Mechanika

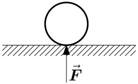
II. előadás

2019. március 4.

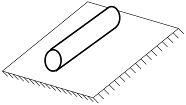
4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

megtámasztás: testek érintkezése útján jön létre, az érintkezés során egymásra **erőt** fejtenek ki
merev testek érintkezése:

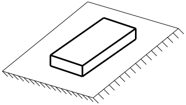
- pontszerű: a két test egyetlen pontban érintkezik, a támasztó-erőrendszer egyetlen koncentrált erő



- vonalszerű: a két test egy vonal mentén érintkezik, a támasztó-ER vonal mentén megoszló ER $\vec{f}\ \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$



- felület menti érintkezés: a két test felület mentén érintkezik egymással, a támasztó-ER felület mentén megoszló ER $\vec{p}\ \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$



4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

4.1 A Coulomb-féle súrlódási modell és törvény (száraz súrlódás esete, Charles Augustine de Coulomb, 1736-1806 francia fizikus)

a) kísérleti tapasztalatok:

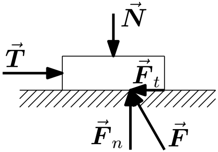
$\vec{\boldsymbol{T}}$: tolóerő, $\vec{\boldsymbol{N}}$ leszorító erő

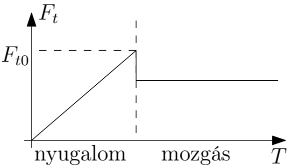
támasztó-ER eredője: $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_n + \vec{\boldsymbol{F}}_t$

$\vec{\boldsymbol{F}}_n = -\vec{\boldsymbol{N}}$

a támasztóerő normál irányú összetevője

nyugalom: $\vec{\boldsymbol{F}}_t = -\vec{\boldsymbol{T}}$ a súrlódási erő





4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

b) a Coulomb-féle súrlódási törvény: kapcsolat az F_n és F_t között
nyugalom esetén: $F_t \leq \mu_0 F_n$; $F_{t0} = \mu_0 F_n$
mozgás esetén: $F_t = \mu F_n$
ahol μ_0 a nyugalmi (tapadási), μ a mozgásbeli súrlódási tényező
$\mu_0 \approx 0{,}01 - 0{,}9 \quad \mu_0 > \mu$

c) a Coulomb-féle súrlódási kúp

$\frac{F_t}{F_n} = \tan\alpha$

törvény: $\frac{F_t}{F_n} \leq \mu_0$ a nyugalom feltétele

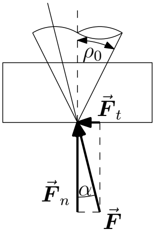
legyen $\mu_0 = \tan\rho_0$, így

$\frac{F_t}{F_n} = \tan\alpha \leq \mu_0 = \tan\rho_0$

$\tan\alpha \leq \tan\rho_0$

$\alpha \leq \rho_0$

következmény: a nyugalom feltétele, hogy a támasztó ER eredőjének hatásvonala a súrlódási kúp **palástja** ($F_t = F_{t0}$ a nyugalmi helyzet határa), vagy azon belül legyen

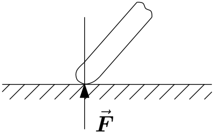


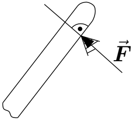
- mozgás esetén $\frac{F_t}{F_n} = \mu$
- sima felület/támasz: $\mu_0 = \mu = 0$: $\vec{\boldsymbol{F}}_t = \vec{\boldsymbol{0}}$; a támasztóerő merőleges a támasztó felületre
- a súrlódási törvényt érvényesnek tekintjük pontszerű/vonalszerű érintkezés esetén

4.2 Megtámasztások fontosabb típusai síkban

a) a támasztóerő iránya ismert, nagysága ismeretlen

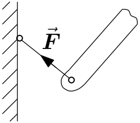
sima támasz:

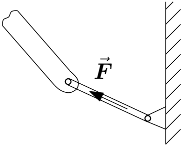




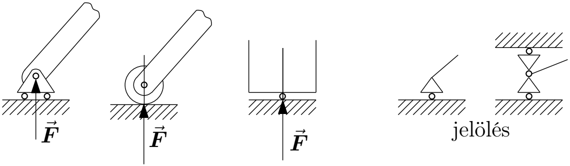
x, y KR: $\frac{F_x}{F_y}$ aránya ismert

súlytalan kötél, vagy rúd támasza

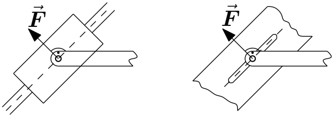




görgős támasz (görgő)



csúszka (sima) $\mu_0 = 0$



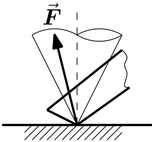
xy KR-ben F_x és F_y ismeretlen

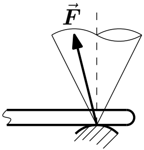
$\frac{F_x}{F_y}$ ismert a hatásvonal miatt

4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

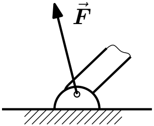
b) a támasztóerő nagysága és iránya ismeretlen

érdes megtámasztás

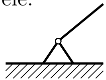




csukló, csuklós támasz



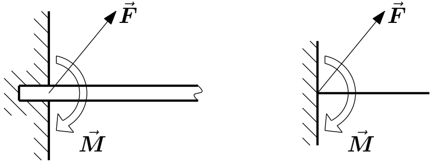
jele:



xy KR-ben: $\vec{\boldsymbol{F}} = F_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + F_y \vec{\boldsymbol{e}}_y$
mind F_x, mind F_y ismeretlen

4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

befogás, befalazás



xyz KR-ben: $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$

$\vec{M} = M_z\vec{e}_z$

3 db ismeretlen

4. Merev test megtámasztásai, statikai feladatok

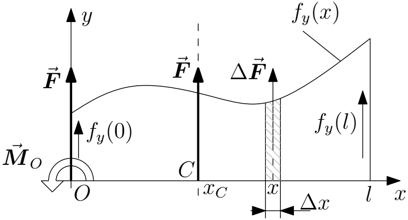
4.3 Statikai feladatok megoldása

- statikai feladat: merev test az ismert terhelő-erőrendszer és a támasztásoknál fellépő ismeretlen erőrendszer hatására tartós nyugalomban van. Keresett a támasztó-ER.
- megoldás: tartós nyugalom, statika alaptétele, támasztó ER + terhelő ER $\equiv$ külső ER, mely egyúttal egyensúlyi ER.
- statikai (egyensúlyi) egyenletekkel dolgozunk, számuk síkban 3 db, térben 6 db.

5. Megoszló erőrendszerek

- vonal, vagy felület mentén érintkező testek kölcsönhatásának eredménye a vonal, vagy felület mentén megoszló ER
- térfogaton megoszló ER (pl. gravitáció)

5.1 Egyenes vonal mentén megoszló ER (síkbeli)



- ismert: a megoszló ER sűrűségvektora $\vec{f}_y = f_y \vec{e}_y \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$ egységnyi hosszra eső erő
- kérdés: a megoszló ER eredője és nyomatéka

a) a megoszló ER redukált vektorkettőse

- Δx szakaszon ható erő: $\Delta\vec{F} = \Delta x \vec{f}_y(x)$ [N]
- a megoszló ER eredője: $\vec{F} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\vec{F} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{f}_y \Delta x = \int\limits_0^l \vec{f}_y(x) \mathrm{d}x$ [N]

5. Megoszló erőrendszerek

- a megoszló ER nyomatéka az O pontra

$$\Delta \vec{\boldsymbol{M}}_O = x\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \Delta \vec{\boldsymbol{F}} = x \Delta F \vec{\boldsymbol{e}}_z = x f_y(x) \Delta x \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

Ez a $\Delta \vec{\boldsymbol{F}}$ erő nyomatéka x karon O pontban.

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta \vec{\boldsymbol{M}}_O = \lim_{n\to\infty,\ \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} x f_y(x) \Delta x \vec{\boldsymbol{e}}_z = \int_0^l x f_y(x) \mathrm{d}x \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \int_{x=0}^{l} x f_y(x) \mathrm{d}x \vec{\boldsymbol{e}}_z$ [Nm] a megoszló ER nyomatéka az O pontra.

következmény: bármely vonal mentén megoszló ER helyettesíthető egy eredő erővel és egy nyomatékkal. $\left(\vec{\boldsymbol{F}}; \vec{\boldsymbol{M}}_O\right)_O$ a megoszló ER redukált vektorkettőse az O pontban.

b) a megoszló ER centrális egyenese
keresett: $C(x_C; 0)$ pont, a centrális egyenes O-hoz legközelebb eső pontja

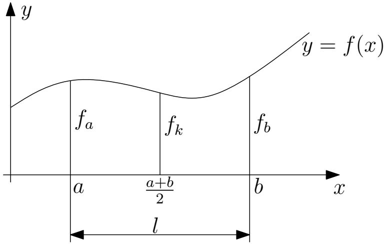
$$\vec{\boldsymbol{r}}_{OC} = \frac{1}{F^2} F \vec{\boldsymbol{e}}_y \times M_O \vec{\boldsymbol{e}}_z = \frac{1}{F^2} F M_O \vec{\boldsymbol{e}}_x = \frac{M_O}{F} \vec{\boldsymbol{e}}_x = x_C \vec{\boldsymbol{e}}_x$$

$$x_C = \frac{M_O}{F} = \frac{\int\limits_0^l x f_y(x) \mathrm{d}x}{\int\limits_0^l f_y(x) \mathrm{d}x}$$

szemléletből nyomaték az O pontra: $(x_C F) \vec{\boldsymbol{e}}_z = M_O \vec{\boldsymbol{e}}_z \quad \Rightarrow \quad x_C = \frac{M_O}{F}$

5. Megoszló erőrendszerek

c) egyváltozós függvény integrálása numerikusan: Simpson-formula

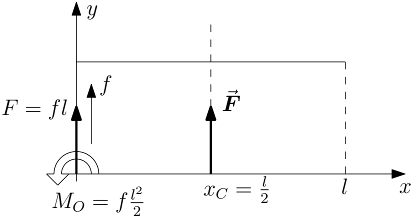


$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left(f_a + 4f_k + f_b\right)$$

ez a képlet pontos legfeljebb 3-adfokú polinomig

5. Megoszló erőrendszerek

egyenletesen megoszló terhelés



adott: $f_y(x) = f =$ áll., kérdés: eredő, $\vec{M}_O$, x_C

eredő:

$$\vec{F} = \int_0^l f_y(x)\mathrm{d}x\vec{e}_y = \int_0^l f\mathrm{d}x\vec{e}_y = f\int_0^l \mathrm{d}x\vec{e}_y = f[x]_0^l\vec{e}_y = fl\vec{e}_y$$

nyomaték az O pontra:

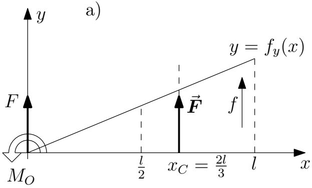
$$\vec{M}_O = \int_0^l xf_y(x)\mathrm{d}x\vec{e}_z = f\int_0^l x\mathrm{d}x\vec{e}_z = f\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l\vec{e}_z = f\frac{l^2}{2}\vec{e}_z$$

a centrális egyenes O-hoz legközelebb eső C pontja:

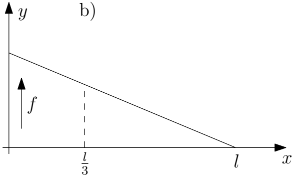
$$x_C = \frac{M_O}{F} = \frac{f\frac{l^2}{2}}{fl} = \frac{l}{2}\ [\mathrm{m}]$$

5. Megoszló erőrendszerek

lineárisan megoszló terhelés



$f_y(x) = \frac{f}{l}x$



$f_y(x) = f - \frac{f}{l}x$

a)

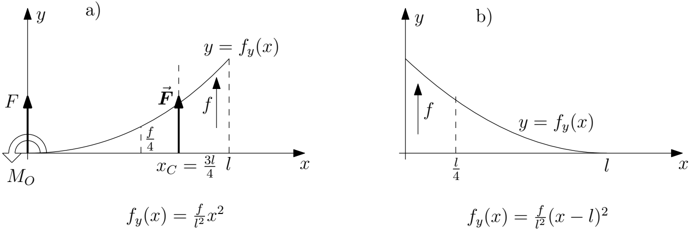
$$F = \int_0^l f_y(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{6}\left(0 + 4\frac{f}{2} + f\right) = \frac{fl}{2} \text{ [N]}$$

$$M_O = \int_0^l x f_y(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{6}\left(0 + 4\frac{l}{2}\frac{f}{2} + fl\right) = \frac{fl^2}{3} \text{ [Nm]} \qquad x_C = \frac{M_O}{F} = \frac{2}{3}l \text{ [m]}$$

b)

$$F = \frac{fl}{2}; \qquad M_O = \frac{fl^2}{6}; \qquad x_C = \frac{l}{3}$$

második fokú polinom (parabola) szerint megoszló terhelés



a)

$$F = \int_0^l f_y(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{6}\left(0 + 4\frac{f}{4} + f\right) = \frac{fl}{3}$$

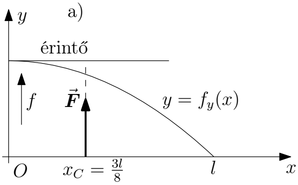
$$M_O = \int_0^l x f_y(x)\mathrm{d}x = \frac{l}{6}\left(0 + 4\frac{l}{2}\frac{f}{4} + fl\right) = \frac{l}{6}\frac{3}{2}fl = \frac{fl^2}{4} \qquad x_C = \frac{M_O}{F} = \frac{3}{4}l$$

b)

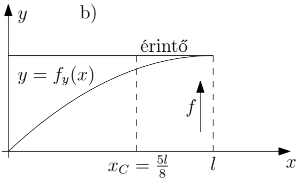
$$F = \frac{fl}{3}; \qquad M_O = \frac{fl^2}{12}; \qquad x_C = \frac{l}{4}$$

5. Megoszló erőrendszerek

másodfokú polinom (parabola) szerint megoszló terhelés



$f_y(x) = f - \frac{f}{l^2}x^2$



$f_y(x) = f - \frac{f}{l^2}(x-l)^2$

a)

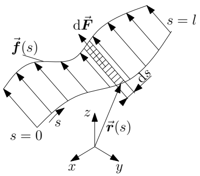
$$F = \frac{2}{3}fl \qquad M_O = \frac{fl^2}{4} \qquad x_C = \frac{3}{8}l$$

b)

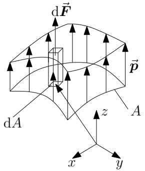
$$F = \frac{2}{3}fl \qquad M_O = \frac{5fl^2}{12} \qquad x_C = \frac{5}{8}l$$

5.2 Vonal mentén, felületen és térfogaton megoszló ER-ek

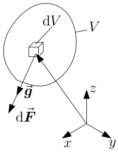
vonal mentén megoszló



felületen megoszló



térfogaton megoszló



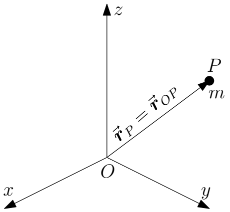
	vonal mentén megoszló	felületen megoszló	térfogaton megoszló
sűrűségvektor	$\vec{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{f}}(s) \quad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$	$\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{p}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m2}}\right]$	$\vec{\boldsymbol{q}} = \vec{\boldsymbol{q}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}\right]$
elemi erő	$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{f}}(s)\mathrm{d}s \quad [\mathrm{N}]$	$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{p}}\mathrm{d}A \quad [\mathrm{N}]$	$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{q}}\mathrm{d}V \quad [\mathrm{N}]$
eredő erő	$\vec{\boldsymbol{F}} = \int_0^l \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = \int_0^l \vec{\boldsymbol{f}}(s)\mathrm{d}s \quad [\mathrm{N}]$	$\vec{\boldsymbol{F}} = \int_{(A)} \vec{\boldsymbol{p}}\mathrm{d}A \quad [\mathrm{N}]$	$\vec{\boldsymbol{F}} = \int_{(V)} \vec{\boldsymbol{q}}\mathrm{d}V \quad [\mathrm{N}]$
nyomaték O-ban	$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \int_0^l \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} =$ $= \int_0^l \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{f}}(s)\mathrm{d}s \quad [\mathrm{Nm}]$	$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \int_{(A)} \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}\mathrm{d}A \quad [\mathrm{Nm}]$	$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \int_{(V)} \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{q}}\mathrm{d}V \quad [\mathrm{Nm}]$ pl.: $\vec{\boldsymbol{q}} = \rho g \vec{\boldsymbol{e}}$

következmény: bármely megoszló ER helyettesíthető a test/tér egy tetszőleges pontjában egy koncentrált erővel és egy nyomatékkal ≡ az ER redukált vektorkettősével

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

6.1 Tömegpontrendszer tömegközéppontja és súlypontja

a) Tömegpont statikai nyomatéka



a P anyagi ponthoz egy skaláris mennyiséget rendelünk: m tömeg [kg]. Tömeg: a tehetetlenség mértéke. Értelmezés: a P pontbeli m tömeg statikai nyomatéka az O pontra:

$$\vec{S}_O = \vec{r}_{OP} m \text{ [kgm]}$$

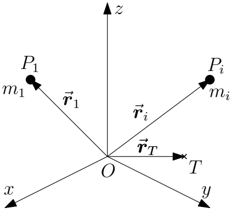
(ez egy segédmennyiség, lineáris vagy elsőrendű nyomatéka m-nek) egyetlen m tömegpont tömegközéppontja: P, $\vec{S}_P = \vec{0}$

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

b)tömegpontrendszer tömegközéppontja

ismert: P_i, m_i, $i = 1, \ldots, n$, $\vec{\boldsymbol{r}}_{OP_i} \equiv \vec{\boldsymbol{r}}_i$
keresett: a tömegpontrendszer tömegközéppontja: $\vec{\boldsymbol{r}}_T$
a tömegpontrendszer össztömege: (eredő tömeg)

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$



értelmezés:
az m_i, $i = 1, \ldots, n$ tömegpontrendszer **tömegközéppontja** az a pont, amelyben a tömegpontrendszer az m össztömegével helyettesíthető olyan módon, hogy erre a

pontra (T) a tömegpontrendszer **statika nyomatéka zérus**

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

meghatározása:

$$\vec{\boldsymbol{S}}_O = \vec{\boldsymbol{r}}_1 m_1 + \ldots + \vec{\boldsymbol{r}}_n m_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{r}}_i m_i$$

$$\vec{\boldsymbol{S}}_O = m\vec{\boldsymbol{r}}_{OT}$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{OT} m = \vec{\boldsymbol{r}}_1 m_1 + \ldots + \vec{\boldsymbol{r}}_n m_n$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{OT} \equiv \vec{\boldsymbol{r}}_T = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{r}}_i m_i}{m} = \frac{\vec{\boldsymbol{S}}_O}{m} \ [\mathrm{m}]$$

átszámítás másik pontba:

$$\vec{\boldsymbol{S}}_A = \vec{\boldsymbol{S}}_O + \vec{\boldsymbol{r}}_{AO} m$$

(analógia: $\vec{\boldsymbol{M}}_A = \vec{\boldsymbol{M}}_O + \vec{\boldsymbol{r}}_{AO} \times \vec{\boldsymbol{F}}$)
például: $\vec{\boldsymbol{S}}_T = \vec{\boldsymbol{S}}_O + \vec{\boldsymbol{r}}_{TO} m = m\vec{\boldsymbol{r}}_{OT} + m\vec{\boldsymbol{r}}_{TO} = \vec{\boldsymbol{0}}$
a statikai nyomaték koordinátái egy tömegpont esetén:

$$\vec{\boldsymbol{S}}_O = \vec{\boldsymbol{r}}_{OP} m = \underbrace{x_{OP} m}_{S_{yz}} \vec{\boldsymbol{e}}_x + \underbrace{y_{OP} m}_{S_{xz}} \vec{\boldsymbol{e}}_y + \underbrace{z_{OP} m}_{S_{xy}} \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

itt S_{yz}, S_{xz}, S_{xy} rendre az yz, xz és xy koordináta-síkokra számított statikai nyomaték

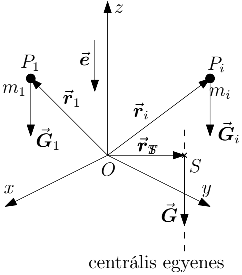
6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

c) tömegpontrendszer súlypontja
ismert: m_i, $\vec{\boldsymbol{r}}_i$, $i = 1, \ldots, n$,
g, $\vec{\boldsymbol{e}}$: gravitációs erőtér (gyorsulás, irány)
(Föld: $g \approx 9{,}81$
$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) $\vec{\boldsymbol{G}}_i = m_i \vec{\boldsymbol{g}} = m_i g \vec{\boldsymbol{e}} \left[\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2} = N\right]$
a tömegpontrendszer eredő súlya (összsúlya)

$$\vec{\boldsymbol{G}} = \vec{\boldsymbol{G}}_1 + \vec{\boldsymbol{G}}_2 + \ldots + \vec{\boldsymbol{G}}_n = \sum_{i=1}^{n} (m_i \vec{\boldsymbol{g}}) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \vec{\boldsymbol{g}} = m \vec{\boldsymbol{g}}$$

értelmezés: az m_i
$i = 1, \ldots, n$ tömegpontrendszer súlypontja
az a pont, amelyben a tömegpontrendszer $\vec{\boldsymbol{G}}_i$
súlyerői a $\vec{\boldsymbol{G}}$ eredő súlyerővel helyettesíthető
– gravitáció irányától és nagyságától
függetlenül – olyan módon, hogy erre
a pontra a súlyerőrendszer nyomatéka zérus



6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

a súlypont meghatározása:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{G}_1 + \ldots + \vec{r}_n \times \vec{G}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i \right) \times \vec{g}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_S \times \vec{G} = \vec{r}_S \times m\vec{g} = (\vec{r}_S m) \times \vec{g}$$

Magyarázat: a zárójelben álló mennyiségeknek meg kell egyezniük

$$\vec{r}_S m = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i$$

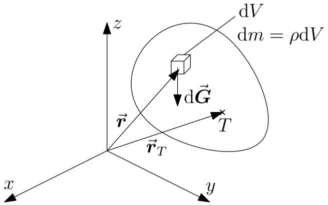
$$\vec{r}_S = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i}{m} \equiv \vec{r}_T$$

következmény: a tömegközéppont és a súlypont egybeesik: $S \equiv T$

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

6.2 Merev test tömegközéppontja és súlypontja

- a test sűrűsége: $\rho = \rho(\vec{r})$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$
  homogén test: $\rho =$ áll.
- az elemi térfogat: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- az elemi tömeg: $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$
- a test térfogata: $V = \lim\limits_{n\to\infty,\ \Delta m\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V = \int\limits_V \mathrm{d}V = \int\limits_x \int\limits_y \int\limits_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- a test tömege:
  m= $\int\limits_{(V)} \rho \mathrm{d}V = \int\limits_{(V)} \mathrm{d}m = \int\limits_x \int\limits_y \int\limits_z \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- a test súlya:
  $\vec{G} = \lim\limits_{n\to\infty,\ \Delta m\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m\vec{g} = \int\limits_{(V)} \mathrm{d}m\vec{g} = m\vec{g}$, $\rho g = \gamma$ $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right]$ a fajsúly
- a merev test statikai nyomatéka az O pontra: $\vec{S}_O = \lim\limits_{n\to\infty,\ \Delta m\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m\vec{r} = \int\limits_{(V)} \vec{r}\mathrm{d}m = \int\limits_{(V)} \vec{r}\rho \mathrm{d}V$



6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

- a merev test tömegközéppontja és súlypontja azonos: $\vec{\boldsymbol{r}}_S \equiv \vec{\boldsymbol{r}}_T = \frac{\vec{\boldsymbol{S}}_O}{m} = \frac{\int\limits_{(V)} \vec{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}m}{\int\limits_{(V)} \mathrm{d}m}$ [m];

$\vec{\boldsymbol{S}}_O = \vec{\boldsymbol{r}}_T m$

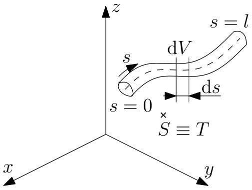
- a homogén test súlypontja: $\vec{\boldsymbol{r}}_S = \vec{\boldsymbol{r}}_T = \frac{\int\limits_{(V)} \rho\vec{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}V}{\int\limits_{(V)} \rho\mathrm{d}V} = \frac{\rho\int\limits_{(V)} \vec{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}V}{\rho\int\limits_{(V)} \mathrm{d}V} = \frac{\int\limits_{(V)} \vec{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}V}{\int\limits_{(V)} \mathrm{d}V} = \frac{\int\limits_{(V)} \vec{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}V}{V}$;

$\int\limits_{(V)} \vec{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}V = \vec{\boldsymbol{r}}_T V$

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

6.3 Speciális merev testek súlypontja

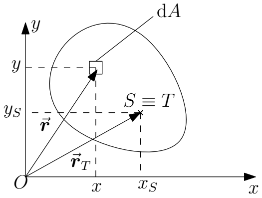
a) homogén rúd



- keresztmetszet: $A =$ áll.; $\rho =$ áll.
- rúd hossza: $l = \int\limits_{(l)} \mathrm{d}s$
- a rúd tömege: $m = \int\limits_{(V)} \mathrm{d}m = \int\limits_{(A)} \int\limits_{(l)} \rho \mathrm{d}V = \rho \int\limits_{(A)} \int\limits_{(l)} \mathrm{d}A\mathrm{d}s =$
  $\rho \underbrace{\int\limits_{(A)} \mathrm{d}A}_{A} \underbrace{\int\limits_{l} \mathrm{d}s}_{l} = \rho A l = \rho V$
- statikai nyomaték:
  $\vec{\boldsymbol{S}}_O = \int\limits_{(V)} \vec{\boldsymbol{r}} \rho \mathrm{d}V = \rho \int\limits_{(A)} \int\limits_{(l)} \vec{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}A\mathrm{d}s =$
  $\rho \int\limits_{(A)} \mathrm{d}A \int\limits_{(l)} \vec{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}s = \rho A \int\limits_{(l)} \vec{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}s$
- súlypont: $\vec{\boldsymbol{r}}_S = \dfrac{\vec{\boldsymbol{S}}_O}{m} = \dfrac{\rho A \int\limits_{(l)} \vec{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}s}{\rho A l} = \dfrac{\int\limits_{(l)} \vec{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}s}{l}$;
  vonal: ha $A \to 0$, akkor $\rho A = 1$, így továbbra is érvényesek a fenti képletek

6. Tömegközéppont, súlypont, statikai nyomaték

b) homogén merev lap

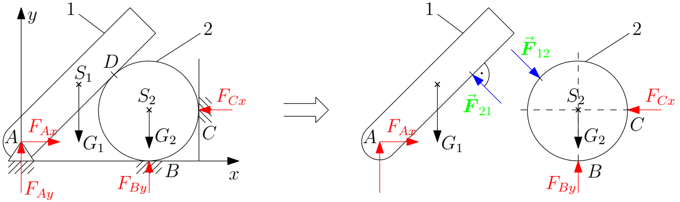


- vastagsága: $h =$ áll. (z irányban)
- sűrűség: $\rho =$ áll.
- felület: $A = \int\limits_{(A)} \mathrm{d}A = \int\limits_x \int\limits_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
- statikai nyomaték: $\vec{S}_O = \int\limits_{(V)} \vec{r}\mathrm{d}m = \int\limits_{(V)} \vec{r}\rho\mathrm{d}V = \rho \int\limits_{(V)} \vec{r}\mathrm{d}V = \rho \int\limits_{(A)} \int\limits_{(h)} \vec{r}\mathrm{d}A\mathrm{d}z = \rho h \int\limits_{(A)} \vec{r}\mathrm{d}A$
- súlypont:
  $\vec{r}_S \equiv \vec{r}_T = \frac{\vec{S}_O}{m} = \frac{\rho h \int\limits_{(A)} \vec{r}\mathrm{d}A}{\rho A h} = \frac{\int\limits_{(A)} \vec{r}\mathrm{d}A}{A}$,
  koordinátái: $\vec{r}_S = x_S\vec{e}_x + y_S\vec{e}_y$,
  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, ezek
  $x_S = \frac{\int\limits_{(A)} x\mathrm{d}A}{A} = \frac{S_y}{A}$, $y_S = \frac{\int\limits_{(A)} y\mathrm{d}A}{A} = \frac{S_x}{A}$, ahol $S_x = \int\limits_{(A)} y\mathrm{d}A$ és $S_y = \int\limits_{(A)} x\mathrm{d}A$ rendre az x és y tengelyre számított (lineáris) statikai nyomaték. Megjegyzés: ha x és y tengelyek átmennek a súlyponton, akkor $O \equiv S$, $\vec{S}_O \equiv \vec{0}$, és $S_x = S_y = 0$

Feladat: több merev testből álló rendszer tartós nyugalmához szükséges külső és belső erők meghatározása

7.1 Jelölések, statikai határozottság, megoldhatóság

két merev testből álló rendszer



Adott: az ábra a méretekkel együtt, ill. $\mu_0 = 0$

ismeretlen külső ER: $\vec{F}_A = F_{Ax}\vec{\boldsymbol{e}}_x + F_{Ay}\vec{\boldsymbol{e}}_y$; $\vec{\boldsymbol{F}}_B = F_{By}\vec{\boldsymbol{e}}_y$; $\vec{\boldsymbol{F}}_C = F_{Cx}\vec{\boldsymbol{e}}_x$.

Az egész (1+2) szerkezetre összesen 3 statikai (egyensúlyi) egyenlet írható fel.

7. Szerkezetek statikája

- ismeretlen belső erők:
  1-ről a 2-re: $\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = F_{12x}\vec{\boldsymbol{e}}_x - F_{12y}\vec{\boldsymbol{e}}_y$
  2-ről az 1-re: $\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -F_{21x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + F_{21y}\vec{\boldsymbol{e}}_y$
  és: $\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$; vagy $\vec{\boldsymbol{F}}_{12} + \vec{\boldsymbol{F}}_{21} = \vec{\boldsymbol{0}}$
  továbbá: ismert az $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ iránya is, azaz az $\frac{F_{12y}}{F_{12x}}$ arány. Következmény: a belső erő egy ismeretlent jelent.
- az 1 és 2 test a rájuk ható külső és belső erők hatására külön-külön tartós nyugalomban van
- egyensúlyi erőrendszerek
  a) 1+2 külső ER-re: 3 egyensúlyi egyenlet
  b) 1 külső és belső ER-re: 3 egyensúlyi egyenlet
  c) 2 külső és belső ER-re: 3 egyensúlyi egyenlet
  Ez összesen 6 db <u>független</u> statikai (egyensúlyi) egyenlet
- n db merev testből álló rendszer esetén síkban $3n$ független egyenlet; térben $6n$ független egyenlet írható fel
- az ismeretlenek száma legyen n_i, a felírható független egyenleteké pedig n_e
  a felrajzolt példában: $n_e = 6$, $n_i = 5$, vagyis $n_e > n_i$, a feladat tehát megoldható

7. Szerkezetek statikája

- statikailag határozott szerkezet: értelmezés
  egy merev testekből álló rendszer statikailag határozott, ha a külső és belső ER ismeretlenjeinek száma és a felírható független statikai egyenletek száma megegyezik, vagyis $n_e = n_i$
- ha $n_e > n_i$, akkor a szerkezet labilis, mozgékony, de a támasztó ER számítható, a feladat megoldható (statikailag túlhatározott)
- ha $n_e < n_i$, akkor a szerkezet statikailag határozatlan, és csak egyensúlyi v. statikai egyenletekkel nem számítható a támasztó ER.
- például egy merev test: $n_e = 3 \rightarrow n_i \leq n_e$ esetén oldható meg a feladat