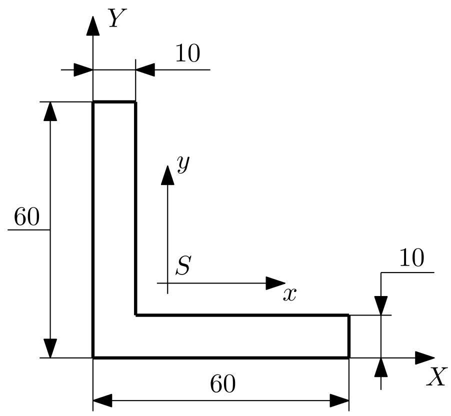
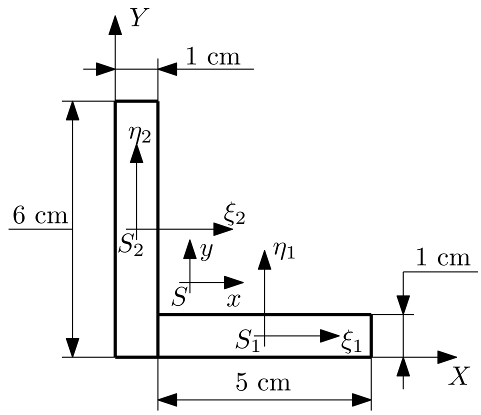
Szilárdságtan mintafeladatok: tehetetlenségi tenzor meghatározása, a tehetetlenségi tenzor főtengelyproblémájának megoldása két mintafeladaton keresztül

Először is oldjuk meg a gyakorlatokon is elhangzott egyik feladatot:
Mechanikai Példatár II. 4.30 Számítsa ki az 1. ábrán látható keresztmetszet súlypontjának $\vec{r}_S$ helyvektorát, valamint az $\underline{\underline{I}}_S$ tenzor mátrixát és a főirányokat!



1. ábra. A rúd keresztmetszete.

Első lépésként bontsuk fel a keresztmetszetet olyan alap síkidomokra, melyek súlypontjainak elhelyezkedését ismerjük. Egy lehetséges felbontást mutat a 2. ábra, ezt használjuk a továbbiakban. Az $\vec{r}_S$ helyvektor koordinátáit a nagy XY-nal jelölt koordináta-rendszerben adjuk meg. A 2. ábrán látható két téglalap súlypontját S_1 és S_2 jelöli, melyekhez két lokális koordináta-rendszert kötünk ($\xi_1\eta_1$ illetve $\xi_2\eta_2$). Az egyszerűbb számítás kedvéért a méreteket átváltottuk cm-be.



2. ábra. A keresztmetszet felbontása két téglalapra.

Ezek alapján az S_1-es és S_2-es súlypontok helyvektorát könnyű felírni XY-ban

$$\vec{r}_{S_1} = (3{,}5\vec{e}_X + 0{,}5\vec{e}_Y)\ \text{cm}, \tag{1}$$

$$\vec{r}_{S_2} = (0{,}5\vec{e}_X + 3\vec{e}_Y)\ \text{cm}. \tag{2}$$

A súlypont meghatározásához szükségünk van még a két téglalap területére

$$A_1 = 5\ \text{cm}^2, \qquad A_2 = 6\ \text{cm}^2. \tag{3}$$

Így pedig a Statikából már jól ismert képlet segítségével a súlypont helyvektora a következő

$$\begin{aligned} \vec{r}_S = \frac{\vec{r}_{S_1}A_1 + \vec{r}_{S_2}A_2}{A_1 + A_2} &= \frac{(3{,}5\vec{e}_X + 0{,}5\vec{e}_Y)\cdot 5 + (0{,}5\vec{e}_X + 3\vec{e}_Y)\cdot 6}{5+6} = \\ = (1{,}863636\vec{e}_X + 1{,}863636\vec{e}_Y)\ \text{cm}. \end{aligned} \tag{4}$$

A tehetetlenségi tenzor meghatározását a következő elv alapján kell elvégezni. Megint felbontjuk a keresztmetszetet olyan alap síkidomokra, melyek súlypontját ismerjük, és ezekhez rögzítünk egy-egy lokális koordináta-rendszert, melyekben könnyen meg tudjuk határozni a tengelyekre számított másodrendű nyomatékokat. Ezért vettük fel a 2. ábrán már az említett két téglalapot, és azok súlypontjához a két $\xi\eta$ koordináta-rendszert. A téglalap keresztmetszet jellemzője, hogy a szimmetria tengelyek egyúttal tehetetlenségi főtengelyek is. A tehetetlenségi főtengelyek koordináta-rendszerében pedig csak az ezen tengelyekre számított másodrendű nyomatékok térnek el nullától, a tengelypárra számított másodrendű nyomatékok zérusok. (A tehetelenségi tenzorban csak a főátlóban találhatóak 0-tól eltérő elemek, a mellékátló elemei mind zérusok.) Válasszuk ki az 1-es téglalapot. A súlypontba felvett koordináta-tengelyek egybeesnek az 1-es téglalap szimmetria tengelyeivel, vagyis a $\xi_1\eta_1$ koordináta-rendszer egyúttal a főtengelyek koordináta-rendszere (ezért is vettük fel így a $\xi_1\eta_1$ koordináta-rendszert). Ezért $\xi_1\eta_1$-ben a tehetelenségi tenzor mátrixa a következőképpen néz ki

$$\left[\underline{\underline{I}}_{S_1}\right] = \begin{bmatrix} I_{\xi_1} & 0 \\ 0 & I_{\eta_1} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

A két koordinátát, vagyis I_{ξ_1}-et és I_{η_1}-et a már jól ismert képlet alapján kell meghatározni:

$$I_{\xi_1} = \frac{ab^3}{12}, \quad I_{\eta_1} = \frac{ba^3}{12}, \tag{6}$$

ahol a a téglalap ξ_1 tengellyel párhozamos oldalának hossza, míg b a téglalap η_1 tengellyel párhozamos odalának a mérete. Ezen képletekbe behelyettesítve ismerjük az 1-es téglalap saját súlypontjához rögzített koordináta-rendszerében a tehetetlenségi nyomatékok értékét. Ezt kell átszámítani a Steiner-tétel segítségével az eredeti keresztmetszet súlypontjába, az oda rögzített xy koordináta rendszerbe. (Mivel a terhelést mindig a rúd súlypontjába redukált vektorkettőssel adjuk meg, vagyis az xy koordináta-rendszerben, és ott is számoljuk a feszültségeket, lásd a második példában.) Ez a tétel pedig így szól a tehetetlenségi tenzorokkal felírva

$$\left[\underline{\underline{I}}^1_S\right] = \begin{bmatrix} I_{\xi_1} & 0 \\ 0 & I_{\eta_1} \end{bmatrix} + A_1 \begin{bmatrix} y^2_{S_1S} & x_{S_1S}y_{S_1S} \\ x_{S_1S}y_{S_1S} & x^2_{S_1S} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ugyanezt a műveletet kell végrehajtani a 2-es téglalappal. Kiszámolni a saját súlypontjához rögzített koordináta-rendszerben a tehetelenségi nyomatékokat ($\xi_2\eta_2$-ben, mely a 2-es téglalap tehetetlenségi főtengelyeivel esik egybe), majd ezeket a Steiner-tétel segítségével átszámolni a közös S súlyponti xy koordináta-rendszerbe. Így

$$\left[\underline{\underline{I}}_S^2\right] = \begin{bmatrix} I_{\xi_2} & 0 \\ 0 & I_{\eta_2} \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} y_{S_2S}^2 & x_{S_2S}y_{S_2S} \\ x_{S_2S}y_{S_2S} & x_{S_2S}^2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

A (7)-es egyenletben szereplő x_{S_1S} és y_{S_1S} az S_1-es súlypontból az S súlypontba mutató helyvektor két koordinátája

$$\vec{r}_{S_1S} = x_{S_1S}\vec{e}_x + y_{S_1S}\vec{e}_y, \tag{9}$$

ehhez hasonlóan a (8)-as egyenletben x_{S_2S} és y_{S_2S} pedig az S_2-es súlypontból az S súlypontba mutató helyvektor két koordinátája

$$\vec{r}_{S_2S} = x_{S_2S}\vec{e}_x + y_{S_2S}\vec{e}_y. \tag{10}$$

Miután pedig felírtuk mind $\underline{\underline{I}}_S^1$-et, mind pedig $\underline{\underline{I}}_S^2$-t a keresett $\underline{\underline{I}}_S$ tenzor a következő

$$\left[\underline{\underline{I}}_S\right] = \left[\underline{\underline{I}}_S^1\right] + \left[\underline{\underline{I}}_S^2\right] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Itt I_x a teljes keresztmetszet x tengelyre számított másodrendű nyomatéka, I_y a teljes keresztmetszet y tengelyre számított másodrendű nyomatéka, míg I_{xy} pedig a teljes keresztmetszet xy tengelypárra számított másodrendű nyomatéka, vagyis ez a 3 mennyiség a súlyponti tehetetlenségi tenzor 3 koordinátája. A 2. ábra alapján, valamint ismerve a súlypontok koordinátáit az (1)-es, (2)-es és (4)-es egyenletekből könnyen meghatározható, hogy

$$\begin{aligned} x_{S_1S} &= -1{,}6363636 \text{ cm}, \\ y_{S_1S} &= 1{,}3636364 \text{ cm}, \\ x_{S_2S} &= 1{,}3636364 \text{ cm}, \\ y_{S_2S} &= -1{,}1363636 \text{ cm}. \end{aligned} \tag{12}$$

Összevetve a (7)-es, (8)-as és a (11)-es egyenleteket a következőképp kell az S súlyponti tehetetlenségi tenzor x tengelyre vett másodrendű nyomatékát kiszámítani

$$I_{x_1} = I_{\xi_1} + A_1 y_{S_1S}^2, \tag{13}$$

$$I_{x_2} = I_{\xi_2} + A_2 y_{S_2S}^2, \tag{14}$$

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = I_{\xi_1} + A_1 y_{S_1S}^2 + I_{\xi_2} + A_2 y_{S_2S}^2. \tag{15}$$

Behelyettesítve az ismert adatokat a (15)-ös egyenletbe tehát kapjuk, hogy

$$I_x = \frac{5 \cdot 1^3}{12} + 1{,}3636364^2 \cdot 5 + \frac{1 \cdot 6^3}{12} + 1{,}1363636^2 \cdot 6 = 35{,}46212121 \text{ cm}^4. \tag{16}$$

Az y tengelyre vett másodrendű nyomaték [(7)-es, (8)-as és a (11)-es alapján]

$$I_{y_1} = I_{\eta_1} + A_1 x_{S_1S}^2, \tag{17}$$

$$I_{y2} = I_{\eta 2} + A_2 x_{S_2S}^2, \tag{18}$$

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = I_{\eta_1} + A_1 x_{S_1S}^2 + I_{\eta_2} + A_2 x_{S_2S}^2. \tag{19}$$

A megadott adatokat behelyettesítjük a (19)-es egyenletbe

$$I_y = \frac{1 \cdot 5^3}{12} + 1{,}6363636^2 \cdot 5 + \frac{6 \cdot 1^3}{12} + 1{,}3636364^2 \cdot 6 = 35{,}46212121 \text{ cm}^4. \tag{20}$$

Végül az xy tengelypárra számított másodrendű nyomaték [(7)-es, (8)-as és a (11)-es alapján]

$$I_{xy_1} = 0 + x_{S_1S} y_{S_1S} A_1, \tag{21}$$

$$I_{xy_2} = 0 + x_{S_2S} y_{S_2S} A_2, \tag{22}$$

$$I_{xy} = I_{xy_1} + I_{xy_2} = x_{S_1S} y_{S_1S} A_1 + x_{S_2S} y_{S_2S} A_2. \tag{23}$$

Az ismert adatokat előjelhelyesen behelyettesítve a (23)-as egyenletbe kapjuk, hogy

$$I_{xy} = (-1{,}6363636) \cdot 1{,}3636364 \cdot 5 + 1{,}3636364 \cdot (-1{,}1363636) \cdot 6 = -20{,}45454546 \text{ cm}^4. \tag{24}$$

Vagyis a teljes keresztmetszet $\underline{\underline{I}}_S$ tenzorának mátrixa az xy koordináta-rendszerben

$$\left[\underline{\underline{I}}_S\right] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35{,}46212121 & 20{,}45454546 \\ 20{,}45454546 & 35{,}46212121 \end{bmatrix} \text{cm}^4. \tag{25}$$

Mivel a mellékátló elemei nem zérusok, ebből következik, hogy az S súlypontba elhelyezett xy koordináta-rendszer nem a főtengelyek koordináta-rendszere a teljes keresztmetszetre nézve. A feladatunk a teljes keresztmetszet főtengelyeinek és fő másodrendű nyomatékainak a meghatározása. Ez az ún. sajátérték-probléma megoldásával érhető el. A probléma matematikai felírása a következő

$$\left[\underline{\underline{I}}_S - \lambda \underline{\underline{1}}\right] \cdot \vec{n} = \vec{0}. \tag{26}$$

Ha találhatóak olyan λ értékek és $\vec{n}$ vektorok, melyekre a (26)-os egyenletrendszer teljesül, akkor ezeket a λ értékeket főértékéknek, vagy sajátértékeknek nevezzük, a hozzájuk tartozó $\vec{n}$ vektorok pedig az ún. főirányok, vagy sajátvektorok. A főirányok meghatározásához abból a tételből indulunk ki, hogy a (26)-os egyenletrendszer triviálistól eltérő megoldásait keressük, mely azt jelenti, hogy az együttható mátrix determinánsa zérus kell legyen.

$$\det \left[\underline{\underline{I}}_S - \lambda \underline{\underline{1}}\right] = 0. \tag{27}$$

Először is írjuk fel az együttható mátrixot

$$\left[\underline{\underline{I}}_S - \lambda \underline{\underline{1}}\right] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x - \lambda & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - \lambda \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Behelyettesítve a (25)-ös eredményeit a (28)-asba, majd a (27)-esbe, kifejtve a determinánst egy λ-ra nézve másodfokú egyenlethez jutunk

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 35{,}46212121 - \lambda & 20{,}45454546 \\ 20{,}45454546 & 35{,}46212121 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (35{,}46212121 - \lambda)(35{,}46212121 - \lambda) - 20{,}45454546^2 = \\ &= \lambda^2 - 70{,}9242424\lambda + 839{,}1736111 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Ennek az egyenletnek a gyökei

$$\lambda_1 = 55{,}9166667, \quad \lambda_2 = 15{,}0075758, \tag{30}$$

mely értékek egyúttal a keresztmetszet fő másodrendű nyomatékai. A két gyök közül megállapodás szerint a nagyobb lesz az 1-es főtengelyhez tartozó érték, míg a kisebb a 2-eshez tartozó. A továbbiakban az 1-es főirányt ξ-vel, a 2-es főirányt pedig η-val fogjuk jelölni. Ennek megfelelően

$$I_1 = I_\xi = 55{,}9166667\ \mathrm{cm}^4, \quad I_2 = I_\eta = 15{,}0075758\ \mathrm{cm}^4. \tag{31}$$

Zárójelben jegyezzük meg, hogy ugyanennek a keresztmetszetnek tehát az $\underline{\underline{I}}_S$ tenzora a $\xi\eta$ főtengelyek koordinátarendszerében

$$\left[\underline{\underline{I}}_S\right] = \begin{bmatrix} I_\xi & 0 \\ 0 & I_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55{,}9166667 & 0 \\ 0 & 15{,}0075758 \end{bmatrix} \mathrm{cm}^4. \tag{32}$$

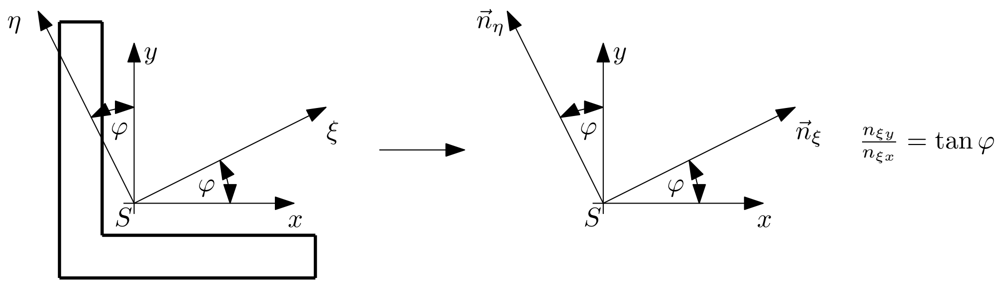
Most már ismerjük a fő másodrendű nyomatékokat, a következő lépés a hozzájuk tartozó főtengelyek meghatározása. Ehhez nincs más dolgunk, mint visszahelyettesíteni a ξ tengelyhez tartozó főértéket a (26)-os egyenletbe, mellyel a ξ irányvektorát, vagyis az $\vec{n}_\xi$ irányt kapjuk meg

$$\left[\underline{\underline{I}}_S - I_\xi \underline{\underline{1}}\right] \cdot \vec{n}_\xi = \vec{0}. \tag{33}$$

Ez a következő egyenletrendszert jelenti

$$\begin{bmatrix} I_x - I_\xi & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{\xi x} \\ n_{\xi y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

A 3. ábra szemlélteti, hogy hogyan keressük a főirányokat (a ξ tengely és az x tengely szögét).



3. ábra. A főirányok felvétele.

Ha behelyettesítjük az ismert értékeket a (34)-es egyenletrendszerbe, kapjuk

$$\begin{bmatrix} -20{,}45454546 & 20{,}45454546 \\ 20{,}45454546 & -20{,}45454546 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{\xi x} \\ n_{\xi y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Ezt kifejtve

$$\left. \begin{aligned} -20{,}45454546 n_{\xi x} + 20{,}45454546 n_{\xi y} = 0 \\ 20{,}45454546 n_{\xi x} - 20{,}45454546 n_{\xi y} = 0 \end{aligned} \right\}. \tag{36}$$

Így kaptunk két egyenletet, melyek azonban nem függetlenek egymástól, így az $\vec{n}_\xi$ koordinátáinak konkrét értékét nem tudjuk kiszámítani, azonban az egyik egyenletet felhasználva a vektor x tengellyel bezárt szögét meg tudjuk határozni. Átrendezve az első egyenletet kapjuk

$$\frac{n_{\xi y}}{n_{\xi x}} = \frac{20{,}45454546}{20{,}45454546} = 1 = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 45°. \tag{37}$$

Ez alapján a 3-as ábrán már tudjuk a φ szöget, be tudjuk rajzolni a helyes főirányokat. Megjegyezzük, hogy az $\vec{n}_\xi$ vektor két koordinátájának hányadosa pozitív érték lett, ez pedig két esetben lehetséges. Vagy mindkét koordináta pozitív (ezt ábrázoltuk a 3. ábrán), vagy mindkét koordináta negatív, vagyis az ábrázolt vektort el kell forgatni 180°-kal. Mindkét megoldás helyes, ezért az egyszerűség kedvéért a pozitív koordinátákat javasoljuk. További megjegyzés, hogy az η irány merőleges a ξ-re, ahogy a 3. ábra is mutatja, így további számításokra nincs szükség az $\vec{n}_\eta$ vektor meghatározására, mert a ξ és η tengelyek merőlegesek egymásra és az xy koordináta-rendszerhez hasonlóan jobbsodrású koordináta-rendszert kell alkotniuk, így $\vec{n}_\xi$ ismeretében már egyértelműen felvehető $\vec{n}_\eta$ is. Ettől függetlenül az $\vec{n}_\eta$ irányvektor koordinátáinak hányadosa természetesen meghatározható, ha a sajátérték feladat (26)-os egyenletébe I_η értékét helyettesítjük vissza, ekkor adódik, hogy

$$\left[\underline{\underline{I}}_S - I_\eta \underline{\underline{1}}\right] \cdot \vec{n}_\eta = \begin{bmatrix} I_x - I_\eta & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{\eta x} \\ n_{\eta y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

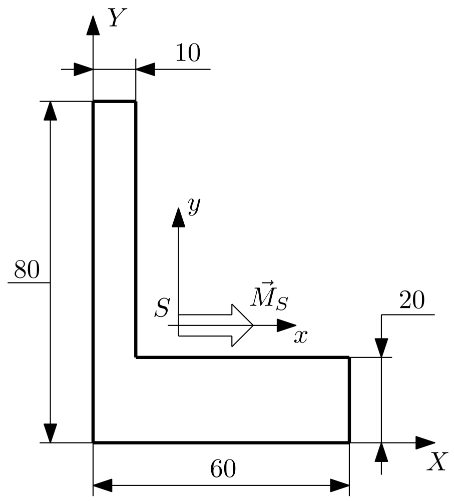
Megoldva ezt az egyenletrendszert a 3. ábrán látható $\vec{n}_\eta$ vektort fogjuk kapni. Ha meg akarjuk határozni az $\vec{n}_\xi$ vektor koordinátáinak konkrét értékét, akkor szükségünk van még egy egyenletre a (37)-es egyenleten kívül. Ehhez feltesszük, hogy az $\vec{n}_\xi$ vektor egységvektor, vagyis a hossza egységnyi, mely a koordinátákkal felírva a következő egyenletet jelenti

$$\sqrt{n_{\xi x}^2 + n_{\xi y}^2} = 1. \tag{39}$$

Ez az egyenlet a (37)-essel együtt két egyenletből álló két ismeretlenes egyenletrendszert ad, melyek függetlenek egymástól, ebből a konkrét koordináták értéke is meghatározható. Önellenőrzési lehetőség, hogy tudjuk, a szimmetriatengelyek egyúttal tehetetlenségi főtengelyek is. Az 1-es ábrát szemügyre véve láthatjuk, hogy a keresztmetszetnek van egy szimmetriatengelye, mely az x tengellyel 45°-os szöget bezáró, súlyponton áthaladó egyenes. Épp ezt kaptuk a számításaink alapján is ξ tengelyként.

Most nézzünk meg egy másik példát, másik keresztmetszettel.

Feladat: Adott a 4. ábrán látható rúdkeresztmetszet, melynek méretei ismertek. Erre a rúdra olyan terhelés hat, melynek súlypontba redukált vektorkettőse: $\vec{F}_S = \vec{0}$; $\vec{M}_S = 2{,}4\vec{e}_x$ kNm. A rúd anyagának folyáshatára $\sigma_{\mathrm{F}} = 300$ MPa, és a biztonsági tényező értéke $n_{\mathrm{F}} = 2$. Ellenőrizze a rudat feszültségcsúcsra!

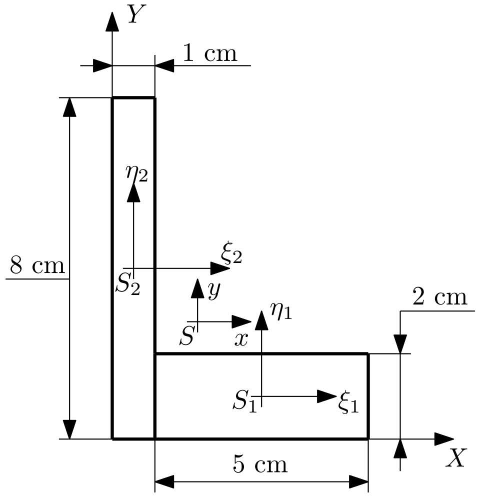


4. ábra. A rúd keresztmetszete és terhelése.

Első ránézésre azt hihetnénk, hogy egy egyszerű egyenes hajlítási feladatról van szó. Igazunk lenne abban az esetben, ha tudnánk, hogy az x és y tengelyek tehetetlenségi főtengelyek. Ezt azonban ránézésre nem tudjuk megállapítani, sőt, mivel egyik tengely sem szimmetriatengely, inkább az a sejtésünk, hogy az x és y tengelyektől eltérő lesz a főtengelyek koordináta-rendszere. Vagyis jó eséllyel ez egy ferde hajlítási feladat. Ahhoz, hogy meghatározzuk a veszélyes pontban/pontokban ébredő maximális feszültséget, ismernünk kell a tehetetlenségi főtengelyeket, mert hajlítás esetén a σ_z feszültség számítására szolgáló tanult összefüggés csak és kizárólag főtengelyek koordináta-rendszerében alkalmazható. (Az általános képletet is lehet alkalmazni, ám az egy rendkívül bonyolult képlet, és ahhoz is meg kell határozni az x tengelyre, az y tengelyre és az xy tengelypárra számított másodrendű nyomatékokat.) Így a feladatot ugyanúgy kezdjük, mint az előző feladat megoldását. Meghatározzuk a keresztmetszet súlypontjának $\vec{r}_S$ helyvektorát az XY koordináta-rendszerben, majd ez alapján kiszámítjuk az $\underline{\underline{I}}_S$ tehetetlenségi tenzor mátrixát, majd pedig a fő tehetelenségi nyomatékokat és főtengelyeket. Ehhez ismét fel kell bontani a keresztmetszetet olyan alap síkidomokra, melyek súlypontját meg tudjuk mondani. Egy ilyen lehetséges felbontást szemléltet a 5. ábra. Jól látható az ábrán, hogy most is két téglalapra fel lehet bontani a keresztmetszetet, melyek súlypontjait is bejelöltük (S_1 és S_2), melyekhez a tehetetlenségi tenzor koordinátáinak meghatározásához szükséges újabb két koordináta-rendszert is rögzítettünk ($\xi_1\eta_1$ illetve $\xi_2\eta_2$). Először is határozzuk meg a keresztmetszet súlypontját. Ugyanazt kell tennünk, mint az előző feladatban. Felvesszük először a két téglalap súlypontjának helyvektorát, illetve a két téglalap területét. Ismét az egyszerűség kedvéért cm-re váltottuk át a távolságokat.

$$\vec{r}_{S_1} = (3{,}5\vec{e}_X + 1\vec{e}_Y)\ \text{cm}, \tag{40}$$

$$\vec{r}_{S_2} = (0{,}5\vec{e}_X + 4\vec{e}_Y)\ \text{cm}, \tag{41}$$



5. ábra. A keresztmetszet felbontása.

$$A_1 = 10 \text{ cm}^2, \qquad A_2 = 8 \text{ cm}^2. \tag{42}$$

Majd pedig a jól ismert képlettel [mint a (4)-es egyenletnél is] kiszámítjuk a súlypontot

$$\begin{aligned}\vec{r}_S &= \frac{\vec{r}_{S_1}A_1 + \vec{r}_{S_2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(3{,}5\vec{e}_X + 1\vec{e}_Y)\cdot 10 + (0{,}5\vec{e}_X + 4\vec{e}_Y)\cdot 8}{10+8} = \\ &= (2{,}1666667\vec{e}_X + 2{,}3333333\vec{e}_Y) \text{ cm}.\end{aligned} \tag{43}$$

Most pedig határozzuk meg a tehetetlenségi tenzort. Ehhez megint szükségünk van a súlypontok előjeles távolságára [a (9)-es és (10)-es egyenletben szereplő helyvektorok koordinátáira]. Az 5. ábra és $\vec{r}_S$ alapján tehát

$$\begin{aligned} x_{S_1S} &= -1{,}3333333 \text{ cm}, \\ y_{S_1S} &= 1{,}3333333 \text{ cm}, \\ x_{S_2S} &= 1{,}666667 \text{ cm}, \\ y_{S_2S} &= -1{,}6666667 \text{ cm}. \end{aligned} \tag{44}$$

Ezekután minden adatunk ismert a tehetetlenségi tenzor koordinátáinak meghatározásához. Használjuk megint a (15)-ös egyenletet az x tengelyre számított másodrendű nyomaték meghatározásához

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = I_{\xi_1} + A_1 y_{S_1S}^2 + I_{\xi_2} + A_2 y_{S_2S}^2, \tag{45}$$

így

$$I_x = \frac{5\cdot 2^3}{12} + 1{,}3333333^2 \cdot 10 + \frac{1\cdot 8^3}{12} + 1{,}6666667^2 \cdot 8 = 86 \text{ cm}^4. \tag{46}$$

Most alkalmazzuk megint a (19)-es egyenletet a y tengelyre számított másodrendű nyomatékhoz

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = I_{\eta_1} + A_1 x_{S_1S}^2 + I_{\eta_2} + A_2 x_{S_2S}^2, \tag{47}$$

vagyis

$$I_y = \frac{2\cdot 5^3}{12} + 1{,}3333333^2 \cdot 10 + \frac{8\cdot 1^3}{12} + 1{,}6666667^2 \cdot 8 = 61{,}5 \text{ cm}^4. \tag{48}$$

Végül ismét elővesszük a (23)-as egyenletet az xy tengelypárra számított másodrendű nyomatékhoz

$$I_{xy} = I_{xy_1} + I_{xy_2} = x_{S_1S} y_{S_1S} A_1 + x_{S_2S} y_{S_2S} A_2, \tag{49}$$

ez alapján pedig

$$I_{xy} = (-1{,}3333333) \cdot 1{,}3333333 \cdot 10 + 1{,}6666667 \cdot (-1{,}6666667) \cdot 8 = -40 \text{ cm}^4. \tag{50}$$

Mivel ez az érték nem lett nulla, biztos, hogy az xy koordináta-rendszer nem a főtengelyek koordináta-rendszere. Így tehát a tehetetlenségi tenzor mátrixa

$$\left[\underline{\underline{I}}_S\right] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86 & 40 \\ 40 & 61{,}5 \end{bmatrix} \text{cm}^4. \tag{51}$$

A fő másodrendű nyomatékok és főtengelyek meghatározásához ismét a (26)-os sajátérték feladatot oldjuk meg

$$\left[\underline{\underline{I}}_S - \lambda \underline{\underline{1}}\right] \cdot \vec{n} = \vec{0}. \tag{52}$$

A fő másodrendű nyomatékok meghatározásához az együttható mátrix determinánsát zérussal tesszük egyenlővé

$$\det \left[\underline{\underline{I}}_S - \lambda \underline{\underline{1}}\right] = 0, \tag{53}$$

vagyis

$$\begin{vmatrix} 86-\lambda & 40 \\ 40 & 61{,}5-\lambda \end{vmatrix} = (86-\lambda)(61{,}5-\lambda) - 40^2 = \lambda^2 - 147{,}5\lambda + 3689 = 0. \tag{54}$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei megadják a fő tehetetlenségi nyomatékokat, melyek közül a nagyobb lesz az I_ξ, a kisebb pedig az I_η fő másodrendű nyomaték

$$\lambda_1 = I_\xi = 115{,}5837483 \text{ cm}^4, \quad \lambda_2 = I_\eta = 31{,}9162517 \text{ cm}^4. \tag{55}$$

Ezek az értékek szükségesek lesznek később a maximális feszültség meghatározásánál. A főtengelyek koordináta-rendszerében a tehetetlenségi tenzor most

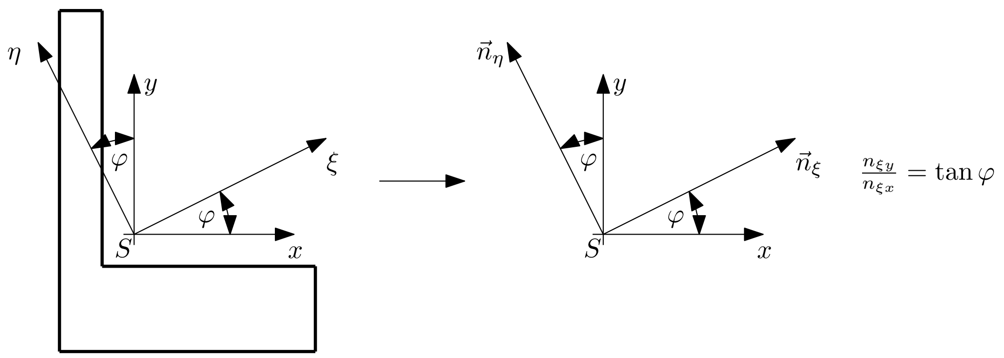
$$\left[\underline{\underline{I}}_S\right] = \begin{bmatrix} I_\xi & 0 \\ 0 & I_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115{,}5837483 & 0 \\ 0 & 31{,}9162517 \end{bmatrix} \text{cm}^4. \tag{56}$$

Most már csak a főtengelyek meghatározása maradt. Ismét arra vagyunk kíváncsiak, mekkora φ szöget zár be az x tengellyel a ξ főtengely, ahogy az a 6. ábrán is látható. Ehhez megint elővesszük a (34)-es egyenletrendszert

$$\begin{bmatrix} I_x - I_\xi & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{\xi x} \\ n_{\xi y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Ebből pedig kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 86 - 115{,}5837483 & 40 \\ 40 & 61{,}5 - 115{,}5837483 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{\xi x} \\ n_{\xi y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{58}$$



6. ábra. A főtengelyek feltételezett iránya.

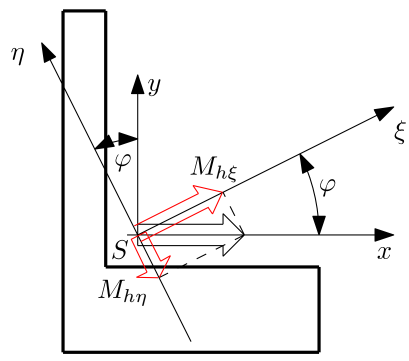
Ez a következő két egymástól nem független egyenletet jelenti

$$\left.\begin{array}{r} -29{,}5837483 n_{\xi x} + 40 n_{\xi y} = 0 \\ 40 n_{\xi x} - 54{,}0837483 n_{\xi y} = 0 \end{array}\right\}. \tag{59}$$

Az első egyenlet alapján pedig meghatározható a φ szög (a második egyenletből is ugyanezt a hányadost kapnánk)

$$\frac{n_{\xi y}}{n_{\xi x}} = \frac{29{,}5837483}{40} = 0.7395937 = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 36{,}49°. \tag{60}$$

Megint pozitív lett a szög tangense, vagyis az $\vec{n}_\xi$ vektor két koordinátája megegyező előjelű, ebből pedig azt választjuk, amikor mindkettő pozitív, így a főtengelyek koordináta-rendszere hasonlóan néz ki, mint ahogy a 6. ábrán is felvettük. Most, hogy ismerjük a főirányokat és a fő másodrendű nyomatékokat, már meg tudjuk oldani a feladatot ferdehajlításként. Első lépés, hogy felbontjuk a megadott $\vec{M}_S$ vektort két komponensre a $\xi\eta$ koordináta-rendszerben (7. ábrán pirossal jelölt nyomatékok).



7. ábra. A nyomaték felbontása.

A kiszámított φ szög segítségével felírva a nyomaték

$$\vec{M}_S = (2{,}4 \cdot \cos 36{,}49° \vec{e}_\xi - 2{,}4 \cdot \sin 36{,}49° \vec{e}_\eta) = (1{,}93 \vec{e}_\xi - 1{,}43 \vec{e}_\eta)\ \text{kNm}. \tag{61}$$

A ferde hajlításos feladatok esetén az igénybevétel felírható két egyenes hajlítás összegeként, így egy ξ és egy η tengely körüli egyenes hajlításról van szó. Az igénybevételek a tanult előjelszabály és a (61)-es nyomaték alapján tehát

$$M_{h\xi} = 1{,}93 \cdot 10^6 \text{ Nmm}, \quad M_{h\eta} = 1{,}43 \cdot 10^6 \text{ Nmm}. \tag{62}$$

Vagyis mindkét tengely körül pozitív előjelű a hajlítás, és a számolás könnyítése érdekében átváltottuk a nyomatékok mértékegységét is. Ismerve a hajlítónyomatékokat, a fő tehetetlenségi nyomatékokat [(55)-ös egyenlet], felírjuk a keresztmetszetben ébredő feszültséget

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{M_{h\xi}}{I_\xi}\eta + \frac{M_{h\eta}}{I_\eta}\xi = \frac{1{,}93 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{115{,}5837483 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}\eta + \frac{1{,}43 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{31{,}9162517 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}\xi = \\ &= 1{,}67\eta + 4{,}48\xi.\end{aligned} \tag{63}$$

Ebbe a függvénybe a keresztmetszet bármely pontjának ξ és η koordinátáját beírjuk, megkapjuk abban a pontban a feszültség értékét. Ez az a képlet, mely csak a főtengelyek koordináta-rendszerében érvényes. Ezért kellett meghatározni a fő tehetetlenségi nyomatékokat és a főtengelyeket. A feladatunk ellenőrizni, hogy a megadott terhelést elviseli-e károsodás nélkül (folyás nélkül) a szerkezet. Ehhez meg kell határozni a maximális feszültség értékét, amely a veszélyes pontban/pontokban ébred. Vagyis tudnunk kellene, hol található(ak) a veszélyes pont(ok). Hajlítás esetén a veszélyes pontok a zérusvonaltól legtávolabb eső pontok. Vagyis meg kell határoznunk a zérusvonal egyenletét. A zérusvonal az a vonal, mely mentén nem ébred semmilyen feszültség a keresztmetszetben. Azaz a (63)-as egyenletet 0-val tesszük egyenlővé

$$0 = 1{,}67\eta + 4{,}48\xi \quad \Rightarrow \quad \eta = -\frac{4{,}48}{1{,}67}\xi = -2{,}68\xi. \tag{64}$$

Megvan a zérusvonal egyenlete, ahol ξ együtthatója az egyenes meredeksége, azaz az egyenes ξ tengellyel bezárt α szögének a tangense. Ez a szög pedig

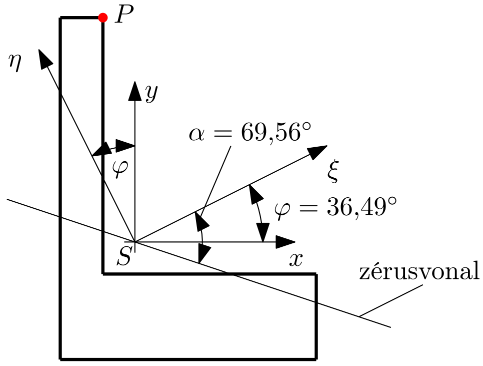
$$\tan\alpha = -2{,}68 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -69{,}56°. \tag{65}$$

A 8. ábrán bejelöltük a zérusvonalat, és ez alapján a tőle legtávolabb eső pontot is (P), mely a veszélyes pont lesz. Ennek a veszélyes pontnak a koordinátáit könnyen le tudjuk olvasni az xy koordináta rendszerben ismerve a súlypont helyét. Ez alapján a súlypontból a P pontba mutató helyvektor

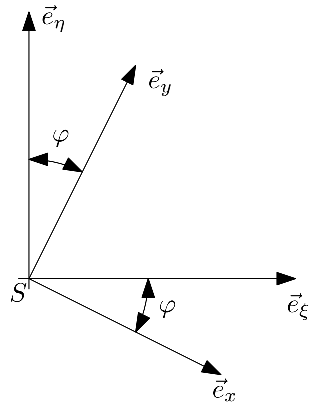
$$\vec{r}_P = (-1{,}1666667\vec{e}_x + 5{,}6666667\vec{e}_y) \text{ cm}. \tag{66}$$

Csakhogy nekünk ennek a pontnak a ξ és η koordinátája kellene, hogy be tudjuk helyettesíteni a feszültség képletébe. Vagyis át kell transzformálni ezt a vektort a $\xi\eta$ koordináta-rendszerbe. Ehhez meg kell adni az $\vec{e}_x$ és $\vec{e}_y$ vektorokat is a $\xi\eta$ koordináta rendszerben, melyhez a 9. ábra nyújt segítséget (most a $\xi\eta$ koordináta-rendszerből nézzük az $\vec{e}_x$ és $\vec{e}_y$ vektorokat, ezért forgattuk el a nézetet). Ez alapján tehát

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \cos 36{,}49°\vec{e}_\xi - \sin 36{,}49°\vec{e}_\eta = 0{,}804\vec{e}_\xi - 0{,}595\vec{e}_\eta, \\ \vec{e}_y &= \sin 36{,}49°\vec{e}_\xi + \cos 36{,}49°\vec{e}_\eta = 0{,}595\vec{e}_\xi + 0{,}804\vec{e}_\eta.\end{aligned} \tag{67}$$



8. ábra. A zérusvonal és a veszélyes pont.



9. ábra. Az $\vec{e}_x$ és $\vec{e}_y$ vektorok felvétele a $\xi\eta$ koordináta-rendszerben.

Ezt a két vektort kell visszahelyettesíteni a (66)-os egyenletbe, és ezzel meg is van a P pont a $\xi\eta$ koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned} \vec{r}_P &= (-1{,}166667\,(0{,}804\vec{e}_\xi - 0{,}595\vec{e}_\eta) + 5{,}6666667\,(0{,}595\vec{e}_\xi + 0{,}804\vec{e}_\eta)) = \\ &= (2{,}03\vec{e}_\xi + 5{,}25\vec{e}_\eta)\ \text{cm}. \end{aligned} \tag{68}$$

Ezt behelyettesítve a (63)-as egyenletbe mm-ben megkapjuk, mekkora a feszültség a P pontban, vagyis mekkora a maximális feszültség

$$\sigma_z^{\max} = 1{,}67 \cdot 52{,}5 + 4{,}48 \cdot 20{,}3 = 178{,}62\ \text{MPa}. \tag{69}$$

A feladat a folyási határt és a biztonsági tényezőt adta még meg, melyből számítunk egy megengedett feszültséget

$$\sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_\text{F}}{n_\text{F}} = \frac{300\ \text{MPa}}{2} = 150\ \text{MPa}. \tag{70}$$

Mivel a megengedett feszültség kisebb, mint a maximális, ebből az következik hogy a keresztmetszet nem felel meg.