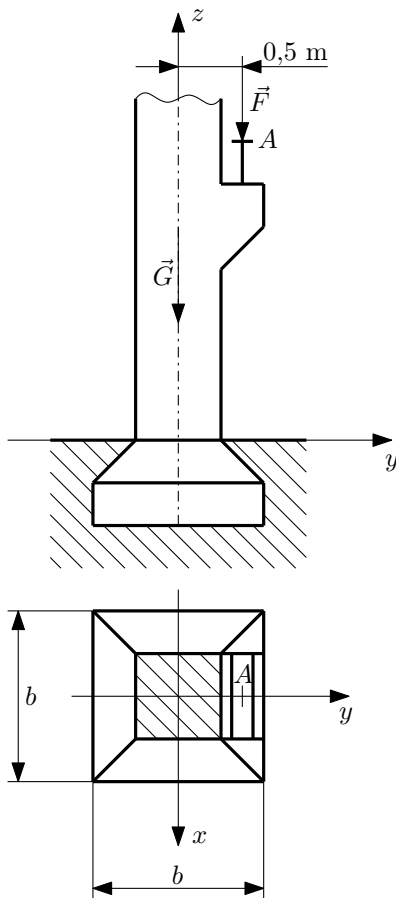
- I220.

$$c) \quad \underline{\underline{T}}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14,66 \end{bmatrix} \text{ MPa}; \quad \underline{\underline{T}}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

$$\underline{\underline{T}}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 86,604 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$



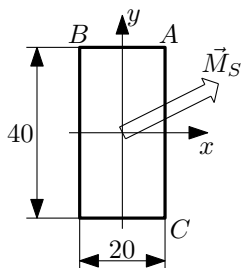
**13.3 (MP. II. 5.23)** A négyzet keresztmetszetű oszlopra – az önsúlyon kívül – külpontosan ható  $\vec{F}$  erő is működik.  $|\vec{G}| = 300$  kN;  $|\vec{F}| = 100$  kN. Mekkora kell az oszlop betonalapjának  $b$  méretét készíteni, hogy az alaplapon húzófeszültség ne ébredjen?



**Végeredmény:**

$$b = 0,75 \text{ m.}$$

**13.4 (MP. II. 5.10)** Téglalap keresztmetszetű prizmatikus rúd  $K$  keresztmetszetének igénybevétele az  $S$  súlypontba redukált  $(\vec{F}; \vec{M}_S)$  eredő vektorkettőssel adott.  $\vec{F} = \vec{0}$ ;  $\vec{M}_S = (150\vec{e}_x + 120\vec{e}_y)$  Nm.

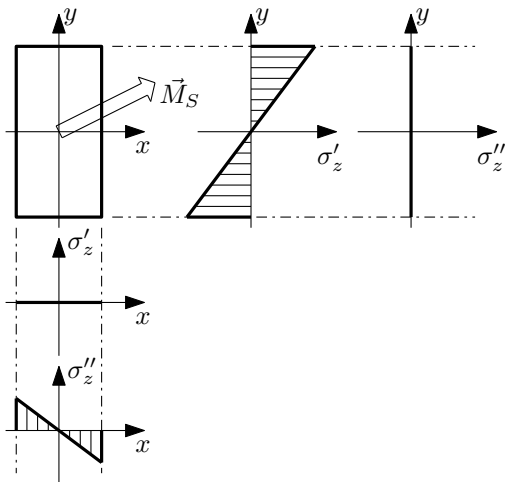


a) Rajzolja meg a feszültségeloszlást az  $x$  és  $y$  tengelyek mentén!

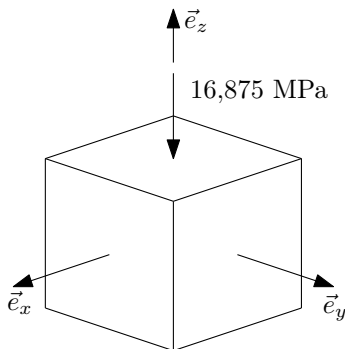
- b) Határozza meg az  $A$  pontban a  $\underline{T}_{\underline{A}}$  feszültségi tenzor mátrixát és szemléltesse azt az  $A$  pont környezetéből kivett ( $xyz$  koordinátatengelyekkel párhuzamos élű) elemi kockán!
- c) Határozza meg a zérusvonal egyenletét, továbbá a zérusvonal és az  $x$  tengely által bezárt  $\varphi$  szög tangensét!
- d) Számítsa ki a keresztmetszet veszélyes pontjainak koordinátáit, és ezekben a pontokban a  $\sigma_{\max}$  maximális feszültséget!

### Végeredmények:

- a) A feszültségeloszlások:



b) 
$$\left[ \underline{T}_{\underline{A}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16,875 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

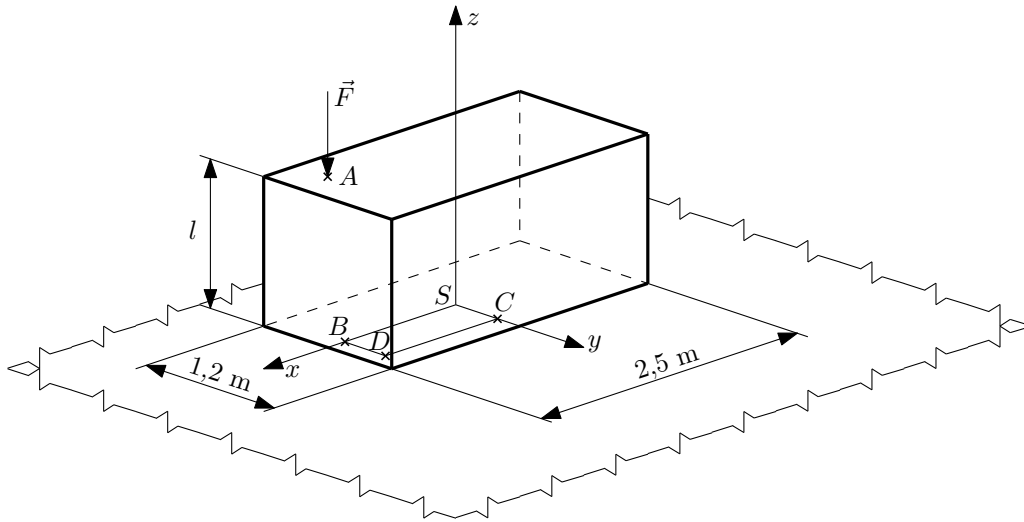


c)  $y = 3,2x \implies \tan \varphi = 3,2.$

- d) A  $B$  és  $C$  pont a veszélyes:  $\vec{r}_B = (-10\vec{e}_x + 20\vec{e}_y) \text{ mm}$ ;  $\vec{r}_C = (10\vec{e}_x - 20\vec{e}_y) \text{ mm}$ ;  
 $\sigma_{\max} = 73,125 \text{ MPa}.$

**13.5 (MP. II. 5.20)** A téglalap keresztmetszetű,  $l$  magasságú,  $\vec{G}$  súlyú oszlopra annak  $A = (0,8; -0,4;l)$  m pontjában  $\vec{F}$  koncentrált erő hat.  $|\vec{F}| = 6$  MN. Határozza meg a test  $K$  ( $z = 0$ ) keresztmetszetében a súlyerő elhanyagolásával

- a) a  $\sigma_z$  normál feszültség értékét az  $S(0; 0; 0)$  m,  $B(1,2; 0; 0)$  m,  $C(0; 0,5; 0)$  m és  $D(1,2; 0,5; 0)$  m pontokban;
- b) a zérusvonal  $y = y(x)$  alakú egyenletét!

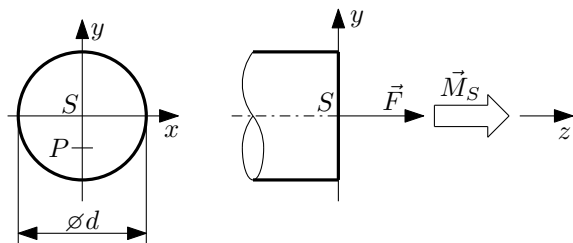


**Végeredmények:**

- a)  $\sigma_z^S = -2$  MPa;  $\sigma_z^B = -5,6864$  MPa;  $\sigma_z^C = 1,3333$  MPa;  $\sigma_z^D = -2,353$  MPa.
- b)  $y = 300 + 0,4608x$ .

## 14. hét: Összetett igénybevételek

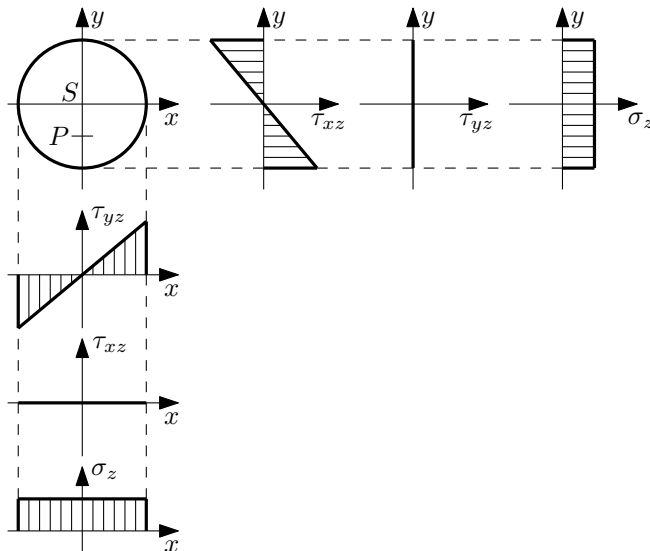
**14.1 (MP. II. 5.28)** Körkeresztmetszetű prizmatikus rúd  $K$  keresztmetszetének igénybevétele az  $S$  súlypontba redukált  $(\vec{F}; \vec{M}_S)$  eredő vektorkettőssel (feszültségi eredőkkel) adott.  $\vec{F} = (50\vec{e}_z)$  kN;  $\vec{M}_S = (5\vec{e}_z)$  kNm;  $d = 80$  mm.



- Állapítsa meg a  $K$  keresztmetszet igénybevételét!
- Határozza meg a  $\sigma_z(x)$  normálfeszültség és a  $\tau_{xy}(x)$ ;  $\tau_{yz}(x)$  csúsztatófeszültségek eloszlásának függvényeit az  $x$  tengely mentén!
- Határozza meg a  $P(0; -20)$  mm pontban a  $\underline{T}_{\underline{P}}$  feszültségi tenzor mátrixának zérustól különböző koordinátáit!
- Állapítsa meg a  $K$  keresztmetszet veszélyes pontjainak koordinátáit!
- Ellenőrizze feszültségcsúcsra a keresztmetszetet a Mohr-féle elmélet alapján, ha a rúd anyagára megengedett feszültség  $\sigma_{\text{meg}} = 120$  MPa!

### Végeredmények:

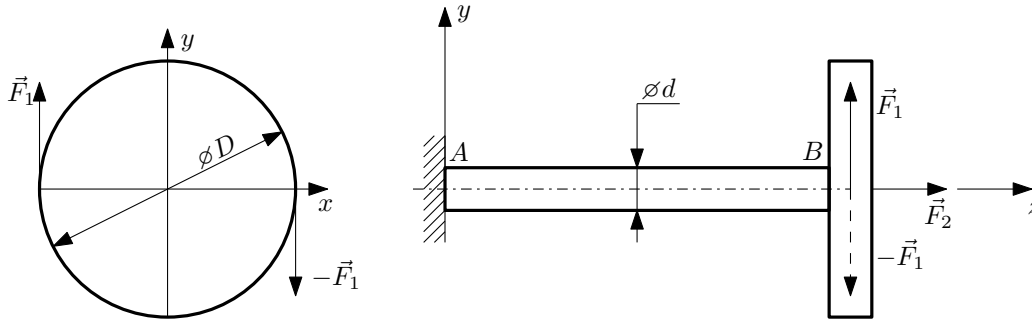
- húzás és csavarás
- a feszültségeloszlások:  $\sigma_z(x) = 9,95$ ;  $\tau_{xy}(x) = 0$ ;  $\tau_{yz}(x) = 1,24x$ .



$$c) \left[ \underline{T}_{\underline{P}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24,8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24,8 & 0 & 9,95 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

- Veszélyes pontok: a kör területén lévő pontok.
- $\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = 99,7 \text{ MPa} \leq \sigma_{\text{meg}} \implies$  megfelel.

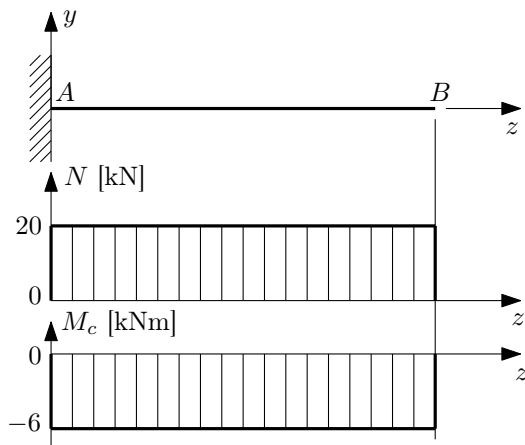
**14.2 (MP. II. 5.31 a, b)** A körkeresztmetszetű,  $d$  átmérőjű, egyik végén befalazott rúd másik végére ékelt  $D$  átmérőjű tárcsa kerületén  $\vec{F}_1$  és  $-\vec{F}_1$  erőkől álló erőpár működik, míg a tengelyében  $\vec{F}_2$  erő hat.  $d = 80$  mm;  $|\vec{F}_1| = 5$  kN;  $|\vec{F}_2| = 20$  kN;  $\sigma_F = 180$  MPa;  $n_F = 1,5$ ;  $D = 1,2$  m.



- a) Rajzolja meg az  $AB$  rúd igénybevételi ábráit!  
 b) Ellenőrizze a  $d$  átmérőjű rudat a Mohr-féle elmélet alapján!

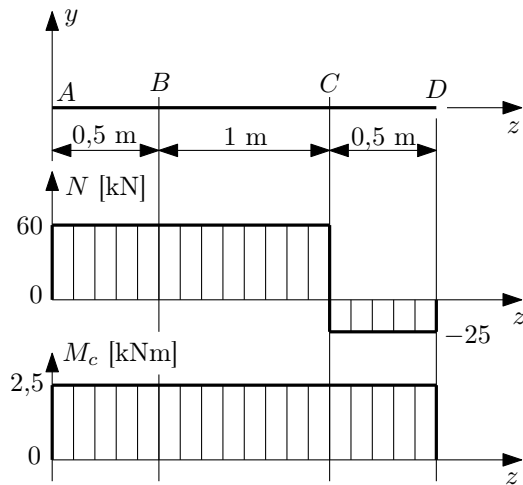
**Végeredmények:**

- a) Az igénybevételi ábrák:



b)  $\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = 119,42 \text{ MPa} \leq \sigma_{\text{meg}} \implies$  megfelel.

14.3 (MP. II. 5.32 a, b, c) Ismeretesek az  $AD$  körkeresztmetszetű prizmatikus rúd zérustól különböző igénybevételi ábrái.  $d = 80$  mm;  $E = 200$  GPa;  $\nu = 0,25$ .

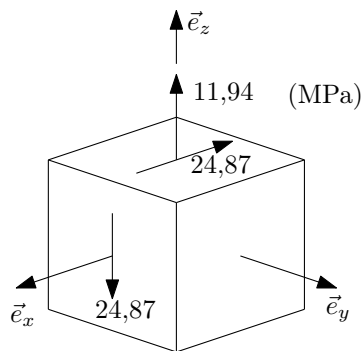


- Határozza meg a rúd veszélyes pontjait!
- Határozza meg a  $C^-$  keresztmetszet  $Q(0; 40)$  mm pontjában a  $\underline{T}_{=Q}$  feszültségi tenzor mátrixát és szemléltesse azt az elmei kockán!
- Rajzolja meg a  $Q$  ponthoz tartozó Mohr-féle feszültségi kördiagramot, és olvassa le arról a főfeszültségeket!

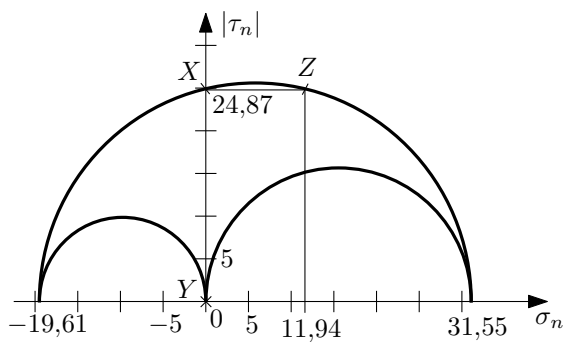
**Végeredmények:**

- A veszélyes keresztmetszetek:  $AC$  szakasz minden keresztmetszete; a veszélyes pontok: a kör keresztmetszet kerületi pontjai.

b) 
$$\left[ \underline{T}_{=Q} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -24,87 \\ 0 & 0 & 0 \\ -24,87 & 0 & 11,94 \end{bmatrix} \text{ MPa; a szemléltetés:}$$



c) A Mohr-körök:



$$\sigma_1 = 31,55 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = 0 \text{ MPa}; \quad \sigma_3 = -19,61 \text{ MPa}.$$

**14.4 (MP. II. 5.36)** A  $D$  külső,  $d$  belső átmérőjű körgyűrű-keresztmetszetű,  $z$  tengelyű,  $l$  hosszúságú prizmatikus rudat  $\vec{M}$  és  $-\vec{M}$  nyomatékú erőpárok terhelik. A rúd anyagára a megengedett feszítés  $\sigma_{\text{meg}} = 80 \text{ MPa}$ .  $\vec{M} = (600\vec{e}_x + 800\vec{e}_z) \text{ Nm}$ .

a) Határozza meg az  $M_{\text{red}}$  redukált nyomatékot a Mohr-féle elmélet szerint!

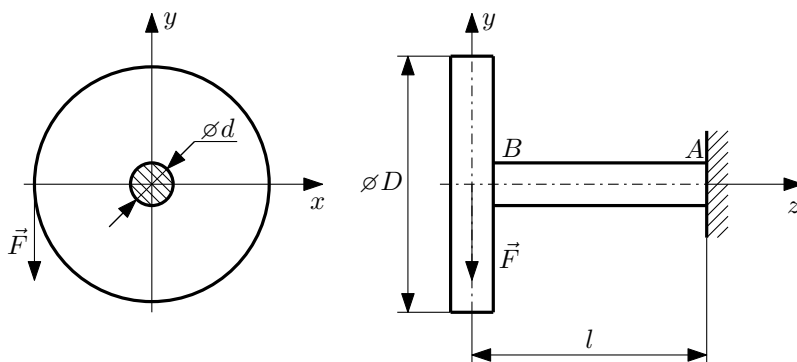
b) Méretezze a rudat feszültségcsúcsra, ha  $\frac{D}{d} = 2$ !

**Végeredmények:**

a)  $M_{\text{red}} = 1000 \text{ Nm}$ .

b)  $d \geq 25,7 \text{ mm} \Rightarrow D \geq 51,4 \text{ mm}$ .

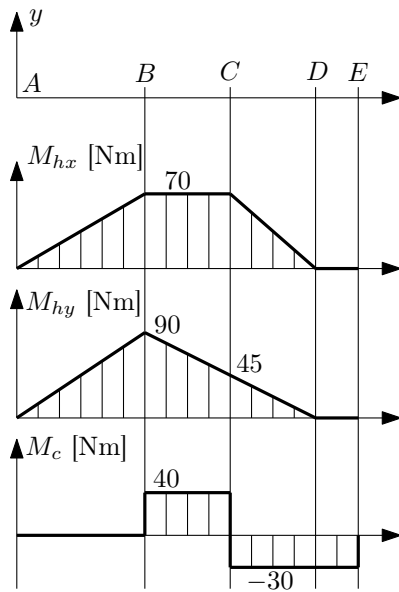
**14.5 (MP. II. 5.37)** Egyik végén befogott körkeresztmetszetű prizmatikus rúd másik végéhez rögzített tárcsa kerületén ismert  $\vec{F}$  erő hat.  $D = 150 \text{ mm}$ ;  $l = 100 \text{ mm}$ ;  $|\vec{F}| = 800 \text{ N}$ . Méretezze a rudat feszültségcsúcsra a Huber-Mises-Hencky-féle elmélet szerint, ha  $\sigma_{\text{meg}} = 125 \text{ MPa}$ .



**Végeredmény:**

$d \geq 19,81 \text{ mm}$ .

**14.6 (MP. II. 5.40)** Ismeretesek az állandó  $d$  átmérőjű, körkeresztmetszetű  $AE$  tengely igénybevételi ábrái.



- Határozza meg a tengely veszélyes keresztmetszetét!
- Méretezze a tengelyt feszültségcsúcsra a Huber-Mises-Hencky-féle elmélet szerint, ha  $\sigma_{\text{meg}} = 180 \text{ MPa}$ !

**Végeredmények:**

- A veszélyes keresztmetszet:  $B$ .
- $d \geq 18,89 \text{ mm}$ .

Eddig tart a félév teljes anyaga. Sok sikert kívánok a vizsgákhoz!